

## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ СОНЯЧНОЇ СИСТЕМИ З УРАХУВАННЯМ ШВИДКОСТІ ГРАВИТАЦІЇ

**В. Ю. Слюсарчук**

*Нац. ун-т вод. госп-ва та природокористування  
вул. Соборна, 11, Рівне, 33000, Україна  
e-mail: V.E.Slyusarchuk@gmail.com*

We construct a Solar system mathematical model that accounts for finite gravitation velocity. We also specify Kepler's laws and list properties of the studied system.

Побудована математическая модель Солнечной системы, учитывающая конечную скорость гравитации, уточнены законы Кеплера и приведены свойства исследуемой системы.

**1. Вступ.** Цю статтю присвячено застосуванню диференціальних рівнянь із відхилювальним аргументом до побудови математичних моделей руху системи  $n$  матеріальних точок (тіл) під дією закону всесвітнього тяжіння, зокрема до побудови математичної моделі Сонячної системи. Для побудови таких моделей створено належні умови: по-перше, побудовано теорію диференціально-функціональних рівнянь (див., наприклад, [1 – 11]); по-друге, встановлено, що швидкість гравітації є скінченною [12, 13].

Оскільки гравітаційний вплив одного тіла на інше не може відбуватися миттєво, а потрібен час, за який гравітаційне поле проходить відстань між цими тілами, то природним є те, що математичні моделі руху систем  $n$  матеріальних точок повинні бути системами із післядією. Тому для вивчення динаміки таких систем найбільш прийнятним є математичний апарат, в основу якого покладено теорію диференціальних рівнянь із запізнювальним аргументом.

Із моменту відкриття І. Ньютоном закону всесвітнього тяжіння, опублікованого в його знаменитих „Philosophiae Naturalis Principia mathematica” в 1687 р., для математичного формулювання задач  $n$  тіл використовувалися звичайні диференціальні рівняння, оскільки вважалося, що швидкість гравітації є нескінченною і гравітаційне поле поширюється миттєво від джерела, як би далеко від нього не знаходиться.

Для двох окремих значень  $n \in \{1, 2\}$  задача  $n$  тіл розв'язана ще Ньютоном. Розв'язок задачі про рух одного тіла міститься в його першому законі (тіло рухається рівномірно і прямолінійно). Використавши звичайні диференціальні рівняння, Ньютон знайшов загальний розв'язок задачі двох тіл і надав йому геометричної форми (траєкторіями руху одного тіла відносно іншого і відносно центра мас є конічні перерізи).

На відміну від випадку двох тіл задача трьох тіл не допускає загального розв'язку. Через свою важливість для різних наук про природу задача трьох тіл привернула до себе увагу багатьох математиків і механіків. Ж. Лагранж, К. Якобі, А. Пуанкаре, Дж. Біркгоф та інші витратили на цю задачу багато років наполегливої праці, отримали багато вагомих результатів і розвинули нові методи, однак побудувати загальний розв'язок так і не вдалось.

Г. Брунс і А. Пуанкаре довели, що при  $n = 3$  для задачі  $n$  тіл не можна знайти загальний розв'язок, який би виражався через алгебраїчні або через однозначні трансцендентні функції координат і швидкостей тіл.

Хоча загальний розв'язок задачі трьох тіл отримати не вдалося, давно відомі точні частинні розв'язки цієї задачі. У 1772 р. Ж. Лагранж опублікував свій знаменитий мемуар „Про задачу трьох тіл”, у якому вказав на існування двох класів рухів у задачі трьох тіл, що описуються нескладними математичними формулами (існування таких частинних розв'язків було відмічено Ейлером ще в 1767 р.).

Зазначимо, що важливі результати щодо задач  $n$  тіл при  $n \geq 2$  з'являлись протягом XIX і XX століть і з'являються зараз (див. [14–21]).

Використання в небесній механіці математичного апарату загальної теорії відносності дозволило дослідити ряд релятивістських ефектів у русі небесних тіл [22–24].

Математичні труднощі дослідження задачі  $n$  тіл із використанням звичайних диференціальних рівнянь зростають із збільшенням числа тіл. Для довільного  $n$  задача не розв'язана до цього часу, хоча існує ряд аналітичних і числових методів, орієнтованих на використання комп'ютерів, що можуть дати наближений розв'язок задачі.

Математичні моделі руху  $n$  тіл із використанням звичайних диференціальних рівнянь не є точними, оскільки не враховують скінченну швидкість гравітації. Це не дозволяє використовувати їх на великих проміжках часу, оскільки такі моделі дають великі похибки. Точнішими є моделі, що враховують дію кожного тіла на інші тіла системи, зумовлені запізненнями гравітаційних полів, породжених кожним тілом. У таких моделях замість звичайних диференціальних рівнянь потрібно використовувати диференціальні рівняння із запізнювальним аргументом. Такі моделі ми наведемо у подальшому.

Зазначимо, що у математичній моделі Сонячної системи з використанням диференціальних рівнянь із запізнювальним аргументом відхилення аргументів є досить великими. Наприклад, у рівняннях руху Землі та Плутона деякі відхилення аргумента більші за 8 та 328 хвилин відповідно. Очевидно, що не враховувати такі запізнювання при вивченні динаміки Сонячної системи на великих проміжках часу не можна.

Основною метою статті є побудова моделі Сонячної системи з використанням рівнянь із запізнювальним аргументом та встановлення деяких властивостей такої моделі.

У п. 2 наведено класичну модель Сонячної системи, в якій використовуються звичайні диференціальні рівняння.

У п. 3 приділено увагу скінченній швидкості гравітації, що є підставою використати для побудови математичної моделі Сонячної системи не звичайні диференціальні рівняння, а диференціальні рівняння із відхилювальним аргументом. Побудову такої моделі (із відхиленнями аргумента) виконано в п. 4.

У п. 5 наведено оцінки для відхилень аргумента в побудованій моделі Сонячної системи. Відхилення аргумента в такій моделі набувають досить великих значень. Природним є те, що Сонячна система є системою з післядією, і тому при вивченні її властивостей особливо на великих проміжках часу запізнюваннями гравітаційного поля не можна нехтувати.

Завдяки скінченній швидкості гравітації при русі матеріальних точок притягувальними для них є точки в моменти часу, що враховують запізнювання дій на них відповідних точок. П. 6 присвячено дослідженню зміщень у просторі цих притягувальних точок.

Основним наслідком побудованої моделі Сонячної системи з післядією є уточнення перших двох законів Кеплера, що розглядаються в п. 7. Виявилось, що фокусами еліптичних орбіт планет (якщо трохи збурити гравітаційне поле, породжене всіма складовими Сонячної системи) є не центр Сонця, а інші притягувальні точки, які для далеких від Сонця планет знаходяться за межами сонячного диску.

П. 8 присвячено можливим застосуванням побудованої моделі Сонячної системи та її властивостей.

**2. Класична модель Сонячної системи.** Розглянемо систему  $n + 1$  матеріальних точок  $M_0, M_1, \dots, M_n$  з масами  $m_0, m_1, \dots, m_n$  відповідно. Рух цих точок будемо розглядати в прямокутній системі координат  $x, y, z$  з початком у точці  $O$ . Систему координат вважатимемо інерціальною. Потрібно знайти рівняння руху цих точок, якщо на кожну точку діють лише сили всесвітнього тяжіння зі сторони інших точок системи. Положення точок  $M_i, i = \overline{0, n}$ , визначається їхніми радіусами-векторами

$$\bar{r}_i(t) = x_i(t)\bar{i} + y_i(t)\bar{j} + z_i(t)\bar{k}, \quad i = \overline{0, n},$$

де  $x_i(t), y_i(t)$  і  $z_i(t)$  — координати точки  $M_i$  в момент часу  $t$ .

Рівняння руху точок системи визначається за допомогою другого закону Ньютона та закону всесвітнього тяжіння і має вигляд

$$m_i \frac{d^2 \bar{r}_i(t)}{dt^2} = \sum_{j \in \{0, 1, \dots, n\} \setminus \{i\}} G \frac{m_i m_j}{|\bar{r}_j(t) - \bar{r}_i(t)|^3} (\bar{r}_j(t) - \bar{r}_i(t)), \quad i = \overline{0, n}, \quad (1)$$

де  $G$  — гравітаційна стала,  $|\bar{r}_j(t) - \bar{r}_i(t)|$  — евклідова довжина вектора  $\bar{r}_j(t) - \bar{r}_i(t)$ ,  $G \frac{m_i m_j}{|\bar{r}_j(t) - \bar{r}_i(t)|^3} (\bar{r}_j(t) - \bar{r}_i(t))$  — сила, з якою точка  $M_j$  притягує точку  $M_i$ . Напрямок цієї сили збігається з напрямком вектора  $\bar{r}_j(t) - \bar{r}_i(t)$  [21].

Зазначимо, що у випадку  $n = 9$  систему рівнянь (1) можна використовувати для вивчення руху Сонця і планет, якщо не враховувати дію на них інших складових Сонячної системи (астероїдів, комет тощо) та Галактики.

Для визначення радіусів-векторів точок  $M_i, i = \overline{0, n}$ , потрібно знати початкові умови

$$\bar{r}_i^{(0)} = \bar{r}_i(t_0), \quad \frac{d\bar{r}_i^{(0)}}{dt} = \frac{d\bar{r}_i(t_0)}{dt}, \quad i = \overline{0, n}, \quad (2)$$

тобто значення радіусів-векторів і векторів швидкості всіх точок системи в початковий момент часу  $t_0$ , або значення радіусів-векторів точок у моменти часу  $t_1$  і  $t_2$ :

$$\bar{r}_i^{(1)} = \bar{r}_i(t_1), \quad \bar{r}_i^{(2)} = \bar{r}_i(t_2), \quad i = \overline{0, n}. \quad (3)$$

Точнішою математичною моделлю Сонячної системи є не система рівнянь (1) при  $n = 9$ , а система рівнянь

$$m_i \frac{d^2 \bar{r}_i(t)}{dt^2} = \sum_{j \in \{0, 1, \dots, n\} \setminus \{i\}} G \frac{m_i m_j}{|\bar{r}_j(t) - \bar{r}_i(t)|^3} (\bar{r}_j(t) - \bar{r}_i(t)) + \bar{F}_i(t), \quad i = \overline{0, n}, \quad (4)$$

при  $n = 9$ , в якій  $\bar{F}_i(t)$  — сила, що діє на планету з номером  $i$  та породжена малими планетами, астероїдами, кометами, пиловими супутниками планет, Галактикою тощо.

Очевидно, що при дослідженні системи (4) потрібно враховувати (2) або (3).

Далі будемо вважати, що в системі (4)  $m_0$  — маса Сонця, а  $m_1$  — маса однієї з планет Сонячної системи, наприклад Землі. Система диференціальних рівнянь, що описує рух

Таблиця 1

Назва планети	Велика піввісь $a$ , в а. о.	Період обертання $P$ , в роках	Ексцентриситет, $e$	Екваторіальний радіус, в км	Маса, в одиницях маси Землі
Меркурій	0,387	0,241	0,206	2240	0,055
Венера	0,723	0,615	0,007	6052	0,815
Земля	1,000	1,000	0,017	6378	1,000
Марс	1,524	1,881	0,093	3397	0,107
Юпітер	5,203	11,862	0,048	71400	318
Сатурн	9,539	29,458	0,056	60000	95,2
Уран	19,19	84,015	0,047	25400	14,6
Нептун	30,07	164,79	0,009	24300	17,2
Плутон	39,52	247,7	0,253	2000	0,002

Сонця та цієї планети, має вигляд

$$\begin{aligned}
 m_0 \frac{d^2 \bar{r}_0(t)}{dt^2} &= G \frac{m_0 m_1}{|\bar{r}_1(t) - \bar{r}_0(t)|^3} (\bar{r}_1(t) - \bar{r}_0(t)) + \bar{F}_0^*(t), \\
 m_1 \frac{d^2 \bar{r}_1(t)}{dt^2} &= G \frac{m_1 m_0}{|\bar{r}_0(t) - \bar{r}_1(t)|^3} (\bar{r}_0(t) - \bar{r}_1(t)) + \bar{F}_1^*(t),
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

де

$$\begin{aligned}
 \bar{F}_0^*(t) &= \sum_{j \in \{0,1,\dots,n\} \setminus \{0,1\}} G \frac{m_0 m_j}{|\bar{r}_j(t) - \bar{r}_0(t)|^3} (\bar{r}_j(t) - \bar{r}_0(t)) + \bar{F}_0(t), \\
 \bar{F}_1^*(t) &= \sum_{j \in \{0,1,\dots,n\} \setminus \{0,1\}} G \frac{m_1 m_j}{|\bar{r}_j(t) - \bar{r}_1(t)|^3} (\bar{r}_j(t) - \bar{r}_1(t)) + \bar{F}_1(t).
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

Будемо вважати, що сили  $\bar{F}_0^*(t)$  і  $\bar{F}_1^*(t)$  є відомими.

Щоб описати рух Сонця та Землі, потрібно крім (5) використати (2) або (3) при  $n = 2$ .

У другому рівнянні системи (5), як видно з (6) та табл. 1, запозиченої з [25, с. 114], сила  $\bar{F}_1^*(t)$  є значно меншою, ніж сила, що визначається першим доданком правої частини цього рівняння. Це впливає з того, що маса Сонця  $m_0$  у 332958 разів більша за масу Землі  $m_1$ , а маса найважчої планети Юпітер більша за масу Землі у 318 разів.

Звідси на підставі методів теорії збурень випливає, що рух Сонця і Землі (хоча б на деякому відрізку) мало відрізняється від руху, що описується простішою системою

$$\begin{aligned} m_0 \frac{d^2 \bar{r}_0(t)}{dt^2} &= G \frac{m_0 m_1}{|\bar{r}_1(t) - \bar{r}_0(t)|^3} (\bar{r}_1(t) - \bar{r}_0(t)) + \bar{F}_0^*(t), \\ m_1 \frac{d^2 \bar{r}_1(t)}{dt^2} &= G \frac{m_1 m_0}{|\bar{r}_0(t) - \bar{r}_1(t)|^3} (\bar{r}_0(t) - \bar{r}_1(t)). \end{aligned} \quad (7)$$

У цій системі знехтувати силою  $\bar{F}_0^*(t)$  не можна, оскільки на підставі табл. 1 та закону всесвітнього тяжіння вплив Юпітера на Сонце більший, ніж вплив Землі на Сонце. Тому систему (5) не можна замінити ще більш простою системою, ніж (7), а саме, системою

$$\begin{aligned} m_0 \frac{d^2 \bar{r}_0(t)}{dt^2} &= G \frac{m_0 m_1}{|\bar{r}_1(t) - \bar{r}_0(t)|^3} (\bar{r}_1(t) - \bar{r}_0(t)), \\ m_1 \frac{d^2 \bar{r}_1(t)}{dt^2} &= G \frac{m_1 m_0}{|\bar{r}_0(t) - \bar{r}_1(t)|^3} (\bar{r}_0(t) - \bar{r}_1(t)). \end{aligned} \quad (8)$$

Із наведеного випливає, що навіть у випадку класичних моделей Сонячної системи, що є простішими за реальні моделі, дослідження динаміки цієї системи не є тривіальним.

**3. Принцип запізнювання гравітаційного поля.** У теорії Ньютона швидкість гравітації дорівнює нескінченності і гравітаційне поле поширюється миттєво від джерела, як би далеко від нього не знаходиться. З іншого боку, теорія відносності Ейнштейна постулює, що швидкість гравітації повинна дорівнювати швидкості світла. Розглянуту в п. 2 модель руху системи матеріальних точок побудовано з використанням припущення, що дія однієї точки на іншу відбувається з нескінченною швидкістю. Це є недоліком розглянутої моделі та математичних моделей, що досліджуються у класичній небесній механіці. Насправді, швидкість гравітації є скінченною, що підтверджено експериментами С. М. Копейкіна і Е. Фомалонта [13], і збігається зі швидкістю світла  $c$ . Використання цієї властивості гравітації дає змогу суттєво покращити математичну модель руху системи матеріальних точок та математичну модель Сонячної системи, уточнити деякі закони небесної механіки та знайти нові властивості досліджуваних систем.

Далі з'ясуємо вплив скінченної швидкості гравітації на вигляд математичних моделей, що розглядаються в небесній механіці.

Щоб не ускладнювати викладення матеріалу, обмежимося розглядом системи двох матеріальних точок  $M_i$  і  $M_j$  з масами  $m_i$  і  $m_j$ , рух яких описується радіусами-векторами  $\bar{r}_i(t)$  і  $\bar{r}_j(t)$  відповідно (ми вважаємо, що  $\bar{r}_j(t) \neq \bar{r}_i(t)$ ). Ці точки рухаються зі швидкостями  $\bar{v}_i(t) = \frac{d\bar{r}_i(t)}{dt}$  і  $\bar{v}_j(t) = \frac{d\bar{r}_j(t)}{dt}$ . Нагадаємо, що використовується нерухома система координат із початком у точці  $O$ . Наведемо систему рівнянь, що описує рух точок  $M_i$  і  $M_j$  і враховує швидкість гравітації. Спочатку з'ясуємо, яка сила діє на точку  $M_i$  в момент часу  $t$ , вважаючи, що на точки  $M_i$  і  $M_j$  не діють інші сили, крім сили, з якою притягуються точки. Ця сила не збігається із силою

$$\bar{F}_{ji}(t) = G \frac{m_i m_j}{|\bar{r}_j(t) - \bar{r}_i(t)|^3} (\bar{r}_j(t) - \bar{r}_i(t)), \quad (9)$$

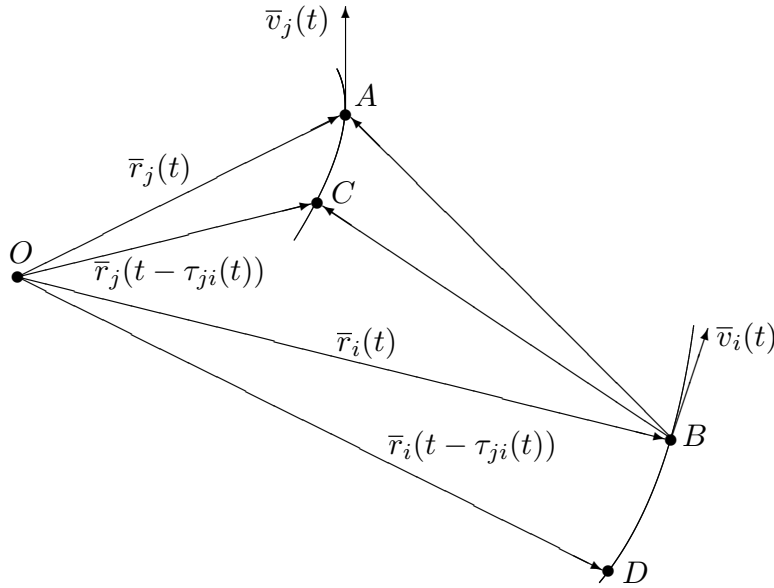


Рис. 1

як у теорії Ньютона, а збігається із силою

$$\bar{F}_{jir}(t) = G \frac{m_i m_j}{|\bar{r}_j(t - \tau_{ji}(t)) - \bar{r}_i(t)|^3} (\bar{r}_j(t - \tau_{ji}(t)) - \bar{r}_i(t)), \quad (10)$$

що враховує швидкість гравітації. Запізнювання гравітації  $\tau_{ji}(t)$  в (10) визначається за допомогою співвідношення

$$c\tau_{ji}(t) = |\bar{r}_j(t - \tau_{ji}(t)) - \bar{r}_i(t)|, \quad (11)$$

де  $c$  — швидкість гравітації.

Нехай точки  $M_j$  і  $M_i$  рухаються по відповідних траєкторіях, частини яких зображено на рис. 1, і в момент часу  $t - \tau_{ji}(t)$ , де  $\tau_{ji}(t)$  задовольняє (11), знаходяться в точках  $C$  і  $D$  відповідно. За проміжок часу  $[t - \tau_{ji}(t), t]$  точка  $M_j$  переміститься з точки  $C$  в точку  $A$ , а точка  $M_i$  — з точки  $D$  в точку  $B$ . Цього проміжку часу достатньо, щоб гравітаційне поле зі швидкістю  $c$  поширилось із точки  $C$  в точку  $B$ . Отже, в момент часу  $t$  на точку  $B$  діє не сила (9), а сила (10).

За допомогою аналогічних міркувань приходимо до висновку, що точка  $M_i$  притягує точку  $M_j$  із силою

$$\bar{F}_{ij\tau}(t) = G \frac{m_j m_i}{|\bar{r}_i(t - \tau_{ij}(t)) - \bar{r}_j(t)|^3} (\bar{r}_i(t - \tau_{ij}(t)) - \bar{r}_j(t)),$$

де запізнення  $\tau_{ij}(t)$  задовольняє співвідношення

$$c\tau_{ij}(t) = |\bar{r}_i(t - \tau_{ij}(t)) - \bar{r}_j(t)|. \quad (12)$$

Враховуючи знайдені сили, що діють на точки  $M_i$  і  $M_j$  в момент часу  $t$ , отримуємо на підставі другого закону Ньютона систему рівнянь, що описує рух цих точок:

$$\begin{aligned} m_i \frac{d^2 \bar{r}_i(t)}{dt^2} &= G \frac{m_i m_j}{|\bar{r}_j(t - \tau_{ji}(t)) - \bar{r}_i(t)|^3} (\bar{r}_j(t - \tau_{ji}(t)) - \bar{r}_i(t)), \\ m_j \frac{d^2 \bar{r}_j(t)}{dt^2} &= G \frac{m_j m_i}{|\bar{r}_i(t - \tau_{ij}(t)) - \bar{r}_j(t)|^3} (\bar{r}_i(t - \tau_{ij}(t)) - \bar{r}_j(t)). \end{aligned} \quad (13)$$

Очевидно, що в рівняннях системи (13) можна виконати скорочення на відмінні від 0 маси  $m_i$  і  $m_j$  відповідно.

Побудову системи (13) можна було б вважати завершеною, якби було обґрунтовано існування функцій  $\tau_{ji}(t)$  і  $\tau_{ij}(t)$ , для яких виконуються співвідношення (11) і (12). Ця прогалина легко усувається за допомогою наступних нескладних міркувань.

Зафіксуємо довільний момент часу  $t$  і розглянемо випадок, коли для швидкостей  $\bar{v}_i(t)$  і  $\bar{v}_j(t)$  руху точок  $M_i$  і  $M_j$  виконується співвідношення

$$\max \{ |\bar{v}_i(s)|, |\bar{v}_j(s)| \} \leq v_0$$

для всіх моментів часу  $s$  із відрізка  $[t - T, t]$  (тут  $v_0$  і  $T$  — додатні скалярні величини, причому  $v_0$  значно менше за швидкість гравітації  $c$ ) і

$$cT > v_0 T + |\bar{r}_j(t) - \bar{r}_i(t)|. \quad (14)$$

Тоді для неперервної на відрізку  $[0, T]$  функції  $g(\tau) = c\tau - |\bar{r}_j(t - \tau) - \bar{r}_i(t)|$  з урахуванням (14) виконуються співвідношення

$$\begin{aligned} g(0) &< 0, \\ g(T) &= cT - |\bar{r}_j(t - T) - \bar{r}_i(t)| \geq \\ &\geq cT - |\bar{r}_j(t - T) - \bar{r}_j(t)| - |\bar{r}_j(t) - \bar{r}_i(t)| \geq \\ &\geq cT - v_0 T - |\bar{r}_j(t) - \bar{r}_i(t)| > 0. \end{aligned}$$

Тому на підставі теореми Больцано–Коші (див. [26, с. 168]) існує така точка  $\tau^* \in (0, T)$ , що  $g(\tau^*) = 0$ , тобто  $c\tau^* = |\bar{r}_j(t - \tau^*) - \bar{r}_i(t)|$ . Така точка на проміжку  $(0, T)$  єдина, оскільки на цьому проміжку  $\frac{g(\tau)}{d\tau} > 0$ . Очевидно, що  $\tau^*$  залежить від  $t$ .

Отже, існування функції  $\tau_{ji}(t)$  обґрунтовано.

Аналогічно обґрунтовується існування функції  $\tau_{ij}(t)$ .

Зазначимо, що завдяки теоремам про неявну функцію (див. [26, с. 449–453]), застосованим до (11) і (12), функції  $\tau_{ji}(t)$  і  $\tau_{ij}(t)$  є диференційовними і, отже, неперервними.

**4. Модель Сонячної системи, що враховує швидкість гравітації.** У подальшому будемо враховувати скінченну швидкість гравітації.

Завдяки розглянутому в п. 3 принципу запізнювання гравітаційного поля рух системи матеріальних точок  $M_0, M_1, \dots, M_n$  з масами  $m_0, m_1, \dots, m_n$  по відношенню до нерухомої прямокутної системи координат буде описуватися системою диференціальних рівнянь із відхилювальним аргументом

$$m_i \frac{d^2 \bar{r}_i(t)}{dt^2} = \sum_{j \in \{0,1,\dots,n\} \setminus \{i\}} G \frac{m_i m_j}{|\bar{r}_j(t - \tau_{ji}(t)) - \bar{r}_i(t)|^3} \times \\ \times (\bar{r}_j(t - \tau_{ji}(t)) - \bar{r}_i(t)) + \bar{F}_i(t), \quad i = \overline{0, n}, \quad (15)$$

де функція  $\tau_{ji}(t)$  задовольняє співвідношення (11), а  $\bar{F}_i(t)$  — сила, що й у системі (4). Тут

$$G \frac{m_i m_j}{|\bar{r}_j(t - \tau_{ji}(t)) - \bar{r}_i(t)|^3} (\bar{r}_j(t - \tau_{ji}(t)) - \bar{r}_i(t))$$

— сила тяжіння, зумовлена дією (притягуванням) точки  $M_i$  точкою  $M_j$  (на підставі закону всесвітнього тяжіння й урахування запізнення  $\tau_{ji}(t)$  гравітації).

Із рівняннями з відхилювальним аргументом можна ознайомитись в [1–11].

Система (15), очевидно, описує рух матеріальних точок  $M_0, M_1, \dots, M_n$  краще, ніж система (4), оскільки враховує швидкість гравітації.

Для повного опису руху матеріальних точок  $M_0, M_1, \dots, M_n$  також потрібно використовувати для системи (15) додаткові умови, що є складнішими, ніж аналогічні умови (2) і (3) у випадку системи (1).

Розглянемо дві задачі, використавши функції  $\tau_j(t) = \max_{i=\overline{0,n}, i \neq j} \tau_{ji}(t)$ ,  $j = \overline{0, n}$ .

*Задача 1.* Зафіксуємо довільні момент часу  $t_0$  і неперервні на відрізках  $[t_0 - \tau_i(t_0), t_0]$ ,  $i = \overline{0, n}$ , векторні функції  $\bar{\varphi}_{0,i}(s)$  і  $\bar{\varphi}_{1,i}(s)$ ,  $i = \overline{0, n}$ , відповідно. Потрібно знайти розв'язки  $\bar{r}_i(t)$ ,  $i = \overline{0, n}$ , системи (15), що задовольняють початкові умови

$$\bar{r}_i(s) = \bar{\varphi}_{0,i}(s), \quad \frac{d\bar{r}_i(s)}{ds} = \bar{\varphi}_{1,i}(s), \quad s \in [t_0 - \tau_i(t_0), t_0], \quad i = \overline{0, n}. \quad (16)$$

*Задача 2.* Нехай  $t_1$  і  $t_2$  — довільні моменти часу, для яких  $t_1 < t_2 - \tau_{ji}(t_2)$  для всіх  $i = \overline{0, n}$ ,  $j = \overline{0, n}$  і  $i \neq j$ . Розглянемо двічі неперервно диференційовні на відрізках  $[t_1 - \tau_i(t_1), t_1]$  і  $[t_2 - \tau_i(t_2), t_2]$ ,  $i = \overline{0, n}$ , векторні функції  $\bar{\psi}_{1,i}(s)$  і  $\bar{\psi}_{2,i}(s)$ ,  $i = \overline{0, n}$ , відповідно. Потрібно знайти розв'язки  $\bar{r}_i(t)$ ,  $i = \overline{0, n}$ , системи (15), що задовольняють умови

$$\bar{r}_i(s_1) = \bar{\psi}_{1,i}(s_1), \quad s_1 \in [t_1 - \tau_i(t_1), t_1], \quad (17)$$

$$\bar{r}_i(s_2) = \bar{\psi}_{2,i}(s_2), \quad s_2 \in [t_2 - \tau_i(t_2), t_2],$$

$$i = \overline{0, n}.$$

*Систему (15) разом з умовами (16) або (17) при  $n = 9$  можна розглядати як математичну модель Сонячної системи, що враховує скінченну швидкість гравітації.*

Задачі знаходження розв'язків системи (15), що задовольняють умови (16) або (17), можна використовувати, наприклад, при виведенні на орбіти планет Сонячної системи штучних об'єктів або при визначенні орбіт небесних тіл Сонячної системи (наприклад, астероїдів) за даними їх позиційних спостережень.

Очевидно, що досліджувати систему (15) з умовами (16) або (17) важче, ніж систему (4) з умовами (2) або (3). Не зважаючи на це, у подальшому завдяки наявності в системі (15) відхилень аргумента, причиною яких є запізнювання гравітації, ми отримуємо нові властивості руху матеріальних точок цієї системи.



**5. Оцінки для запізнювань  $\tau_{0i}(t)$  в системі (15) при  $n = 9$ .** У системі рівнянь (15) залежні від часу  $t$  відхилення аргументу  $\tau_{ji}(t)$ ,  $i = \overline{0, n}$ ,  $j = \overline{0, n}$ ,  $i \neq j$ , при  $n = 9$  можуть набувати досить великих значень. Згідно з (11) і (12) відхилення  $\tau_{ji}(t)$  залежить як від відстані між точками  $M_i$  і  $M_j$ , так і від швидкостей руху цих точок.

Наведемо нижні та верхні оцінки для  $\tau_{01}(t)$ ,  $\tau_{02}(t)$ ,  $\dots$ ,  $\tau_{09}(t)$ , що відповідають планетам Сонячної системи, врахувавши дані табл. 1.

Завдяки принципу запізнювання гравітаційного поля, (11) та еліптичності траєкторій планет Сонячної системи для  $\tau_{0i}(t)$ ,  $i = \overline{1, 9}$ , виконуються співвідношення

$$(1 - e_i)a_i - v\tau_{0i}(t) \leq \tau_{0i}(t)c \leq (1 + e_i)a_i + v\tau_{0i}(t), \quad i = \overline{1, 9},$$

де  $v$  — швидкість руху Сонця,  $a_i$  і  $e_i$  — велика піввісь і ексцентриситет  $i$ -ї планети (точки  $M_i$ ) відповідно (згідно з табл. 1). Звідси отримуємо

$$\frac{(1 - e_i)a_i}{c + v} \leq \tau_{0i}(t) \leq \frac{(1 + e_i)a_i}{c - v}, \quad i = \overline{1, 9}.$$

На підставі цих нерівностей, даних табл. 1, а також того, що Сонце рухається навколо ядра Галактики зі швидкістю близько  $v = 21700$  м/с,  $c = 299792458$  м/с і астрономічна одиниця а.о. = 1495977870691 м, отримуємо оцінки для  $\tau_{0i}(t)$ ,  $i = \overline{1, 9}$ .

Аналогічні оцінки для  $\tau_{ji}(t)$ ,  $i, j = \overline{1, 9}$ ,  $i \neq j$ , можна було б навести й у випадку, коли  $i \neq 0$ . Зазначимо, що, наприклад,

$$\max_t \tau_{09}(t) < \max_t \tau_{39}(t).$$

Тут  $\tau_{39}(t)$  — запізнювання, з яким гравітаційне поле Плутона приходить до Землі в момент часу  $t$ .

Із табл. 2 видно, що запізнювання  $\tau_{ji}(t)$ ,  $i, j = \overline{0, 9}$ ,  $i \neq j$ , у системі (15) при  $n = 9$  є достатньо великими.

*Знехтувати цими запізнюваннями (тобто замінити систему (15) системою (4)) при дослідженні динаміки Сонячної системи на великих проміжках часу не можна. Цей висновок впливає з властивостей розв'язків звичайних диференціальних рівнянь і диференціальних рівнянь із відхилювальним аргументом.*

Звернемо увагу на те, що математична модель Сонячної системи, подана з допомогою звичайних диференціальних рівнянь, є динамічною системою зі скінченновимірним фазовим простором, а подана з допомогою диференціальних рівнянь із запізнювальним аргументом, є динамічною системою з нескінченновимірним фазовим простором. Завдяки цьому не кожна властивість другої моделі характерна для першої моделі.

**6. Закон про зміщення притягувальної точки.** Як і в п. 3, розглянемо дві матеріальні точки  $M_i$  і  $M_j$  з масами  $m_i$  і  $m_j$ , рух яких здійснюється за законами Ньютона (припускаємо, що інші сили, крім сил тяжіння, на ці точки не діють). Рух точок описується радіусами-векторами  $\vec{r}_i(t)$  і  $\vec{r}_j(t)$ , що є розв'язками системи рівнянь (13). За принципом запізнювання гравітації (див. п. 3 і рис. 1) на точку  $M_i$  в момент часу  $t$  діє сила, направлена з точки  $B$  в точку  $C$ , що є притягувальною точкою для точки  $B$  в момент часу  $t$ , а не точка  $A$ , як у теорії Ньютона. Ця точка (точка  $C$ ) є кінцем радіуса-вектора  $\vec{r}_j(t - \tau_{ji}(t))$ .

Покажемо, що для вектора  $\overline{BC} = \vec{r}_j(t - \tau_{ji}(t)) - \vec{r}_i(t)$ , який вказує на розміщення притягувальної точки для точки  $B$  в момент часу  $t$ , справджується співвідношення

$$\overline{BC} \approx \overline{BA} - |\overline{BC}| c^{-1} \vec{v}_j(t), \quad (18)$$

Таблиця 2

Планета	Оцінки для $\tau_{0i}(t)$ , в сек
Меркурій	$153,32 < \tau_{01}(t) < 232,92$
Венера	$358,22 < \tau_{02}(t) < 363,34$
Земля	$490,48 < \tau_{03}(t) < 507,34$
Марс	$689,7 < \tau_{04}(t) < 831,27$
Юпітер	$2471,51 < \tau_{05}(t) < 2721,15$
Сатурн	$4493,12 < \tau_{06}(t) < 5026,94$
Уран	$9125,17 < \tau_{07}(t) < 10026,7$
Нептун	$14868,95 < \tau_{08}(t) < 15141,22$
Плутон	$14730,27 < \tau_{09}(t) < 24711,79$

де  $\overline{BA} = \bar{r}_j(t) - \bar{r}_i(t)$  і  $\bar{v}_j(t) = \frac{d\bar{r}_j(t)}{dt}$  (див. рис. 2), яке наближено дає зміщення

$$\overline{\Delta}_1 = - |\overline{BC}| c^{-1} \bar{v}_j(t) \quad (19)$$

притягувальної точки  $M_j$  для  $M_i$  (точки  $B$ ) у момент часу  $t$  (справжнє зміщення — це  $\overline{\Delta} = \overline{AC}$ ). Величину похибки  $\delta_1$  у співвідношенні (18) наведемо пізніше.

Зазначимо, що притягувальні точки, породжені рухом Сонця, для планет Сонячної системи розміщені досить далеко від центру Сонця (див. табл. 3).

Для отримання похибки  $\delta_1$  в (18) оцінимо величину  $|\overline{BC} - (\overline{BA} - |\overline{BC}| c^{-1} \bar{v}_j(t))|$ .

Оскільки функція  $\bar{r}_j(t)$  є неперервно диференційовною, то на підставі теореми про скінченні прирости (див. [27, с. 80–82])

$$|\bar{r}_j(t - \tau_{ji}(t)) - \bar{r}_j(t)| \leq \tau_{ji}(t) \sup_{s \in (t - \tau_{ji}(t), t)} |\bar{v}_j(s)|$$

$$|\bar{r}_j(t - \tau_{ji}(t)) - \bar{r}_j(t) + \tau_{ji}(t) \bar{v}_j(t)| \leq \tau_{ji}(t) \sup_{s \in (t - \tau_{ji}(t), t)} |\bar{v}_j(s) - \bar{v}_j(t)|.$$

Тому з урахуванням співвідношення (11)

$$\begin{aligned} & |\overline{BC} - (\overline{BA} - |\overline{BC}| c^{-1} \bar{v}_j(t))| = \\ & = |(\bar{r}_j(t - \tau_{ji}(t)) - \bar{r}_i(t)) - ((\bar{r}_j(t) - \bar{r}_i(t)) - \\ & \quad - |\bar{r}_j(t - \tau_{ji}(t)) - \bar{r}_i(t)| c^{-1} \bar{v}_j(t))| = \\ & = |(\bar{r}_j(t - \tau_{ji}(t)) - \bar{r}_j(t)) + |\bar{r}_j(t - \tau_{ji}(t)) - \bar{r}_i(t)| c^{-1} \bar{v}_j(t)| \leq \end{aligned}$$

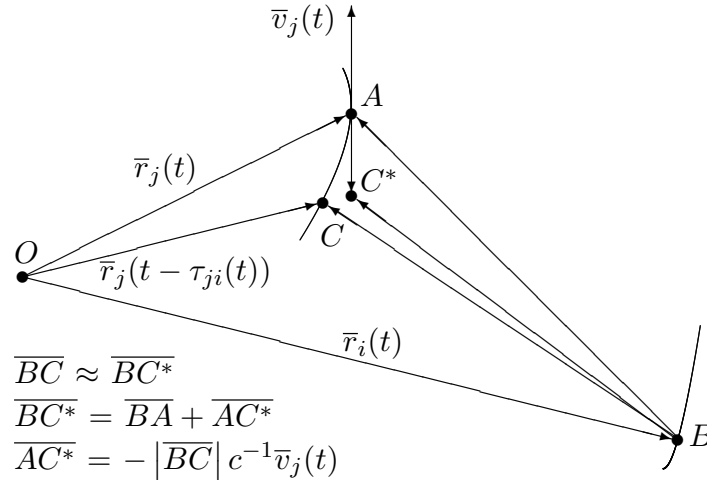


Рис. 2

$$\begin{aligned} &\leq |-\tau_{ji}(t)\bar{v}_j(t) + |\bar{r}_j(t - \tau_{ji}(t)) - \bar{r}_i(t)|c^{-1}\bar{v}_j(t)| + \tau_{ji}(t) \sup_{s \in (t - \tau_{ji}(t), t)} |\bar{v}_j(s) - \bar{v}_j(t)| = \\ &= | -|\bar{r}_j(t - \tau_{ji}(t)) - \bar{r}_i(t)|c^{-1}\bar{v}_j(t) + |\bar{r}_j(t - \tau_{ji}(t)) - \bar{r}_i(t)|c^{-1}\bar{v}_j(t) | + \\ &\quad + \tau_{ji}(t) \sup_{s \in (t - \tau_{ji}(t), t)} |\bar{v}_j(s) - \bar{v}_j(t)| = \tau_{ji}(t) \sup_{s \in (t - \tau_{ji}(t), t)} |\bar{v}_j(s) - \bar{v}_j(t)|. \end{aligned}$$

Отже, зміщення  $\overline{AC}$  притягувальної точки  $C$ , зумовлене рухом точки  $M_j$  зі швидкістю  $\bar{v}_j(t)$  в момент часу  $t$ , можна наблизити вектором  $\overline{\Delta}_1$  (див. (19)) і для похибки  $\delta_1$  такого наближення справджується співвідношення

$$\delta_1 \leq \tau_{ji}(t) \sup_{s \in (t - \tau_{ji}(t), t)} |\bar{v}_j(s) - \bar{v}_j(t)|. \quad (20)$$

Запишемо це співвідношення у зручному для застосувань вигляді. Застосувавши до правої частини (20) теорему про скінченні прирости, отримаємо

$$\delta_1 \leq \tau_{ji}^2(t) \sup_{t - \tau_{ji}(t) < s < t} \frac{Gm_i}{|\bar{r}_i(s - \tau_{ji}(s)) - \bar{r}_j(s)|^2}. \quad (21)$$

Оцінимо знизу  $|\bar{r}_i(s - \tau_{ij}(s)) - \bar{r}_j(s)|$  за допомогою  $|\bar{r}_j(s - \tau_{ji}(s)) - \bar{r}_i(s)|$ , використавши позначення

$$v_{i,s} = \sup_{s - \tau_{ij}(s) < \nu < s} |\bar{v}_i(\nu)| \quad \text{і} \quad v_{j,s} = \sup_{s - \tau_{ji}(s) < \nu < s} |\bar{v}_j(\nu)|.$$

Очевидно, що

$$\begin{aligned} &| |\bar{r}_i(s - \tau_{ij}(s)) - \bar{r}_j(s)| - |\bar{r}_j(s - \tau_{ji}(s)) - \bar{r}_i(s)| | \leq \\ &\leq |(\bar{r}_i(s - \tau_{ij}(s)) - \bar{r}_j(s)) + (\bar{r}_j(s - \tau_{ji}(s)) - \bar{r}_i(s))| \leq \\ &\leq |\bar{r}_i(s - \tau_{ij}(s)) - \bar{r}_i(s)| + |\bar{r}_j(s - \tau_{ji}(s)) - \bar{r}_j(s)| \leq \tau_{ij}(s)v_{i,s} + \tau_{ji}(s)v_{j,s} \end{aligned}$$

Таблиця 3

Планета	Зміщення $\Delta_1$ притягувальної точки, в км
Меркурій	41905,9227
Венера	78289,9227
Земля	108284,038
Марс	165024,873
Юпітер	563401,849
Сатурн	1032921,43
Уран	2077970,68
Нептун	3256101,02
Плутон	4279385,18

і

$$|\bar{r}_j(s - \tau_{ji}(s)) - \bar{r}_i(s)| + \tau_{ij}(s)v_{i,s} + \tau_{ji}(s)v_{j,s} \geq \tau_{ij}(s)c,$$

тому

$$\frac{|\bar{r}_j(s - \tau_{ji}(s)) - \bar{r}_i(s)| + \tau_{ji}(s)v_{j,s}}{c - v_{i,s}} = \tau_{ji}(s) \frac{c + v_{j,s}}{c - v_{i,s}} \geq \tau_{ij}(s). \quad (22)$$

Оскільки

$$|\bar{r}_i(s - \tau_{ij}(s)) - \bar{r}_i(s)| \geq |\bar{r}_j(s - \tau_{ji}(s)) - \bar{r}_i(s)| - \tau_{ij}(s)v_{i,s} - \tau_{ji}(s)v_{j,s},$$

то завдяки (22)

$$\begin{aligned} |\bar{r}_i(s - \tau_{ij}(s)) - \bar{r}_i(s)| &\geq |\bar{r}_j(s - \tau_{ji}(s)) - \bar{r}_i(s)| - \tau_{ij}(s)v_{i,s} - \frac{c + v_{j,s}}{c - v_{i,s}}v_{i,s} = \\ &= \tau_{ji}(s) \left( c - v_{j,s} - \frac{c + v_{j,s}}{c - v_{i,s}}v_{i,s} \right) = \tau_{ji}(s) \frac{c - v_{j,s} - 2v_{i,s}}{c - v_{i,s}}. \end{aligned}$$

Звідси на підставі (21) отримуємо остаточну оцінку для  $\delta_1$ :

$$\delta_1 \leq \sup_{t - \tau_{ji}(t) < s < t} \frac{\tau_{ji}^2(t) G m_i (c - v_{i,s})^2}{\tau_{ji}^2(s) c^2 (c - v_{j,s} - 2v_{i,s})^2},$$

за допомогою якої можна знаходити похибку формули (19) для кожної планети, якщо не враховувати вплив на неї та на Сонце інших складових Сонячної системи.

Зауважимо, що в табл. 3 наведено зміщення  $\Delta_1 = |\bar{\Delta}_1|$  для притягувальних точок планет Сонячної системи (з урахуванням даних табл. 1, співвідношення (19), швидкості руху Сонця та того, що відстань від Сонця до Землі наближено дорівнює 149597870,691 км). Порівнюючи дані цієї таблиці з радіусом Сонця, що наближено дорівнює 695217,26 км,

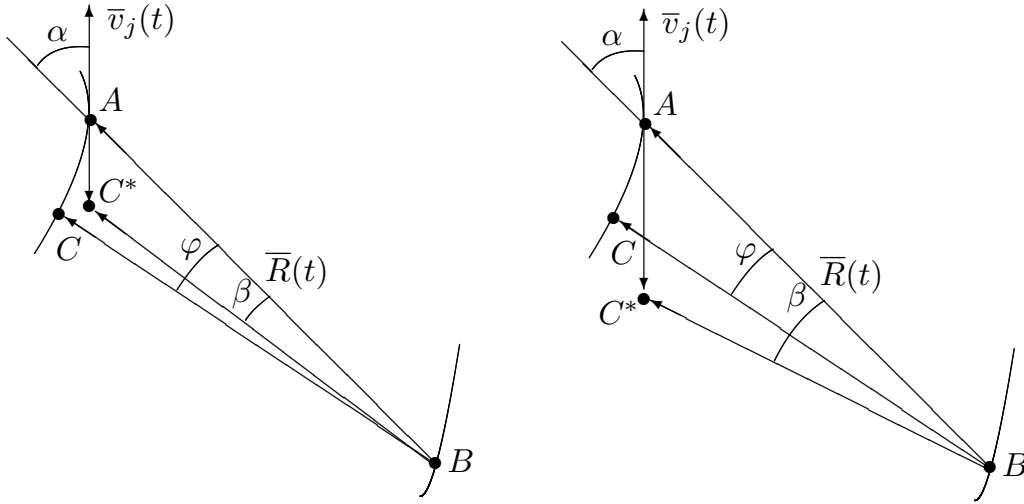


Рис. 3

приходимо до висновку, що для Сатурна, Урана, Нептуна та Плутона притягувальні точки знаходяться за межами Сонця.

Зазначимо, що всі складові Сонячної системи (планети, супутники планет, астероїди тощо) впливають на розміщення притягувальних точок планет Сонячної системи. Однак цей вплив не є суттєвим, оскільки маса Сонця значно більша за суму мас планет та інших складових цієї системи.

Відрізок  $AC$ , що відповідає зміщенню  $\overline{AC}$  притягувальної точки  $C$  в момент часу  $t$ , будемо називати *відрізком зміщення притягувальної точки в момент часу  $t$* .

З'ясуємо, під яким кутом видно цей відрізок із точки спостереження  $B$  (точки  $M_i$  в момент часу  $t$ ). Цей кут будемо називати *кутовим зміщенням притягувальної точки в момент часу  $t$*  або *кутовою відстанню між точкою  $M_j$  і притягувальною точкою  $C$  в момент часу  $t$* .

Із рис. 3 (випадки  $\varphi > \beta$  і  $\varphi < \beta$ ) та означень тригонометричних функцій випливає, що

$$|\overline{R}(t)| \sin \beta = |\overline{AC^*}| \sin(\alpha + \beta) = |\overline{R}(t)| c^{-1} |\overline{v}_j(t)| \sin(\alpha + \beta),$$

тобто

$$\sin \beta = c^{-1} |\overline{v}_j(t)| \sin(\alpha + \beta) = c^{-1} |\overline{v}_j(t)| (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta).$$

Звідси отримуємо

$$\beta = \operatorname{arctg} \frac{c^{-1} |\overline{v}_j(t)| \sin \alpha}{1 - c^{-1} |\overline{v}_j(t)| \cos \alpha}. \tag{23}$$

Зазначимо, що  $\alpha$  — кут між векторами  $\overline{v}_j(t)$  і  $\overline{R}(t) = \overline{r}_j(t) - \overline{r}_i(t)$ .

Враховуючи (20), а також те, що

$$|\overline{BC}| = |\overline{r}_j(t - \tau_{ji}(t)) - \overline{r}_i(t)| \geq |\overline{BA}| - |\overline{AC^*}| - |\overline{CC^*}| = |\overline{R}(t)| - |\overline{AC^*}| - |\overline{CC^*}|,$$

та використовуючи рис. 3, одержуємо

$$\sin |\varphi - \beta| \leq \frac{|\overline{CC^*}|}{|\overline{R}(t)| - |\overline{AC^*}| - |\overline{CC^*}|} \leq \delta_2, \tag{24}$$

де

$$\delta_2 = \frac{\tau_{ji}(t) \sup_{s \in (t-\tau_{ji}(t), t)} |\bar{v}_j(s) - \bar{v}_j(t)|}{|\bar{R}(t)| - |\bar{R}(t)| c^{-1} |\bar{v}_j(t)| - \tau_{ji}(t) \sup_{s \in (t-\tau_{ji}(t), t)} |\bar{v}_j(s) - \bar{v}_j(t)|}. \quad (25)$$

Оскільки

$$\beta - |\varphi - \beta| \leq \varphi \leq \beta + |\varphi - \beta|, \quad (26)$$

то на підставі (23) і (24), а також того, що величина  $\varepsilon = \sup_{s \in (t-\tau_{ji}(t), t)} |\bar{v}_j(s) - \bar{v}_j(t)|$  є достатньо малою (у випадку, коли  $\bar{v}_j(t)$  — швидкість руху Сонця,  $\varepsilon \approx 0,000723834$ ), та співвідношення

$$\max \{ |\arcsin x - x|, |\arctg x - x| \} \leq \frac{|x|^3}{3}, \quad |x| \leq \frac{1}{10}$$

(див. [28, с. 103]), отримуємо

$$|\varphi - \beta| \leq \arcsin \delta_2, \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \left| \arctg \frac{\mu}{1-\nu} - \mu \right| &\leq \left| \frac{\mu}{1-\nu} - \mu \right| + \left| \arctg \frac{\mu}{1-\nu} - \frac{\mu}{1-\nu} \right| \leq \\ &\leq \left| \frac{\mu}{1-|\nu|} - \mu \right| + \frac{1}{3} \left( \frac{\mu}{1-|\nu|} \right)^3 \leq \mu (|\nu| + |\nu|^2 + |\nu|^3 + \dots) + \\ &+ \frac{1}{3} \mu^3 (|1+\nu| + |\nu|^2 + |\nu|^3 + \dots)^3 \leq 2\varepsilon^2, \end{aligned} \quad (28)$$

де  $\mu = \frac{|\bar{v}_j(t)|}{c} \sin \alpha$  і  $\nu = \frac{|\bar{v}_j(t)|}{c} \cos \alpha$ .

Отже, на підставі співвідношень (23)–(28) для кутової відстані  $\varphi$  між точкою  $M_j$  і притягувальною точкою  $C$  в кожний момент часу  $t$  справджується співвідношення

$$\varphi = \frac{|\bar{v}_j(t)|}{c} \sin \alpha \quad (29)$$

з похибкою, що не перевищує  $\delta_3 = \arcsin \delta_2 + \frac{2v_{j,t}^2}{c^2}$ , де  $v_{j,t} = \sup_{t-\tau_{ji}(t) < \nu < t} |\bar{v}_j(\nu)|$ .

**7. Уточнення законів Кеплера.** Кінематична картина руху планет у класичній небесній механіці (див. [29, с. 138]) визначається трьома законами Кеплера:

1. Кожна планета рухається по еліпсу, в одному з фокусів якого знаходиться Сонце.
2. Площа, що описується радіусом-вектором планети, проведеним із Сонця, зростає пропорційно часу.
3. Квадрати періодів обертання планет навколо Сонця відносяться як куби великих півосей їх орбіт.

Уточнимо перші два закони з урахуванням скінченної швидкості гравітації.

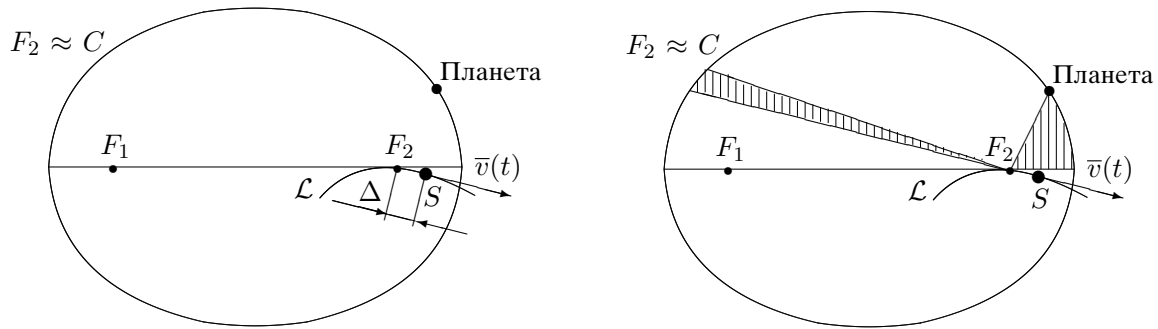


Рис. 4

**7.1. Узгодження перших двох законів Кеплера з принципом запізнювання гравітаційного поля.** Притягувальною точкою для кожної планети, згідно з викладеним у п. 3 є не центр Сонця, а інша точка простору (точка  $C$ ). Також зазначимо, що відстань між центром Сонця та точкою  $C$  не є сталою. Ці властивості важко було помітити експериментально при спостереженнях за рухом планет, астероїдів та штучних об'єктів завдяки малій кутовій зміщенню  $\varphi$  притягувальних точок (у випадку, коли точкою  $A$  є центром Сонця,  $\varphi \approx \varphi_{\max} \sin \alpha$  (за формулою (29)), де  $\varphi_{\max} = 0,7238340887 \cdot 10^{-3}$ ).

Замість перших двох законів Кеплера справджуються наступні два твердження.

1\*. *Кожна планета рухається навколо притягувальної точки (точки  $C$ ), що не збігається з центром Сонця. Гравітаційне поле, породжене Сонцем і планетою, можна так збурити (збурення досить мале (у випадку Сонця і Землі відношення величини збурення до величини сили тяжіння є величиною, меншою  $1,44864811 \cdot 10^{-3}$ )), що планета в новому силовому полі рухатиметься по еліпсу, в одному з фокусів якого знаходиться не центр Сонця, а точка  $F_2$ , близька до притягувальної точки  $C$  (див. рис. 4, де  $F_1$  і  $F_2$  — фокуси еліпса,  $S$  — центр Сонця,  $\bar{v}(t)$  — швидкість руху Сонця в момент часу  $t$ ,  $\mathcal{L}$  — частина орбіти Сонця,  $\Delta$  — відстань між точками  $F_2$  і  $S$  ( $\Delta \approx \Delta_1$ )).* Зауважимо, що завдяки малому збуренню гравітаційного поля і великій масі Сонця траєкторія руху Сонця і координати притягувальної точки для планети мало зміняться; отже,  $F_2 \approx C$ .

2\*. *Гравітаційне поле, породжене Сонцем і планетою, можна так збурити (збурення таке, як і в 1\*), що площа, яка описується радіусом-вектором планети, проведеним не з центру Сонця, а з точки  $F_2$ , близької до притягувальної точки  $C$ , зростає пропорційно часу (див. рис. 4).*

Зазначимо, що у випадку класичної моделі Сонячної системи центр Сонця є спільним фокусом для всіх еліптичних орбіт планет. Однак за принципом запізнювання гравітаційного поля *кожна планета рухається навколо „своїх” притягувальної точки, що не збігається з центром Сонця, і ці точки попарно не збігаються між собою* (див. табл. 3, де наведено зміщення притягувальних точок планет відносно центру Сонця).

Далі наведемо обґрунтування тверджень 1\* і 2\*. Це зробимо за допомогою наступних чотирьох кроків (пп. 7.2–7.5).

**7.2. Побудова рівняння руху матеріальної точки навколо притягувальної точки, породженої іншою матеріальною точкою.** Розглянемо задачу про рух двох точок  $M_0$  і  $M_1$  з масами  $m_0$  і  $m_1$  з урахуванням швидкості гравітації. На підставі принципу запізнювання гравітаційного поля рух точок  $M_0$  і  $M_1$  описується системою двох диференціальних рівнянь із

відхилювальним аргументом

$$\begin{aligned}\frac{d^2\bar{r}_0(t)}{dt^2} &= \frac{Gm_1}{|\bar{r}_1(t - \tau_{10}(t)) - \bar{r}_0(t)|^3} (\bar{r}_1(t - \tau_{10}(t)) - \bar{r}_0(t)), \\ \frac{d^2\bar{r}_1(t)}{dt^2} &= \frac{Gm_0}{|\bar{r}_0(t - \tau_{01}(t)) - \bar{r}_1(t)|^3} (\bar{r}_0(t - \tau_{01}(t)) - \bar{r}_1(t)),\end{aligned}\quad (30)$$

що аналогічна системі (13), де запізнювання  $\tau_{10}(t)$  і  $\tau_{01}(t)$  задовольняють співвідношення

$$c\tau_{10}(t) = |\bar{R}_{10}(t)| \quad \text{і} \quad c\tau_{01}(t) = |\bar{R}_{01}(t)|, \quad (31)$$

в яких  $\bar{R}_{10}(t) = \bar{r}_0(t) - \bar{r}_1(t - \tau_{10}(t))$  і  $\bar{R}_{01}(t) = \bar{r}_1(t) - \bar{r}_0(t - \tau_{01}(t))$ .

Перейдемо до рівняння руху точки  $M_1$  (точки  $B$ ) відносно притягувальної точки  $C$  (див. рис. 1), тобто до рівняння відносно векторної функції  $\bar{R}_{01}(t)$ .

Враховуючи очевидні співвідношення

$$\frac{d\bar{R}_{01}(t)}{dt} = \frac{d\bar{r}_1(t)}{dt} - \left(1 - \frac{d\tau_{01}(t)}{dt}\right) \frac{d\bar{r}_0(s)}{ds} \Big|_{s=t-\tau_{01}(t)}$$

і

$$\begin{aligned}\frac{d^2\bar{R}_{01}(t)}{dt^2} &= \frac{d^2\bar{r}_1(t)}{dt^2} + \frac{d^2\tau_{01}(t)}{dt^2} \frac{d\bar{r}_0(s)}{ds} \Big|_{s=t-\tau_{01}(t)} - \\ &\quad - \left(1 - \frac{d\tau_{01}(t)}{dt}\right)^2 \frac{d^2\bar{r}_0(s)}{ds^2} \Big|_{s=t-\tau_{01}(t)},\end{aligned}$$

отримуємо, що на підставі рівнянь системи (30) та того, що  $\frac{d\bar{r}_0(s)}{ds} \Big|_{s=t-\tau_{01}(t)}$  — швидкість  $\bar{v}_0(t - \tau_{01}(t))$  руху точки  $M_0$  у момент часу  $t - \tau_{01}(t)$ ,

$$\frac{d^2\bar{R}_{01}(t)}{dt^2} = -\frac{G(m_0 + m_1)}{|\bar{R}_{01}(t)|^3} \bar{R}_{01}(t) + \bar{\Omega}_{01,1}(t) + \bar{\Omega}_{01,2}(t), \quad (32)$$

де

$$\bar{\Omega}_{01,1}(t) = \frac{Gm_1}{|\bar{R}_{01}(t)|^3} \bar{R}_{01}(t) + \left(1 - \frac{d\tau_{01}(t)}{dt}\right)^2 \frac{Gm_1}{|\bar{R}_{10}(t - \tau_{01}(t))|^3} \bar{R}_{10}(t - \tau_{01}(t))$$

і

$$\bar{\Omega}_{01,2}(t) = \frac{d^2\tau_{01}(t)}{dt^2} \bar{v}_0(t - \tau_{01}(t)). \quad (33)$$

Співвідношення (32) буде рівнянням руху точки  $M_1$  навколо притягувальної точки, породженої точкою  $M_0$ .

**7.3. Оцінки норм значень функцій  $\bar{\Omega}_{01,1}(t)$  і  $\bar{\Omega}_{01,2}(t)$ .** Тут і далі норма вектора — це його евклідова довжина. Використаємо співвідношення, що отримуються з (31):

$$c \frac{d\tau_{01}(t)}{dt} = \frac{(\bar{R}_{01}(t), \dot{\bar{R}}_{01}(t))}{|\bar{R}_{01}(t)|},$$



$$c \frac{d^2 \tau_{01}(t)}{dt^2} = \frac{\left( \dot{\bar{R}}_{01}(t), \dot{\bar{R}}_{01}(t) \right) + \left( \bar{R}_{01}(t), \ddot{\bar{R}}_{01}(t) \right) - \left( \bar{R}_{01}(t), \dot{\bar{R}}_{01}(t) \right)^2}{|\bar{R}_{01}(t)|} - \frac{\left( \bar{R}_{01}(t), \dot{\bar{R}}_{01}(t) \right)^2}{|\bar{R}_{01}(t)|^3},$$

де

$$\dot{\bar{R}}_{01}(t) = \frac{d\bar{R}_{01}(t)}{dt}, \quad \ddot{\bar{R}}_{01}(t) = \frac{d^2\bar{R}_{01}(t)}{dt^2}$$

і  $(\bar{a}, \bar{b})$  — скалярний добуток векторів  $\bar{a}$  і  $\bar{b}$ . Із цих співвідношень та означення скалярного добутку двох векторів випливає, що

$$c \left| \frac{d\tau_{01}(t)}{dt} \right| \leq \left| \dot{\bar{R}}_{01}(t) \right| \quad (34)$$

і

$$c \left| \frac{d^2\tau_{01}(t)}{dt^2} \right| \leq \left| \ddot{\bar{R}}_{01}(t) \right| + \frac{\left| \dot{\bar{R}}_{01}(t) \right|^2}{|\bar{R}_{01}(t)|}. \quad (35)$$

Запишемо функцію  $\bar{\Omega}_{01,1}(t)$  у вигляді

$$\bar{\Omega}_{01,1}(t) = \bar{\Omega}_1(t) + \bar{\Omega}_2(t) + \bar{\Omega}_3(t), \quad (36)$$

де

$$\bar{\Omega}_1(t) = \frac{Gm_1}{|\bar{R}_{01}(t)|^3} \bar{R}_{01}(t) + \frac{Gm_1}{|\bar{R}_{10}(t - \tau_{01}(t))|^3} \bar{R}_{10}(t - \tau_{01}(t)), \quad (37)$$

$$\bar{\Omega}_2(t) = 2 \frac{d\tau_{01}(t)}{dt} \left( \frac{Gm_1}{|\bar{R}_{01}(t)|^3} \bar{R}_{01}(t) - \bar{\Omega}_1(t) \right), \quad (38)$$

$$\bar{\Omega}_3(t) = - \left( \frac{d\tau_{01}(t)}{dt} \right)^2 \left( \frac{Gm_1}{|\bar{R}_{01}(t)|^3} \bar{R}_{01}(t) - \bar{\Omega}_1(t) \right) = - \frac{d\tau_{01}(t)}{dt} \frac{\bar{\Omega}_2(t)}{2}. \quad (39)$$

Оцінимо норми значень функцій  $\bar{\Omega}_k(t)$ ,  $k = \overline{1, 3}$ , використавши зв'язок між функціями  $\bar{R}_{10}(t - \tau_{01}(t))$  і  $|\bar{R}_{10}(t - \tau_{01}(t))|$  та  $\bar{R}_{01}(t)$  і  $|\bar{R}_{01}(t)|$  відповідно.

Оскільки

$$\bar{R}_{01}(t) + \bar{R}_{10}(t - \tau_{01}(t)) = \bar{r}_1(t) - \bar{r}_1(t - \tau_{01}(t) - \tau_{10}(t - \tau_{01}(t))), \quad (40)$$

то  $\bar{R}_{10}(t - \tau_{01}(t))$  можна записати у вигляді

$$\bar{R}_{10}(t - \tau_{01}(t)) = -\bar{R}_{01}(t) + \bar{r}_{01}(t),$$

де  $\bar{r}_{01}(t) = \bar{R}_{01}(t) + \bar{R}_{10}(t - \tau_{01}(t))$ , і на підставі (40) та теореми про скінченні прирости

$$|\bar{r}_{01}(t)| \leq (\tau_{01}(t) + \tau_{10}(t - \tau_{01}(t))) \sup_{0 \leq u \leq \tau_{01}(t) + \tau_{10}(t - \tau_{01}(t))} |\bar{v}_1(t - u)|. \quad (41)$$

Використавши співвідношення

$$\frac{c + v_{0,t}}{c - v_{1,t}} \tau_{01}(t) \geq \tau_{10}(t),$$

що випливає з (22), завдяки (41) отримаємо

$$|\bar{r}_{01}(t)| \leq \left( \tau_{01}(t) + \frac{c + v_{0,t-\tau_{01}(t)}}{c - v_{1,t-\tau_{01}(t)}} \tau_{01}(t - \tau_{01}(t)) \right) \sup_{0 \leq u \leq \tau_{01}(t) + \tau_{10}(t - \tau_{01}(t))} |\bar{v}_1(t - u)|. \quad (42)$$

Тоді на підставі (37)

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}_1(t) &= \frac{Gm_1}{|\bar{R}_{01}(t)|^3} \bar{R}_{01}(t) - \frac{Gm_1}{|\bar{R}_{01}(t) - \bar{r}_{01}(t)|^3} (\bar{R}_{01}(t) - \bar{r}_{01}(t)) = \\ &= Gm_1 \left( \frac{1}{|\bar{R}_{01}(t)|^3} - \frac{1}{|\bar{R}_{01}(t) - \bar{r}_{01}(t)|^3} \right) \bar{R}_{01}(t) + \frac{Gm_1}{|\bar{R}_{01}(t) - \bar{r}_{01}(t)|^3} \bar{r}_{01}(t). \end{aligned}$$

Звідси випливає, що

$$\begin{aligned} |\bar{\Omega}_1(t)| &\leq Gm_1 \left| \frac{1}{|\bar{R}_{01}(t)|^2} - \frac{|\bar{R}_{01}(t)|}{|\bar{R}_{01}(t) - \bar{r}_{01}(t)|^3} \right| + \frac{Gm_1 |\bar{r}_{01}(t)|}{|\bar{R}_{01}(t) - \bar{r}_{01}(t)|^3} \leq \\ &\leq Gm_1 \left| \frac{1}{|\bar{R}_{01}(t)|^2} - \frac{|\bar{R}_{01}(t)|}{(|\bar{R}_{01}(t)| - |\bar{r}_{01}(t)|)^3} \right| + \frac{Gm_1 |\bar{r}_{01}(t)|}{(|\bar{R}_{01}(t)| - |\bar{r}_{01}(t)|)^3} \leq \\ &\leq \left( \left| 1 - \left( 1 - \frac{|\bar{r}_{01}(t)|}{|\bar{R}_{01}(t)|} \right)^{-3} \right| + \left( 1 - \frac{|\bar{r}_{01}(t)|}{|\bar{R}_{01}(t)|} \right)^{-3} \frac{|\bar{r}_{01}(t)|}{|\bar{R}_{01}(t)|} \right) \frac{Gm_1}{|\bar{R}_{01}(t)|^2} < \\ &< \left( 4 \frac{|\bar{r}_{01}(t)|}{|\bar{R}_{01}(t)|} + 10 \frac{|\bar{r}_{01}(t)|^2}{|\bar{R}_{01}(t)|^2} \right) \frac{Gm_1}{|\bar{R}_{01}(t)|^2}, \quad (43) \end{aligned}$$

де враховано співвідношення  $\frac{1}{a-b} - \frac{1}{a} \geq \frac{1}{a} - \frac{1}{a+b}$  ( $a > b > 0$ ), використано формулу Тейлора [26], а також те, що  $|\bar{r}_{01}(t)| \ll |\bar{R}_{01}(t)|$  (завдяки (41)).

Далі оцінимо функцію  $|\bar{\Omega}_2(t)|$ . Із співвідношень (38) та (34) випливає, що

$$\begin{aligned} |\bar{\Omega}_2(t)| &= \left| 2 \frac{d\tau_{01}(t)}{dt} \left( \frac{Gm_1}{|\bar{R}_{01}(t)|^3} \bar{R}_{01}(t) - \bar{\Omega}_1(t) \right) \right| \leq \\ &\leq 2 \frac{|\dot{\bar{R}}_{01}(t)|}{c} \left( \frac{Gm_1}{|\bar{R}_{01}(t)|^2} + |\bar{\Omega}_1(t)| \right). \quad (44) \end{aligned}$$

Тепер оцінимо  $|\bar{\Omega}_3(t)|$ . На підставі (34), (39) і (44) одержуємо

$$|\bar{\Omega}_3(t)| = \left| -\frac{d\tau_{01}(t)}{dt} \frac{\bar{\Omega}_2(t)}{2} \right| \leq \frac{|\dot{\bar{R}}_{01}(t)|^2}{c^2} \left( \frac{Gm_1}{|\bar{R}_{01}(t)|^2} + |\bar{\Omega}_1(t)| \right). \quad (45)$$

Нарешті оцінимо  $|\bar{\Omega}_{01,2}(t)|$ . На підставі (32), (33) та (35) отримуємо

$$\begin{aligned} |\bar{\Omega}_{01,2}(t)| &= \left| \frac{d^2\tau_{01}(t)}{dt^2} \bar{v}_0(t - \tau_{01}(t)) \right| \leq \\ &\leq \frac{|\bar{v}_0(t - \tau_{01}(t))|}{c} \left( \left| \ddot{\bar{R}}_{01}(t) \right| + \frac{|\dot{\bar{R}}_{01}(t)|^2}{|\bar{R}_{01}(t)|} \right) \leq \\ &\leq \frac{|\bar{v}_0(t - \tau_{01}(t))|}{c} \left( \left| -\frac{G(m_0 + m_1)}{|\bar{R}_{01}(t)|^3} \bar{R}_{01}(t) + \bar{\Omega}_{01,1}(t) + \bar{\Omega}_{01,2}(t) \right| + \frac{|\dot{\bar{R}}_{01}(t)|^2}{|\bar{R}_{01}(t)|} \right) \leq \\ &\leq \frac{|\bar{v}_0(t - \tau_{01}(t))|}{c} \left( \frac{G(m_0 + m_1)}{|\bar{R}_{01}(t)|^2} + |\bar{\Omega}_{01,1}(t)| + |\bar{\Omega}_{01,2}(t)| + \frac{|\dot{\bar{R}}_{01}(t)|^2}{|\bar{R}_{01}(t)|} \right). \end{aligned}$$

Отже,

$$|\bar{\Omega}_{01,2}(t)| \leq \frac{|\bar{v}_0(t - \tau_{01}(t))|}{c - |\bar{v}_0(t - \tau_{01}(t))|} \left( \frac{G(m_0 + m_1)}{|\bar{R}_{01}(t)|^2} + |\bar{\Omega}_{01,1}(t)| + \frac{|\dot{\bar{R}}_{01}(t)|^2}{|\bar{R}_{01}(t)|} \right). \quad (46)$$

Остаточні оцінки для  $|\bar{\Omega}_k(t)|$ ,  $k = \bar{1}, \bar{3}$ , та  $|\bar{\Omega}_{01,2}(t)|$  з використанням (42) наведемо пізніше у випадку, коли в якості  $M_0$  і  $M_1$  будуть використані центри Сонця та Землі відповідно.

**7.4. Порівняння норм значень функції  $\bar{\Omega}_{01,1}(t) + \bar{\Omega}_{01,1}(t)$  з нормою першого доданка правої частини (32).** Будемо вважати, що точка  $M_0$  є центром Сонця, а точка  $M_1$  — центром Землі. Використаємо деяку допоміжну інформацію про Сонце та Землю.

Спочатку використаємо співвідношення (42), а також те, що довжини  $a$  і  $b$  малої і великої півосей еліпса пов'язані співвідношенням  $b = a\sqrt{1 - e^2}$ , де  $e$  — ексцентриситет еліпса (для орбіти Землі (див. табл. 1)  $e = 0,0017$ ). Тоді отримуємо, що в даному випадку

$$b \approx 0,99999855 a. \quad (47)$$

На підставі співвідношення (47) та співвідношень (19), (20) відстань  $|\bar{R}_{01}(t)|$  від Землі до притягувальної точки (точки  $C$  на рис. 2) в усі моменти руху Землі навколо Сонця мало відрізняється від однієї астрономічної одиниці (а.о. = 149597870691 м). Тому у подальшому для спрощення отримання оцінки для  $|\bar{\Omega}_{01,1}(t) + \bar{\Omega}_{01,1}(t)|$  будемо вважати, що  $|\bar{R}_{01}(t)| \approx$  а.о. Враховуючи, що Сонце навколо ядра Галактики рухається зі швидкістю  $|\bar{v}_0(t)| \approx 2,17 \cdot 10^5$  м/с, а Земля навколо Сонця — зі швидкістю близько 29783 м/с, можна вважати, що в усі моменти часу швидкість  $|\bar{v}_1(t)|$  руху Землі навколо Сонця у співвідношенні (41) не більша ніж  $2,17 \cdot 10^5$  м/с + 29783 м/с =  $2,46783 \cdot 10^5$  м/с.

На підставі цих припущень, (42) та того, що  $c = 299792458$  м/с і гравітаційне поле проходить шлях довжиною в одну астрономічну одиницю за 8,32 хв., отримуємо

$$\frac{|\bar{r}_{01}(t)|}{|\bar{R}_{01}(t)|} \leq \left( \tau_{01}(t) + \frac{c + v_{0,t-\tau_{01}(t)}}{c - v_{1,t-\tau_{01}(t)}} \tau_{01}(t - \tau_{01}(t)) \right) \frac{\sup_{0 \leq u \leq \tau_{01}(t) + \tau_{10}(t - \tau_{01}(t))} |\bar{v}_1(t - u)|}{|\bar{R}_{01}(t)|} \leq$$

$$\leq \left( 8,32 \cdot 60 + \frac{299792458 + 217000}{299792458 - 246783} \cdot 8,32 \cdot 60 \right) \times \\ \times \frac{246783}{149597870691} < 1,648359933 \cdot 10^{-3}.$$

Тому завдяки (43)

$$|\bar{\Omega}_1(t)| < \left( 4 \frac{|\bar{r}_{01}(t)|}{|\bar{R}_{01}(t)|} + 10 \frac{|\bar{r}_{01}(t)|^2}{|\bar{R}_{01}(t)|^2} \right) \frac{Gm_1}{|\bar{R}_{01}(t)|^2} < \\ < \left( 4 \cdot 1,648359933 \cdot 10^{-3} + 10 \cdot (1,648359933 \cdot 10^{-3})^2 \right) \frac{Gm_1}{|\bar{R}_{01}(t)|^2} < \\ < (6,593439732 \cdot 10^{-3} + 2,71709469 \cdot 10^{-5}) \frac{Gm_1}{|\bar{R}_{01}(t)|^2} < \\ < 6,620610679 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{Gm_1}{|\bar{R}_{01}(t)|^2}. \quad (48)$$

Далі використаємо співвідношення (44). Вважаючи, що швидкість  $\left| \dot{\bar{R}}_{01}(t) \right|$  руху Землі навколо Сонця в момент часу  $t$  не більша 29783 м/с, і враховуючи, що

$$\frac{\left| \dot{\bar{R}}_{01}(t) \right|}{c} \leq \frac{29783}{299792458} < 0,993453945 \cdot 10^{-4}, \quad (49)$$

на підставі (44) та (48) одержуємо

$$|\bar{\Omega}_2(t)| \leq 2 \frac{\left| \dot{\bar{R}}_{01}(t) \right|}{c} \left( \frac{Gm_1}{|\bar{R}_{01}(t)|^2} + |\bar{\Omega}_1(t)| \right) < \\ < 2 \cdot 0,993453945 \cdot 10^{-4} \times \\ \times \left( \frac{Gm_1}{|\bar{R}_{01}(t)|^2} + 6,620610679 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{Gm_1}{|\bar{R}_{01}(t)|^2} \right) < \\ < 2,000624336 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{Gm_1}{|\bar{R}_{01}(t)|^2}. \quad (50)$$

Далі, використовуючи співвідношення (45), (48) і (49), маємо

$$|\bar{\Omega}_3(t)| \leq \frac{\left| \dot{\bar{R}}_{01}(t) \right|^2}{c^2} \left( \frac{Gm_1}{|\bar{R}_{01}(t)|^2} + |\bar{\Omega}_1(t)| \right) < \\ < (0,993453945 \cdot 10^{-4})^2 \left( \frac{Gm_1}{|\bar{R}_{01}(t)|^2} + 6,620610679 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{Gm_1}{|\bar{R}_{01}(t)|^2} \right) <$$

$$< 0,99376407 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{Gm_1}{|\bar{R}_{01}(t)|^2}. \quad (51)$$

Отже, на підставі (36), (48), (50) і (51) та того, що маса  $m_0$  Сонця в 332958 разів більша за масу  $m_1$  Землі, отримуємо

$$\begin{aligned} |\bar{\Omega}_{01,1}(t)| &< (6,620610679 \cdot 10^{-3} + 2,000624336 \cdot 10^{-4} + 0,99376407 \cdot 10^{-8}) \frac{Gm_1}{|\bar{R}_{01}(t)|^2} < \\ &< 6,820683051 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{Gm_1}{|\bar{R}_{01}(t)|^2} = 6,820683051 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{m_1}{m_0 + m_1} \frac{G(m_0 + m_1)}{|\bar{R}_{01}(t)|^2} = \\ &= \frac{6,820683051 \cdot 10^{-3}}{332959} \frac{G(m_0 + m_1)}{|\bar{R}_{01}(t)|^2} < 2,048505387 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{G(m_0 + m_1)}{|\bar{R}_{01}(t)|^2}. \end{aligned} \quad (52)$$

Нарешті оцінимо  $|\bar{\Omega}_{01,2}(t)|$ . Використаємо нерівності (46), (52) та те, що  $G = 6,67408 \cdot 10^{-11} \text{ кг}^{-1} \text{ м}^3 \text{ с}^{-2}$  і  $m_1 = 5,97219 \cdot 10^{24} \text{ кг}$ , а також співвідношення

$$\begin{aligned} \frac{|\dot{\bar{R}}_{01}(t)|^2}{|\bar{R}_{01}(t)|} &= \frac{|\bar{R}_{01}(t)| \cdot |\dot{\bar{R}}_{01}(t)|^2}{G(m_0 + m_1)} \cdot \frac{G(m_0 + m_1)}{|\bar{R}_{01}(t)|^2} = \\ &= \frac{149597870691 \cdot 29783^2}{6,67408 \cdot 10^{-11} \cdot 332959 \cdot 5,97219 \cdot 10^{24}} \frac{G(m_0 + m_1)}{|\bar{R}_{01}(t)|^2} = \\ &= 0,999876845 \cdot \frac{G(m_0 + m_1)}{|\bar{R}_{01}(t)|^2}. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що

$$\frac{|\bar{R}_{01}(t)| \cdot |\dot{\bar{R}}_{01}(t)|^2}{G(m_0 + m_1)} = 0,999876845. \quad (53)$$

У задачі двох тіл у випадку класичної механіки справджується співвідношення

$$\frac{|\bar{R}_{01}(t)| \cdot |\dot{\bar{R}}_{01}(t)|^2}{G(m_0 + m_1)} = 1 - e = 1 - 0,017 = 0,983$$

(див. [25, с. 144] і табл. 1). Розбіжність між 0,999876845 і 0,983 зумовлена тим, що при знаходженні значення лівої частини співвідношення (53) використовувались наближені значення для  $|\bar{R}_{01}(t)|$ ,  $|\dot{\bar{R}}_{01}(t)|$ ,  $G$ ,  $m_0$  і  $m_1$ , а також тим, що рух Землі навколо Сонця складніший, ніж у випадку класичної моделі, про що свідчать наведені вище дослідження. Отримаємо

$$|\bar{\Omega}_{01,2}(t)| \leq \frac{|\bar{v}_0(t - \tau_{01}(t))|}{c - |\bar{v}_0(t - \tau_{01}(t))|} \left( \frac{G(m_0 + m_1)}{|\bar{R}_{01}(t)|^2} + |\bar{\Omega}_{01,1}(t)| + \frac{|\dot{\bar{R}}_{01}(t)|^2}{|\bar{R}_{01}(t)|} \right) <$$

$$\begin{aligned}
&< \frac{217000}{299792458 - 217000} \left( \frac{G(m_0 + m_1)}{|\bar{R}_{01}(t)|^2} + \right. \\
&\quad \left. + 2,048505387 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{G(m_0 + m_1)}{|\bar{R}_{01}(t)|^2} + 0,999876845 \cdot \frac{G(m_0 + m_1)}{|\bar{R}_{01}(t)|^2} \right) < \\
&< 1,44862762 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{G(m_0 + m_1)}{|\bar{R}_{01}(t)|^2}. \tag{54}
\end{aligned}$$

Отже, завдяки (52) і (54)

$$\begin{aligned}
|\bar{\Omega}_{01,1}(t) + \bar{\Omega}_{01,2}(t)| &< (2,048505387 \cdot 10^{-8} + 1,44862762 \cdot 10^{-3}) \frac{G(m_0 + m_1)}{|\bar{R}_{01}(t)|^2} < \\
&< 1,44864811 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{G(m_0 + m_1)}{|\bar{R}_{01}(t)|^2}. \tag{55}
\end{aligned}$$

**7.5. Заключні висновки.** Отже, для другого та третього доданків правої частини співвідношення (32) виконується нерівність (55). Мализна коефіцієнта  $1,44864811 \cdot 10^{-3}$  у цій нерівності вказує на те, що істотне значення в правій частині (32) має перший доданок. Тому замість (32) можна розглядати більш просте співвідношення

$$\frac{d^2(\bar{r}_1(t) - \bar{r}_0(t - \tau_{01}(t)))}{dt^2} \approx - \frac{G(m_0 + m_1)}{|\bar{r}_1(t) - \bar{r}_0(t - \tau_{01}(t))|^3} (\bar{r}_1(t) - \bar{r}_0(t - \tau_{01}(t))), \tag{56}$$

що отримується з (32) при відповідному збуренні. Використаємо досліджену в [21] систему диференціальних рівнянь

$$\frac{d^2\bar{r}(t)}{dt^2} = - \frac{G(m_0 + m_1)}{|\bar{r}(t)|^3} \bar{r}(t), \tag{57}$$

аналогічну (56). Завдяки [21] розв'язки системи (57) є параметричними рівняннями алгебраїчних кривих другого порядку (зокрема, еліпсів при певних початкових умовах для  $\bar{r}(t)$ ) і, отже,

$$\bar{r}_1(t) - \bar{r}_0(t - \tau_{01}(t)) \approx \bar{r}(t),$$

що відповідає твердженню 1\*.

Викладемо наведені в попередньому абзаці міркування інакше.

Замість системи (30) розглянемо систему

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\bar{r}_0(t)}{dt^2} &= \frac{Gm_1}{|\bar{r}_1(t - \tau_{10}(t)) - \bar{r}_0(t)|^3} (\bar{r}_1(t - \tau_{10}(t)) - \bar{r}_0(t)), \\
\frac{d^2\bar{r}_1(t)}{dt^2} &= \frac{Gm_0}{|\bar{r}_0(t - \tau_{01}(t)) - \bar{r}_1(t)|^3} (\bar{r}_0(t - \tau_{01}(t)) - \bar{r}_1(t)) + \bar{F}_2(t)
\end{aligned}$$

(для простоти ми зберігаємо попередні позначення функцій), де

$$\bar{F}_2(t) = -\bar{\Omega}_{01,1}(t) - \bar{\Omega}_{01,2}(t).$$

Використовуючи проведені в пп. 7.2 дослідження, легко переконатися, що в цьому випадку

$$\begin{aligned} \frac{d^2 (\bar{r}_1(t) - \bar{r}_0(t - \tau_{01}(t)))}{dt^2} &= \\ &= - \frac{G(m_0 + m_1)}{|\bar{r}_1(t) - \bar{r}_0(t - \tau_{01}(t))|^3} (\bar{r}_1(t) - \bar{r}_0(t - \tau_{01}(t))). \end{aligned} \quad (58)$$

Завдяки [21] при виконанні певних початкових умов розв'язки  $\bar{r}_1(t) - \bar{r}_0(t - \tau_{01}(t))$  системи (58) є параметричними рівняннями еліпсів. Зазначимо, що для  $\bar{F}_2(t)$  виконується співвідношення (55).

Із наведених міркувань випливає твердження 1\* (у випадку руху Сонця і Землі).

Твердження 2\* є наслідком другого закону Кеплера та твердження 1\*.

**8. Можливі застосування побудованої моделі руху матеріальних точок.** Звернемо увагу лише на деякі можливі застосування математичної моделі руху матеріальних точок, що враховує швидкість гравітації.

1. Цю модель в першу чергу можна використовувати для опису руху планет. Система диференціальних рівнянь із відхилювальним аргументом (15) точніше описує динаміку Сонячної системи, ніж система диференціальних рівнянь (4), що не враховує скінченну швидкість гравітації. Для опису руху планет на великих проміжках часу краще використовувати систему (15), ніж систему (4). При кількісному описуванні руху планет не обійтись без потужної обчислювальної техніки. При цьому потрібно звертати увагу на точність даних про розміщення планет та їх швидкостей не в якийсь конкретний момент часу (як у класичній небесній механіці), а на проміжках часу (див. умови (16) і (17)), довжини яких можуть бути достатньо великими (наприклад, у випадку дослідження руху Землі або Плутона навколо Сонця (без урахування дії на них інших планет) довжини цих проміжків дорівнюють близько 8,32 хв. і 328,68 хв. відповідно).

Побудована теорія дасть змогу точніше описувати рух комет і передбачати такі явища, як затемнення планет, парад планет та ін.

2. Наведені в пп. 3 – 7 дослідження є важливими для спостережень за рухом астероїдів та передбачень про траєкторії їх руху, оскільки зіткнення астероїдів із планетами призводять до небажаних наслідків.

3. Побудована теорія полегшить розв'язання проблем переміщення штучних об'єктів у межах Сонячної системи, оскільки дасть змогу будувати точніші математичні моделі їх руху.

## Література

1. *Мышкис А. Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. – М.; Л.: Гостехиздат, 1951. – 255 с.
2. *Мышкис А. Д., Эльсгольц Л. Э.* Состояние и проблемы теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // *Успехи мат. наук.* – 1967. – 22, № 2. – С. 21 – 57.
3. *Мышкис А. Д.* О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // *Успехи мат. наук.* – 1977. – 32, № 2. – С. 173 – 202.
4. *Пинни Э.* Обыкновенные дифференциально-разностные уравнения. – М.: Изд-во иностр. лит., 1961. – 248 с.
5. *Беллман Р., Кук К. Л.* Дифференциально-разностные уравнения. – М.: Мир. 1967. – 548 с.
6. *Рубаник В. П.* Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. – М.: Наука, 1971. – 288 с.

7. Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – М.: Наука, 1971. – 296 с.
8. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1984. – 423 с.
9. Царьков Е. Ф. Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений. – Рига: Зинатне, 1986. – 288 с.
10. Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1991. – 280 с.
11. Слюсарчук В. Ю. Абсолютна стійкість динамічних систем із післядією. – Рівне: Вид-во Нац. ун-ту водн. госп-ва та природокористування, 2003. – 366 с.
12. Fomalont E. B., Kopeikin S. V. The measurement of the light deflection from Jupiter: experimental results // *Astrophys. J.* – 2003. – **598**. – P. 704–711.
13. Копейкин С. М., Фомалонт Э. Фундаментальный предел скорости гравитации и его измерение // *Земля и Вселенная*. – 2004. – № 3.
14. Мультион Ф. Введение в небесную механику. – М.; Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1935. – 480 с.
15. Пуанкаре А. Лекции по небесной механике. – М.: Наука, 1965. – 572 с.
16. Шази Ж. Теория относительности и небесная механика. Т. 1. – М.; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2011. – 260 с.
17. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы. – М.: Наука, 1978. – 456 с.
18. Арнольд В. И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // *Успехи мат. наук.* – 1963. – **18**, № 6. – С. 91–192.
19. Брумберг В. А. Релятивистская небесная механика. – М.: Наука, 1972. – 382 с.
20. Маркеев А. П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. – М.: Наука, 1978. – 312 с.
21. Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. Н. Математические аспекты классической и небесной механики. – М.: УРСС, 2002. – 414 с.
22. Зелдович Я. Б., Новиков И. Д. Теория тяготения и эволюция звезд. – М.: Наука, 1971. – 484 с.
23. Рябушко А. П. Движение тел в общей теории относительности. – Минск: Вышэйш. шк., 1979. – 240 с.
24. Kopeikin S., Efroimsky M., Kaplan G. *Relativistic celestial mechanics of the solar system*. – Wiley, 2011. – 892 p.
25. Цесевич В. П. Что и как наблюдать на небе. – М.: Наука, 1984. – 304 с.
26. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. – М.: Наука, 1966. – Т. 1. – 608 с.
27. Зорич В. А. Математический анализ. – М.: Наука, 1984. – 4. П. – 640 с.
28. Двайт Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. – М.: Наука, 1973. – 228 с.
29. Голубева О. В. Теоретическая механика. – М.: Высш. шк., 1968. – 488 с.

*Одержано 19.12.16,  
після доопрацювання — 01.11.17*