УДК 517.958:531–133

НЕКЕПЛЕРОВІСТЬ ТА НЕСТІЙКІСТЬ РУХУ ДВОХ ТІЛ, СПРИЧИНЕНІ СКІНЧЕННІСТЮ ШВИДКОСТІ ГРАВІТАЦІЇ

В. Ю. Слюсарчук

Нац. ун-т вод. госп-ва та природокористування
вул. Соборна, 11, Рівне, 33000, Україна
e-mail: V.E.Slyusarchuk@gmail.com

It is shown that the motion of two bodies taking into account a finite velocity of gravity is not carried out by Kepler's laws and this motion is unstable.

Показано, что движение двух тел з учетом конечной скорости гравитации не осуществляется по законам Кеплера и это движение не устойчиво.

1. Вступ. Дана стаття присвячена дослідженню руху двох тіл довільних мас під дією сил закону всесвітнього тяжіння з урахуванням скінченної швидкості гравітації.

Завдяки тому, що гравітаційний вплив одного тіла на інше не може відбуватися миттєво, а потрібен час, за який гравітаційне поле проходить відстань між цими тілами, то природним є те, що математичні моделі руху двох тіл мають бути системами рівнянь із післядією. Тому для дослідження таких систем найбільш прийнятним є математичний апарат, в основу якого покладено теорію диференціальних рівнянь із запізнювальним аргументом.

Використання таких рівнянь дало змогу встановити, що рух двох тіл у реальному просторі здійснюється не за законами Кеплера і цей рух нестійкий.

2. Задача двох тіл у класичній небесній механіці. З моменту відкриття І. Ньютоном (1643–1727) закону всесвітнього тяжіння, опублікованого в його знаменитих "Philosophiae Naturalis Principia mathematica" в 1687 р., для дослідження руху тіл використовувалися звичайні диференціальні рівняння, оскільки вважалося, що швидкість гравітації є нескінченною і гравітаційне поле поширюється миттєво від джерела, як би далеко від нього не знаходитися.

Задача двох тіл — найпростіша задача класичної небесної механіки. На підставі другого закону Ньютона та закону всесвітнього тяжіння диференціальні рівняння руху тіл цієї задачі в деякій нерухомій декартовій системі координат мають вигляд

$$\begin{cases} m_1\ddot{\vec{r}}_1(t) = -\dfrac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_2(t)-\vec{r}_1(t)|^3}\,(\vec{r}_1(t)-\vec{r}_2(t))\,, \\ m_2\ddot{\vec{r}}_2(t) = -\dfrac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_2(t)-\vec{r}_1(t)|^3}\,(\vec{r}_2(t)-\vec{r}_1(t))\,, \end{cases} \tag{1}$$

де G — гравітаційна стала, m_1 і m_1 — маси тіл і $|\vec{r}_2(t)-\vec{r}_1(t)|$ — евклідова довжина вектора $\vec{r}_2(t)-\vec{r}_1(t)$. Очевидно, що в рівняннях цієї системи можна зробити скорочення на m_1 і m_2 відповідно.

Якщо як невідомі замість $\vec{r}_1$ і $\vec{r}_2$ розглянути абсолютні координати ньютонового центра інерції (центра мас) системи тіл і відносні координати першого тіла відносно другого

$$\vec{r}_0 = \frac{m_1}{m_1+m_2}\,\vec{r}_1 + \frac{m_2}{m_1+m_2}\,\vec{r}_2, \qquad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2,$$

то система (1) розпадається на дві нескладні для дослідження системи

$$\ddot{\vec{r}}_0 = 0, \tag{2}$$

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{G(m_1+m_2)}{|\vec{r}|^3}\,\vec{r}. \tag{3}$$

Із (2) випливає, що центр інерції системи двох тіл рухається рівномірно та прямолінійно. Система (3) визначає відносний рух тіла маси m_1 відносно центрального тіла маси m_2. Дослідження цієї системи наведено в багатьох працях (див., наприклад, [1 – 3]).

Загальний розв'язок задачі двох тіл знайшов ще Ньютон. Він також надав розв'язку геометричної форми (траєкторіями руху одного тіла відносно другого та відносно центра маси є конічні перерізи).

3. Закони Кеплера. Кінематична картина руху тіл (зокрема, руху планет) у класичній небесній механіці [4, с. 138] визначається трьома законами Кеплера:

1. Кожна планета рухається по еліпсу, в одному з фокусів якого знаходиться Сонце.

2. Площа, що описується радіусом-вектором планети, проведеним із Сонця, зростає пропорційно до часу.

3. Квадрати періодів обертання планет навколо Сонця відносяться як куби великих півосей їхніх орбіт.

За допомогою цих законів Ньютон встановив закон всесвітнього тяжіння [3, с. 42].

Застосування законів Кеплера до дослідження руху небесних тіл, що враховує скінченну швидкість гравітації, призводить до деяких неточностей.

4. Принцип запізнювання гравітаційного поля та математична модель руху двох тіл із урахуванням скінченної швидкості гравітації. У реальному світі швидкість гравітації не може бути нескінченною, як у теорії Ньютона. Це твердження узгоджується з теорією відносності Ейнштейна, в якій постулюється, що швидкість гравітації дорівнює швидкості світла, та з дослідженнями С. М. Копейкіна та Е. Фомалонта про фундаментальну межу швидкості гравітації [5]. Використання цієї властивості гравітації дає змогу побудувати математичну модель руху двох тіл, що використовує не звичайні диференціальні рівняння, як у класичній небесній механіці, а диференціальні рівняння із запізнювальним аргументом, і встановити нові властивості руху цих тіл.

Пояснимо вплив запізнювання гравітаційного поля на прикладі взаємодії двох точок M_1 і M_2 з масами m_1 і m_2 відповідно. Рух цих точок будемо розглядати, використовуючи прямокутну систему координат $x,\ y,\ z$ з початком координат у точці O. Систему координат вважатимемо інерціальною. Положення точок M_1 і M_2 в момент часу t визначається їх радіусами-векторами $\vec{r}_i(t),\ i = \overline{1,2}$.

Якби швидкість гравітації була нескінченною, як у теорії Ньютона, тоді на підставі закону всесвітнього тяжіння в момент часу t точка M_2 притягувала б точку M_1 із силою

$$\vec{F}(t) = \frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_2(t)-\vec{r}_1(t)|^3}\,(\vec{r}_2(t)-\vec{r}_1(t)) \tag{4}$$

(напрямок цієї сили збігається з напрямком вектора $\vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t)$ [2, 3]).

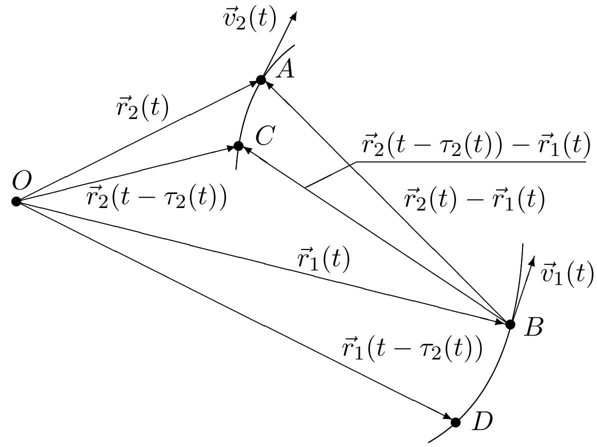

Рис. 1. Розташування точок M_1 і M_2 в моменти часу t і $t-\tau_2(t)$.

Однак, завдяки скінченній швидкості гравітації, на точку M_1 діє інша сила

$$\vec{F}_1(t)=\frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_2(t-\tau_2(t))-\vec{r}_1(t)|^3}\,(\vec{r}_2(t-\tau_2(t))-\vec{r}_1(t))\,. \tag{5}$$

Запізнення гравітації $\tau_2(t)$ в (5) визначається з рівності

$$c\tau_2(t)=|\vec{r}_2(t-\tau_2(t))-\vec{r}_1(t)|\,, \tag{6}$$

де c — швидкість гравітації. Справді (рис. 1), нехай точки M_2 і M_1 рухаються по відповідним траєкторіям, частини яких зображені на рис. 1, зі швидкостями $\vec{v}_2(t)=\dot{\vec{r}}_2(t)$ і $\vec{v}_1(t)=\dot{\vec{r}}_1(t)$ і в момент часу $t-\tau_2(t)$, де $\tau_2(t)$ задовольняє (6), знаходяться в точках C і D відповідно. За проміжок часу $[t-\tau_2(t),t]$ точка M_2 переміститься з точки C в точку A, а точка M_1 — з точки D в точку B. Цього проміжку часу достатньо, щоб гравітаційне поле зі швидкістю c поширилося з точки C в точку B. Отже, в момент часу t на точку B діє не сила (4), а сила (5).

Аналогічно, завдяки скінченній швидкості гравітації, на точку M_2 діє сила

$$\vec{F}_2(t)=\frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_1(t-\tau_1(t))-\vec{r}_2(t)|^3}\,(\vec{r}_1(t-\tau_1(t))-\vec{r}_2(t))\,. \tag{7}$$

Запізнення гравітації $\tau_1(t)$ в (7) визначається з рівності

$$c\tau_1(t)=|\vec{r}_1(t-\tau_1(t))-\vec{r}_2(t)|\,. \tag{8}$$

Існування функцій $\tau_2(t)$ і $\tau_1(t)$, що задовольняють співвідношення (6) і (7), показано в [6]. Згідно з теоремами про неявну функцію [7, с. 449 – 453] ці функції є неперервними та диференційовними.

З наведених міркувань із урахуванням другого закону Ньютона, закону всесвітнього тяжіння та (5), (7) одержуємо, що рух двох точок M_1 і M_2 з масами m_1 і m_2 відповідно описується системою рівнянь

$$\begin{cases} m_1\ddot{\vec{r}}_1(t)=\dfrac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_2(t-\tau_2(t))-\vec{r}_1(t)|^3}\,(\vec{r}_2(t-\tau_2(t))-\vec{r}_1(t))\,,\\ m_2\ddot{\vec{r}}_2(t)=\dfrac{Gm_2m_1}{|\vec{r}_1(t-\tau_1(t))-\vec{r}_2(t)|^3}\,(\vec{r}_1(t-\tau_1(t))-\vec{r}_2(t))\,. \end{cases} \tag{9}$$

Ця система є системою диференціальних рівнянь із запізнювальним аргументом (запізнення $\tau_2(t)$ і $\tau_1(t)$ залежать від розміщення точок M_1 і M_2 у просторі та від швидкості гравітації) і суттєво відрізняється від системи (1).

Елементи теорії диференціальних рівнянь із відхилювальним аргументом викладено в [8 – 11].

Здійснюючи в рівняннях системи (9) скорочення на відмінні від 0 маси m_1 і m_2, отримуємо

$$\begin{cases} \ddot{\vec{r}}_1(t) = \dfrac{Gm_2}{|\vec{r}_2(t-\tau_2(t)) - \vec{r}_1(t)|^3} \, (\vec{r}_2(t-\tau_2(t)) - \vec{r}_1(t)) \, , \\ \ddot{\vec{r}}_2(t) = \dfrac{Gm_1}{|\vec{r}_1(t-\tau_1(t)) - \vec{r}_2(t)|^3} \, (\vec{r}_1(t-\tau_1(t)) - \vec{r}_2(t)) \, . \end{cases} \tag{10}$$

Для повного опису руху точок M_1 і M_2 в системі (10) також потрібно використовувати додаткові початкові або крайові умови, як у наступних задачах.

Задача 1. Зафіксуємо довільні момент часу t_0 і неперервні на відрізках $[t_0 - \tau_i(t_0), t_0]$, $i = \overline{1,2}$, векторні функції $\vec{\varphi}_{0,i}(s)$ і $\vec{\varphi}_{1,i}(s)$, $i = \overline{1,2}$, відповідно. Потрібно знайти розв'язки $\vec{r}_i(t)$, $i = \overline{1,2}$, системи (10), що задовольняють початкові умови

$$\begin{cases} \vec{r}_i(s) = \vec{\varphi}_{0,i}(s), \quad s \in [t_0 - \tau_i(t_0), t_0], \\ \dot{\vec{r}}_i(s) = \vec{\varphi}_{1,i}(s), \quad s \in [t_0 - \tau_i(t_0), t_0], \end{cases} \qquad i = \overline{1,2}. \tag{11}$$

Задача 2. Нехай t_1 і t_2 — довільні моменти часу, для яких $t_1 < t_2 - \tau_i(t_2)$, для $i = \overline{1,2}$. Розглянемо двічі неперервно диференційовні на відрізках $[t_1 - \tau_i(t_1), t_1]$ і $[t_2 - \tau_i(t_2), t_2]$, $i = \overline{1,2}$, векторні функції $\vec{\psi}_{1,i}(s)$ і $\vec{\psi}_{2,i}(s)$, $i = \overline{1,2}$, відповідно. Потрібно знайти розв'язки $\vec{r}_i(t)$, $i = \overline{1,2}$, системи (10), що задовольняють умови

$$\begin{cases} \vec{r}_i(s_1) = \vec{\psi}_{1,i}(s_1), \quad s_1 \in [t_1 - \tau_i(t_1), t_1], \\ \vec{r}_i(s_2) = \vec{\psi}_{2,i}(s_2), \quad s_2 \in [t_2 - \tau_i(t_2), t_2], \end{cases} \qquad i = \overline{1,2}. \tag{12}$$

Систему рівнянь (6), (8) і (10) з умовами (11) або (12) можна розглядати як математичну модель руху двох тіл, що враховує скінченну швидкість гравітації.

Отже, для побудови математичної моделі руху двох тіл важливим є розглянутий вище *принцип запізнювання гравітаційного поля*. Він полягає в тому, що в момент часу t точка M_1 (точка B) притягується не до точки M_2 (точки A), а до точки C, що збігається з M_2 в момент часу $t - \tau_2(t)$, де $\tau_2(t)$ задовольняє (6). Сила, що діє на точку M_1, визначається формулою (5).

5. Деякі наслідки з принципу запізнювання гравітаційного поля й основна мета статті. Формулювання законів Кеплера у випадку небесної механіки, що враховує скінченну швидкість гравітації, вимагають уточнення.

Справді, завдяки принципу запізнювання гравітаційного поля при русі планети навколо Сонця притягувальною точкою для планети в момент часу t (момент t довільний) є не центр Сонця, як у першому законі Кеплера, а інша точка простору, в якій був центр Сонця в деякий момент часу $t - \tau(t)$, де $\tau(t)$ — запізнення, залежне від розміщення планети і Сонця, аналогічне запізненням $\tau_2(t)$ і $\tau_1(t)$, що задовольняють (6) і (8). Тому обертання планети в момент часу t здійснюється не навколо центра Сонця, а навколо точки, в якій був центр Сонця в момент часу $t - \tau(t)$.

Отже, *рух планет навколо Сонця не здійснюється за першим законом Кеплера*. На це звернено увагу автором ще в [6].

Нескладні розрахунки показують [6], що кожна планета рухається (обертається) навколо "своєї" притягувальної точки, що не збігається з центром Сонця, і ці точки попарно не співпадають між собою.

У зв'язку з цим важливим є проведення досліджень щодо застосовності законів Кеплера в некласичній небесній механіці.

Мета даної роботи — показати, що:

1. Рух двох тіл також не здійснюється за другим та третім законами Кеплера.

2. Для відстані $d(M_1, M_2)$ між двома точками M_1 і M_2 $\underline{\lim}_{t\to+\infty} d(M_1, M_2) = 0$ (тоді за скінченний проміжок часу відбувається зіткнення двох тіл ненульових розмірів) або $\overline{\lim}_{t\to+\infty} d(M_1, M_2) = +\infty$.

3. Траєкторії руху тіл нестійкі.

Обґрунтування цих тверджень наведемо в пунктах 7 – 11.

6. Закон про зростання секторної швидкості. Розглянемо одну важливу для подальшого викладу властивість руху матеріальних точок.

Використаємо систему рівнянь (10), що описує рух точок M_1 і M_2 з масами m_1 і m_2 з урахуванням скінченної швидкості гравітації. Положення цих точок визначається векторними функціями $\vec{r}_1(t)$ і $\vec{r}_2(t)$, а їх швидкості — функціями $\vec{v}_1(t) = \dot{\vec{r}}_1(t)$ і $\vec{v}_2(t) = \dot{\vec{r}}_2(t)$.

Будемо вважати, що траєкторії руху точок M_1 і M_2 знаходяться в деякій площині E.

З'ясуємо, як змінюється векторна функція $\vec{v}_\sigma(t) = \dfrac{1}{2}\,(\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)) \times \left(\dot{\vec{r}}_1(t) - \dot{\vec{r}}_2(t)\right)$, де $\times$ — векторний добуток відповідних векторів. Зазначимо, що ця функція є *секторною швидкістю руху точки* M_1 *відносно точки* M_2 *в момент часу* t і в класичній механіці $\vec{v}_\sigma(t) \equiv \vec{v}_\sigma(t_0)$ (секторна швидкість є сталою [4, с. 134]). Тут t_0 — довільний (зафіксований) момент часу.

Враховуючи властивості векторного добутку, на підставі рівнянь системи (10) одержуємо

$$
\begin{aligned}
2\,\frac{d\vec{v}_\sigma(t)}{dt} &= \left(\dot{\vec{r}}_1(t) - \dot{\vec{r}}_2(t)\right) \times \left(\dot{\vec{r}}_1(t) - \dot{\vec{r}}_2(t)\right) + (\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)) \times \left(\ddot{\vec{r}}_1(t) - \ddot{\vec{r}}_2(t)\right) = \\
&= (\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)) \times \left(\ddot{\vec{r}}_1(t) - \ddot{\vec{r}}_2(t)\right) = \\
&= (\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)) \times \left(\frac{Gm_2}{|\vec{r}_2(t-\tau_2(t)) - \vec{r}_1(t)|^3}\,(\vec{r}_2(t-\tau_2(t)) - \vec{r}_1(t)) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{Gm_1}{|\vec{r}_1(t-\tau_1(t)) - \vec{r}_2(t)|^3}\,(\vec{r}_1(t-\tau_1(t)) - \vec{r}_2(t))\right) = \\
&= (\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)) \times \\
&\quad \times \left(\frac{Gm_2}{|\vec{r}_2(t-\tau_2(t)) - \vec{r}_1(t)|^3}\,((\vec{r}_2(t-\tau_2(t)) - \vec{r}_2(t)) - (\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t))) - \right.
\end{aligned}
$$

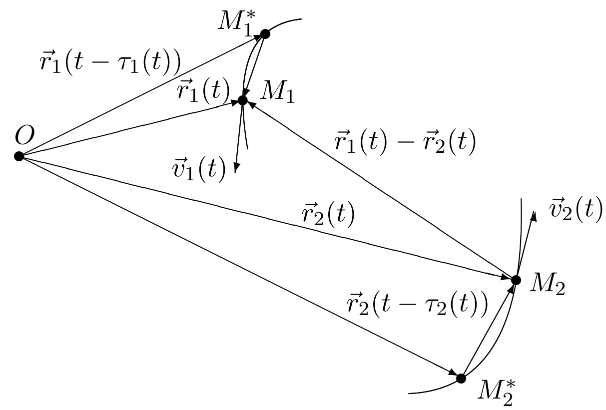

Рис. 2. Траєкторії руху точок M_1 і M_2 та швидкості руху цих точок.

$$-\ \frac{Gm_1}{|\vec{r}_1(t-\tau_1(t))-\vec{r}_2(t)|^3}\left((\vec{r}_1(t-\tau_1(t))-\vec{r}_1(t))+(\vec{r}_1(t)-\vec{r}_2(t))\right)\Bigg).$$

Отже,

$$\frac{d\vec{v}_\sigma(t)}{dt}=\frac{1}{2}\,(\vec{r}_1(t)-\vec{r}_2(t))\times\Bigg(\frac{Gm_2}{|\vec{r}_2(t-\tau_2(t))-\vec{r}_1(t)|^3}\,(\vec{r}_2(t-\tau_2(t))-\vec{r}_2(t))+$$
$$+\ \frac{Gm_1}{|\vec{r}_1(t-\tau_1(t))-\vec{r}_2(t)|^3}\,(\vec{r}_1(t)-\vec{r}_1(t-\tau_1(t)))\Bigg). \tag{13}$$

Використовуючи вектори

$$\overrightarrow{M_2M_1}=\vec{r}_1(t)-\vec{r}_2(t),\qquad \overrightarrow{M_1^*M_1}=\vec{r}_1(t)-\vec{r}_1(t-\tau_1(t))\qquad \text{і}\qquad \overrightarrow{M_2M_2^*}=\vec{r}_2(t-\tau_2(t))-\vec{r}_2(t),$$

де M_1^* і M_2^* — точки простору, в яких знаходилися точки M_1 і M_2 в моменти часу $t-\tau_1(t)$ і $t-\tau_2(t)$ відповідно (рис. 2), а також співвідношення (5) – (8), отримуємо

$$\frac{d\vec{v}_\sigma(t)}{dt}=\frac{1}{2}\,(\vec{r}_1(t)-\vec{r}_2(t))\times\left(\frac{1}{m_1c\tau_2(t)}\left|\vec{F}_1(t)\right|\overrightarrow{M_2M_2^*}+\frac{1}{m_2c\tau_1(t)}\left|\vec{F}_2(t)\right|\overrightarrow{M_1^*M_1}\right). \tag{14}$$

Нехай $\tau(t)=\max\{\tau_1(t),\tau_2(t)\}$. Проаналізуємо випадок виконання співвідношення

$$\vec{v}_\sigma(s)\neq\vec{0}\qquad \text{для всіх}\quad s\in[t_0-\tau(t_0),t_0]. \tag{15}$$

Зазначимо, що для інерціальної системи координат, що використовується, завжди можна вибрати іншу інерціальну систему координат так, щоб кут між векторами $\vec{v}_1(t_0)$ і $\vec{v}_2(t_0)$ належав проміжку $(\pi/2,\pi)$ (як на рис. 2). Для цього потрібно належним чином змінити напрямок сталої швидкості руху точки O. При переході до іншої інерціальної системи координат секторна швидкість руху точки M_1 відносно точки M_2 не зміниться, оскільки вектори $\vec{r}_1(t_0)-\vec{r}_2(t_0)$ і $\vec{v}_1(t_0)-\vec{v}_2(t_0)$ інваріантні по відношенню до зміни інерціальної системи координат.

На рис. 2 M_1^* і M_2^* — точки простору, в яких знаходяться M_1 і M_2 в моменти часу $t-\tau_1(t)$ і $t-\tau_2(t)$ відповідно.

Для подальшого викладу потрібні деякі позначення. Нехай L_{M_1,M_2} — пряма, що проходить через точки M_1 і M_2, $E^+_{M_1,M_2}$ — півплощина, що містить кінець вектора $\vec{v}_1(t)$ (з початком у точці M_1) і не містить точок прямої L_{M_1,M_2}, і $E^-_{M_1,M_2} = E \setminus \left(E^+_{M_1,M_2} \bigcup L_{M_1,M_2}\right)$ — півплощина, що містить кінець вектора $\vec{v}_2(t)$ (з початком у точці M_2) і не містить точок прямої L_{M_1,M_2}.

Наведемо дослідження руху точок M_1 і M_2 в припущенні, що виконується така умова.

Умова А. Для всіх $t \geq t_0$ кінець вектора $\vec{v}_1(t)$ і точка M_1^* знаходяться на $E^+_{M_1,M_2}$ та $E^-_{M_1,M_2} \bigcup L_{M_1,M_2}$ відповідно, а кінець вектора $\vec{v}_2(t)$ і точка M_2^* — на $E^-_{M_1,M_2}$ та $E^+_{M_1,M_2} \bigcup L_{M_1,M_2}$ відповідно, при цьому траєкторії руху точок M_1 і M_2 не є підмножинами однієї прямої.

Вимога виконання цієї умови є природною. Наприклад, для планет Сонячної системи та Сонця ця умова виконується завдяки невеликим швидкостям руху планет та Сонця в порівнянні зі швидкістю гравітації c [12] та близькості їх траєкторій руху до еліптичних траєкторій.

Зазначимо, що траєкторії руху точок M_1 і M_2 не мають точок перегину, оскільки рух кожної точки здійснюється під впливом ненульової сили. Тому ці траєкторії є опуклими, крім випадку, коли рух точок здійснюється по прямій. Ця властивість траєкторій полегшує дослідження руху точок M_1 і M_2.

Очевидно, що завдяки виконанню умови А пари векторів $\overrightarrow{M_2M_1}$ і $\vec{v}_1(t) - \vec{v}_2(t)$, $\overrightarrow{M_2M_1}$ і $\overrightarrow{M_1^*M_1}$, а також $\overrightarrow{M_2M_1}$ і $\overrightarrow{M_2M_2^*}$ в моменти часу $t \geqslant t_0$ мають однакову орієнтацію (на рис. 2 ці пари векторів є правими).

Використання співвідношень (13), (14) та умови А приводить до висновку, що справджується таке твердження.

Твердження 1 (закон зростання секторної швидкості)**.** *Якщо виконуються співвідношення (15) та умова А, то секторна швидкість $\vec{v}_\sigma(t)$ руху точки M_1 відносно точки M_2 є ненульовою для всіх $t > t_0$ (згідно з (14)), причому величина цієї швидкості є строго зростаючою.*

Як рухаються точки M_1 і M_2, якщо

$$\vec{v}_\sigma(s) = \vec{0} \quad \text{для всіх} \quad s \in [t_0 - \tau(t_0), t_0]? \tag{16}$$

У цьому випадку $\vec{v}_1(s) - \vec{v}_2(s) = \vec{0}$ або $\vec{v}_1(s) - \vec{v}_2(s) \neq \vec{0}$ і вектори $\vec{r}_1(s) - \vec{r}_2(s)$, $\vec{v}_1(s) - \vec{v}_2(s)$ колінеарні для кожного $s \in [t_0 - \tau(t_0), t_0]$. Звідси випливає, що в момент часу t_0 точки M_1, M_1^*, M_2 і M_2^* знаходяться на одній прямій. Ця пряма проходить через кінці векторів $\vec{r}_1(t_0)$ і $\vec{r}_2(t_0)$, початок яких співпадає з точкою O. Тому з урахуванням (13) і (14) подальший рух точок M_1 і M_2 під дією сил тяжіння здійснюється по цій прямій.

Отже, також справджується таке твердження.

Твердження 2. *Якщо виконується співвідношення (16), то секторна швидкість $\vec{v}_\sigma(t)$ руху точки M_1 відносно точки M_2 буде нульовою в усі моменти часу $t \geq t_0$ і рух точок M_1 та M_2 буде здійснюватися по прямій.*

Зазначимо, що для секторної швидкості $\vec{v}_\sigma(t)$ руху точки M_1 відносно точки M_2 не може виконуватися співвідношення $\vec{v}_\sigma(t) \equiv \vec{v}_\sigma(t_0) \neq \vec{0}$. Якщо це співвідношення справджується, то згідно з (13) і (14) $\dfrac{d\vec{v}_\sigma(t)}{dt} \equiv \vec{0}$. Тому точки M_1, M_1^*, M_2 і M_2^* будуть знаходитися на одній прямій для всіх $t \geq t_0$, що суперечить умові А.

З'ясуємо причини зростання секторної швидкості з фізичної точки зору у випадку виконання умови А. Вважатимемо, що ця швидкість у момент часу t_0 є ненульовою.

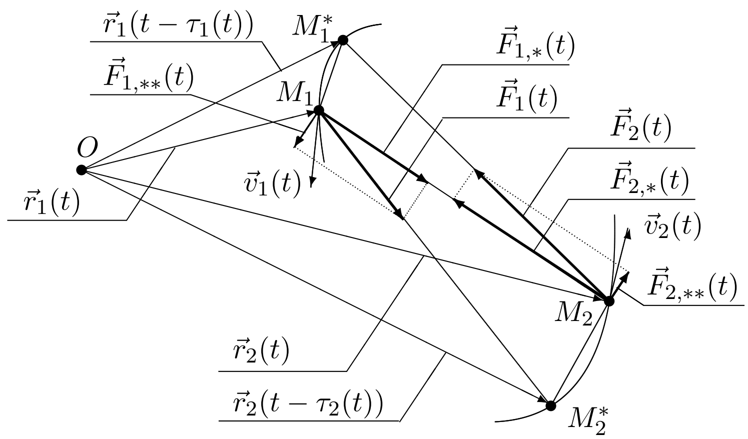

Рис. 3. Радіальні та трансверсальні складові сил $\vec{F}_1(t)$ і $\vec{F}_2(t)$.

Використаємо рис. 3. На точку M_1 діє сила $\vec{F}_1(t)$, що визначається формулою (5). Ця сила і вектор $\overrightarrow{M_1M_2^*}$ мають однаковий напрямок. Аналогічно на точку M_2 діє сила $\vec{F}_2(t)$ (див. формулу (7)). Її напрямок збігається з напрямком вектора $\overrightarrow{M_2M_1^*}$. Тоді

$$\vec{F}_1(t) = \vec{F}_{1,*}(t) + \vec{F}_{1,**}(t) \qquad \text{і} \qquad \vec{F}_2(t) = \vec{F}_{2,*}(t) + \vec{F}_{2,**}(t),$$

де $\vec{F}_{1,*}(t)$ і $\vec{F}_{2,*}(t)$ та $\vec{F}_{1,**}(t)$ і $\vec{F}_{2,**}(t)$ — радіальні та трансверсальні складові сил $\vec{F}_1(t)$ і $\vec{F}_2(t)$ відповідно (вектори $\vec{F}_{1,*}(t)$ і $\vec{F}_{2,*}(t)$ колінеарні вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$, а вектори $\vec{F}_{1,**}(t)$ і $\vec{F}_{2,**}(t)$ ортогональні до цього вектора і утворюють гострі кути з векторами $\vec{v}_1(t)$ та $\vec{v}_2(t)$ відповідно).

Ненульові складові $\vec{F}_{1,**}(t)$ і $\vec{F}_{2,**}(t)$ сил $\vec{F}_1(t)$ і $\vec{F}_2(t)$, породжені запізнюванням гравітаційного поля, що приводить до зміщення притягувальних точок для точок M_1 і M_2, впливають на зміну секторної швидкості руху точки M_1 відносно точки M_2 і є причиною зростання величини цієї швидкості.

Враховуючи, що

$$\frac{d(\vec{r}_1(t)-\vec{r}_2(t))\times\left(\dot{\vec{r}}_1(t)-\dot{\vec{r}}_2(t)\right)}{dt} = (\vec{r}_1(t)-\vec{r}_2(t))\times\left(\ddot{\vec{r}}_1(t)-\ddot{\vec{r}}_2(t)\right)$$

і

$$\begin{aligned}
&(\vec{r}_1(t)-\vec{r}_2(t))\times\left(\ddot{\vec{r}}_1(t)-\ddot{\vec{r}}_2(t)\right) = \\
&\quad = (\vec{r}_1(t)-\vec{r}_2(t))\times\left(\frac{1}{m_1}\,\vec{F}_1(t)-\frac{1}{m_2}\,\vec{F}_2(t)\right) = \\
&\quad = (\vec{r}_1(t)-\vec{r}_2(t))\times\left(\frac{1}{m_1}\left(\vec{F}_{1,*}(t)+\vec{F}_{1,**}(t)\right)-\frac{1}{m_2}\left(\vec{F}_{2,*}(t)+\vec{F}_{2,**}(t)\right)\right) = \\
&\quad = (\vec{r}_1(t)-\vec{r}_2(t))\times\left(\frac{1}{m_1}\,\vec{F}_{1,**}(t)-\frac{1}{m_2}\,\vec{F}_{2,**}(t)\right)
\end{aligned}$$

$\left(\text{тут використано колінеарність векторів } \vec{r}_1(t)-\vec{r}_2(t),\ \frac{1}{m_1}\vec{F}_{1,*}(t) \text{ і } \frac{1}{m_2}\vec{F}_{2,*}(t)\right)$, приходимо до висновку, що співвідношення (13) можна подати у вигляді

$$\frac{d\vec{v}_\sigma(t)}{dt} = \frac{1}{2}\left(\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)\right) \times \left(\frac{1}{m_1}\vec{F}_{1,**}(t) - \frac{1}{m_2}\vec{F}_{2,**}(t)\right).$$

Отримане співвідношення є більш зручним для користування (з фізичної точки зору), ніж співвідношення (13).

З урахуванням того, що вектори $\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)$ і $\frac{1}{m_1}\vec{F}_{1,**}(t) - \frac{1}{m_2}\vec{F}_{2,**}(t)$ ортогональні, одержуємо на підставі зростання величини секторної швидкості, що

$$\frac{d\left|\vec{v}_\sigma(t)\right|}{dt} = \frac{\left|\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)\right|}{2}\left|\frac{1}{m_1}\vec{F}_{1,**}(t) - \frac{1}{m_2}\vec{F}_{2,**}(t)\right|.$$

Оскільки вектори $\vec{F}_{1,**}(t)$ і $-\vec{F}_{2,**}(t)$ мають однакові напрямки (рис. 3), то

$$\left|\frac{1}{m_1}\vec{F}_{1,**}(t) - \frac{1}{m_2}\vec{F}_{2,**}(t)\right| = \frac{1}{m_1}\left|\vec{F}_{1,**}(t)\right| + \frac{1}{m_2}\left|\vec{F}_{2,**}(t)\right|$$

і

$$\frac{d\left|\vec{v}_\sigma(t)\right|}{dt} = \frac{\left|\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)\right|}{2}\left(\frac{1}{m_1}\left|\vec{F}_{1,**}(t)\right| + \frac{1}{m_2}\left|\vec{F}_{2,**}(t)\right|\right). \tag{17}$$

Це співвідношення справджується й у випадку, коли виконується співвідношення (16). Тоді

$$\frac{1}{m_1}\left|\vec{F}_{1,**}(t)\right| + \frac{1}{m_2}\left|\vec{F}_{2,**}(t)\right| \equiv 0$$

і

$$\vec{F}_{1,**}(t) \equiv \vec{F}_{2,**}(t) \equiv \vec{0}. \tag{18}$$

Тому на точки M_1 і M_2 діють лише сили $\vec{F}_{1,*}(t)$ і $\vec{F}_{2,*}(t)$ відповідно, і ці точки рухаються по прямій, що проходить через кінці векторів $\vec{r}_1(t_0)$ і $\vec{r}_2(t_0)$ (початки цих векторів збігаються з точкою O). Тотожність (18) означає, що точки M_1, M_2, M_1^* і M_2^* при русі знаходяться на одній прямій.

7. Неможливість руху двох точок за другим законом Кеплера. За законом зростання секторної швидкості (у випадку виконання умови A) рух точки M_1 відносно точки M_2 не може здійснюватися за другим законом Кеплера, оскільки рух точок за законами Кеплера є періодичним і $\vec{v}_\sigma(t) \equiv \vec{v}_\sigma(t_0) \neq \vec{0}$, а для кожного періодичного руху (тут також враховується періодичність швидкостей руху точок) величина секторної швидкості не може бути зростаючою функцією.

Отже, *рух Землі відносно Сонця не може здійснюватися за другим законом Кеплера*.

Як насправді здійснюється рух точки M_1 відносно точки M_2? Відповідь на це питання дамо в наступних пунктах.

8. Прямування відстані між точками M_1 і M_2 до 0 або до $+\infty$ при $t \to +\infty$ у випадку нульової секторної швидкості. Використаємо швидкість $\vec{v}(t) = \vec{v}_1(t) - \vec{v}_2(t)$ руху точки M_1 відносно точки M_2. У загальному випадку цю швидкість можна подати у вигляді суми

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_*(t) + \vec{v}_{**}(t), \tag{19}$$

де $\vec{v}_*(t)$ — радіальна складова швидкості $\vec{v}(t)$, що паралельна вектору $\overrightarrow{M_2M_1}$, і $\vec{v}_{**}(t)$ — трансверсальна складова цієї швидкості, що ортогональна до $\overrightarrow{M_2M_1}$.

Дослідимо рух точок M_1 і M_2 у випадку виконання співвідношення (16).

Згідно з твердженням 2, означенням секторної швидкості та рівностями

$$|\vec{v}_\sigma(t)| = \frac{1}{2}\left|\,(\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)) \times (\vec{v}_1(t) - \vec{v}_2(t))\,\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)\right|\,|\vec{v}_{**}(t)|, \quad t \geq t_0, \tag{20}$$

$\vec{v}_{**}(t) \equiv \vec{0}$ для всіх $t \geq t_0$. Тому $\vec{v}_1(t) - \vec{v}_2(t) \equiv \vec{v}_*(t)$ і на точки M_1 і M_2 діють тільки сили $\vec{F}_1(t) \equiv \vec{F}_{1,*}(t)$ і $\vec{F}_2(t) \equiv \vec{F}_{2,*}(t)$ відповідно (рис. 3), оскільки $\vec{F}_{1,**}(t) \equiv \vec{F}_{2,**}(t) \equiv \vec{0}$. Тоді точки M_1, M_2, M_1^* і M_2^* знаходяться на одній прямій (рис. 4).

Під дією сил $\vec{F}_1(t)$ і $\vec{F}_2(t)$ можливі наступні рухи точки M_1 відносно точки M_2:

1) величина $|\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)|$ при $t \geq t_0$ монотонно спадає;

2) на деякому проміжку $[t_0, t_1]$ величина $|\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)|$ зростає, а при $t \geq t_1$ — спадає;

3) величина $|\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)|$ при $t \geq t_0$ монотонно зростає.

Поведінка величини $|\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)|$ залежить від векторів $\vec{v}_1(t_0) - \vec{v}_2(t_0)$ і $\vec{r}_1(t_0) - \vec{r}_2(t_0)$.

Якщо $\vec{v}_1(t_0) - \vec{v}_2(t_0) = \vec{0}$ або $\vec{v}_1(t_0) - \vec{v}_2(t_0) \neq \vec{0}$ і напрямок вектора $\vec{v}_1(t_0) - \vec{v}_2(t_0)$ збігається з напрямком вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$, то рух точки M_1 відносно точки M_2 буде здійснюватися згідно з першим випадком. Тоді величина $|\vec{v}_1(t) - \vec{v}_2(t)|$ буде монотонно зростати, оскільки напрямок вектора $\vec{v}_1(t) - \vec{v}_2(t)$ збігається з напрямком вектора $\vec{F}_{1,*}(t) - \vec{F}_{2,*}(t)$. Зафіксуємо довільне як завгодно мале число $\varepsilon \in (0, |\vec{r}_1(t_0) - \vec{r}_2(t_0)|)$. Завдяки зростанню $|\vec{v}_1(t) - \vec{v}_2(t)|$ в деякий момент часу $t_1 > t_0$ буде виконуватися рівність $|\vec{r}_1(t_1) - \vec{r}_2(t_1)| = \varepsilon$. Тому на підставі довільності вибору ε

$$\lim_{t \to +\infty} |\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)| = 0. \tag{21}$$

Якщо $\vec{v}_1(t_0) - \vec{v}_2(t_0) \neq \vec{0}$ і напрямок вектора $\vec{v}_1(t_0) - \vec{v}_2(t_0)$ збігається з напрямком вектора $\overrightarrow{M_2M_1}$, то рух точки M_1 відносно точки M_2 буде здійснюватися згідно з другим або третім випадками. Справді, під дією сили $\vec{F}_{1,*}(t)$, напрямок якої протилежний до напрямку вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$, величина швидкості руху точки M_1 буде зменшуватися. Швидкість руху точки M_2 при цьому буде збільшуватися. Відстань $d(M_1, M_2)$ між точками M_1 і M_2 буде збільшуватися на деякому проміжку (t_0, t_1) (у момент часу t_1 швидкість $\vec{v}_1(t_1) - \vec{v}_2(t_1)$ буде дорівнювати $\vec{0}$). Такий рух можливий, якщо величина $|\vec{v}_1(t_0) - \vec{v}_2(t_0)|$ невелика (ця величина залежить від $|\vec{r}_1(t_0) - \vec{r}_2(t_0)|$). Починаючи з моменту часу t_1, точка M_1 буде рухатися в напрямку до точки M_2 (як у першому випадку). В результаті також прийдемо до співвідношення (21).

Зауважимо, що рух точок M_1 і M_2, для якого

$$|\vec{v}_1(t) - \vec{v}_2(t)| > 0 \qquad \text{і} \qquad |\vec{v}_1(t)| - |\vec{v}_2(t)| > 0 \qquad \text{для всіх} \quad t \in (t_0, +\infty) \tag{22}$$

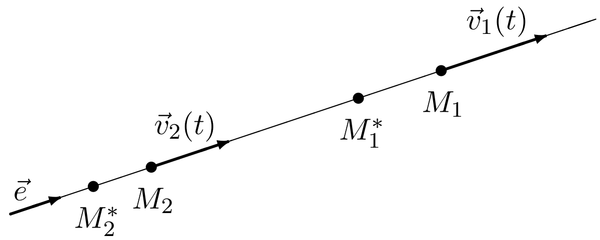

Рис. 4. Рух точок M_1 і M_2 у випадку $\vec{v}_\sigma(t) \equiv \vec{0}$.

(відстань між точками M_1 і M_2 монотонно зростає),

$$\lim_{t\to+\infty} |\vec{v}_1(t) - \vec{v}_2(t)| = 0 \tag{23}$$

і

$$\lim_{t\to+\infty} |\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)| \in (0, +\infty), \tag{24}$$

тобто траєкторія руху точки M_1 відносно точки M_2 є обмеженою, неможливий. Справді, завдяки нерівностям

$$|\vec{v}_2(t_0)| < |\vec{v}_2(t)| < |\vec{v}_1(t)| < |\vec{v}_1(t_0)| < c, \quad t > t_0, \tag{25}$$

що випливають із (22) та монотонності величин $|\vec{v}_2(t)|$ і $|\vec{v}_1(t)|$ на $[t_0, +\infty)$, нерівностям

$$\frac{c}{c - |\vec{v}_1(t_0)|} \left|\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)\right| \geq \left|\vec{r}_2(t - \tau_2(t)) - \vec{r}_1(t)\right| \geq \left|\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)\right|, \quad t \geq t_0, \tag{26}$$

$$\left|\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)\right| \geq \left|\vec{r}_1(t - \tau_1(t)) - \vec{r}_2(t)\right| \geq \frac{|\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)|}{2}, \quad t \geq t_0, \tag{27}$$

та (24), виконується співвідношення

$$\sup_{t\geq t_0} \left\{\left|\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t - \tau_2(t))\right|, \left|\vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t - \tau_1(t))\right|\right\} < +\infty. \tag{28}$$

Нерівності (26) випливають з (25) та того, що для всіх $t \geqslant t_0$

$$\left|\overrightarrow{M_1 M_2^*}\right| \geq \left|\overrightarrow{M_1 M_2}\right|$$

і

$$\left|\overrightarrow{M_1 M_2^*}\right| = \left|\overrightarrow{M_1 M_2}\right| + \left|\overrightarrow{M_2 M_2^*}\right| \leq \left|\overrightarrow{M_1 M_2}\right| + \frac{|\vec{v}_2(t)|}{c} \left|\overrightarrow{M_1 M_2^*}\right| \leq \left|\overrightarrow{M_1 M_2}\right| + \frac{|\vec{v}_1(t_0)|}{c} \left|\overrightarrow{M_1 M_2^*}\right|,$$

а нерівності (27) — з того, що для всіх $t \geq t_0$

$$\left|\overrightarrow{M_1 M_2}\right| \geq \left|\overrightarrow{M_2 M_1^*}\right| = \left|\overrightarrow{M_1 M_2}\right| - \left|\overrightarrow{M_1 M_1^*}\right| \qquad \text{і} \qquad \left|\overrightarrow{M_1 M_1^*}\right| \leq \tau_1(t) c = \left|\overrightarrow{M_2 M_1^*}\right|.$$

Тому на підставі формул (5), (7), співвідношення (28) та того, що вектори $\vec{F}_1(t)$ і $\vec{F}_2(t)$ мають протилежні напрямки, для деякого числа $\delta > 0$

$$\delta < \inf_{t\geq t_0} \left|\frac{1}{m_1} \vec{F}_1(t) - \frac{1}{m_2} \vec{F}_2(t)\right| = \inf_{t\geq t_0} \left(\frac{1}{m_1} \left|\vec{F}_1(t)\right| + \frac{1}{m_2} \left|\vec{F}_2(t)\right|\right). \tag{29}$$

Враховуючи рівняння системи (10), отримуємо, що для всіх достатньо великих $t > t_0$

$$(\vec{v}_1(t+1) - \vec{v}_2(t+1)) - (\vec{v}_1(t) - \vec{v}_2(t)) = \int\limits_t^{t+1} \left(\frac{1}{m_1} \vec{F}_1(s) - \frac{1}{m_2} \vec{F}_2(s) \right) ds.$$

Тоді на підставі (29)

$$\big| \, (\vec{v}_1(t+1) - \vec{v}_2(t+1)) - (\vec{v}_1(t) - \vec{v}_2(t)) \, \big| > \delta$$

для всіх достатньо великих $t > t_0$, що неможливо згідно з (23).

Отже, рух точок M_1 і M_2, для якого виконуються співвідношення (22) – (24), неможливий.

Нарешті, розглянемо третій випадок руху точок M_1 і M_2, коли величина $|\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)|$ монотонно зростає на проміжку $[t_0, +\infty)$. Позначимо через $\vec{e}$ вектор, напрямок якого збігається з напрямком вектора $\vec{v}_1(t_0) - \vec{v}_2(t_0)$ і $|\vec{e}\,| = 1$ (рис. 4).

Покажемо, що коли

$$|\vec{v}_1(t_0) - \vec{v}_2(t_0)|^2 > \frac{2G(4m_1 + m_2)}{|\vec{r}_1(t_0) - \vec{r}_2(t_0)|}, \tag{30}$$

тоді

$$\lim_{t \to +\infty} |\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)| = +\infty. \tag{31}$$

Враховуючи рівняння системи (10), отримуємо

$$(\vec{v}_1(t) - \vec{v}_2(t)) \equiv (\vec{v}_1(t_0) - \vec{v}_2(t_0)) + \int\limits_{t_0}^{t} \left(\frac{1}{m_1} \vec{F}_1(s) - \frac{1}{m_2} \vec{F}_2(s) \right) ds. \tag{32}$$

Згідно з вимогами до $\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t),\ \vec{v}_1(t) - \vec{v}_2(t),\ \vec{F}_1(t),\ \vec{F}_2(t)$ і $\vec{e}$

$$\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t) \equiv |\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)|\vec{e},$$

$$\vec{v}_1(t) - \vec{v}_2(t) \equiv |\vec{v}_1(t) - \vec{v}_2(t)|\vec{e}$$

і

$$\frac{1}{m_1} \vec{F}_1(t) - \frac{1}{m_2} \vec{F}_2(t) \equiv - \left| \frac{1}{m_1} \vec{F}_1(t) - \frac{1}{m_2} \vec{F}_2(t) \right| \vec{e} \equiv - \left(\frac{1}{m_1} \left| \vec{F}_1(t) \right| + \frac{1}{m_2} \left| \vec{F}_2(t) \right| \right) \vec{e}.$$

Тоді з урахуванням (32)

$$|\vec{v}_1(t) - \vec{v}_2(t)| \equiv |\vec{v}_1(t_0) - \vec{v}_2(t_0)| - \int\limits_{t_0}^{t} \left(\frac{1}{m_1} \left| \vec{F}_1(s) \right| + \frac{1}{m_2} \left| \vec{F}_2(s) \right| \right) ds,$$

і, отже, на підставі неперервності функції $\dfrac{1}{m_1} \left| \vec{F}_1(t) \right| + \dfrac{1}{m_2} \left| \vec{F}_2(t) \right|$ на $[t_0, +\infty)$ маємо

$$\frac{d|\vec{v}_1(t) - \vec{v}_2(t)|}{dt} \equiv -\frac{1}{m_1} \left| \vec{F}_1(t) \right| - \frac{1}{m_2} \left| \vec{F}_2(t) \right|.$$

Звідси одержуємо

$$\frac{d|\vec{v}_1(t)-\vec{v}_2(t)|^2}{dt} \equiv -2\left(\frac{1}{m_1}\left|\vec{F}_1(t)\right| + \frac{1}{m_2}\left|\vec{F}_2(t)\right|\right)|\vec{v}_1(t)-\vec{v}_2(t)|$$

і

$$|\vec{v}_1(t)-\vec{v}_2(t)|^2 \equiv |\vec{v}_1(t_0)-\vec{v}_2(t_0)|^2 - \\ -2\int_{t_0}^{t}\left(\frac{1}{m_1}\left|\vec{F}_1(s)\right| + \frac{1}{m_2}\left|\vec{F}_2(s)\right|\right)|\vec{v}_1(s)-\vec{v}_2(s)|\,ds. \qquad (33)$$

Оцінимо зверху інтеграл

$$\int_{t_0}^{t}\left(\frac{1}{m_1}\left|\vec{F}_1(s)\right| + \frac{1}{m_2}\left|\vec{F}_2(s)\right|\right)|\vec{v}_1(s)-\vec{v}_2(s)|\,ds.$$

Використовуючи формули (5) і (7), нерівності (26) і (27) та співвідношення

$$|\vec{v}_1(s)-\vec{v}_2(s)|\,ds = d|\vec{r}_1(s)-\vec{r}_2(s)|, \quad s \geq t_0,$$

отримаємо

$$\frac{1}{m_1}\left|\vec{F}_1(t)\right| = \frac{Gm_2}{|\vec{r}_1(t)-\vec{r}_2(t-\tau_2(t))|^2} \leq \frac{Gm_2}{|\vec{r}_1(t)-\vec{r}_2(t)|^2},$$
$$\frac{1}{m_2}\left|\vec{F}_2(t)\right| = \frac{Gm_1}{|\vec{r}_2(t)-\vec{r}_1(t-\tau_1(t))|^2} \leq \frac{4Gm_1}{|\vec{r}_1(t)-\vec{r}_2(t)|^2}$$

і

$$\int_{t_0}^{t}\left(\frac{1}{m_1}\left|\vec{F}_1(s)\right| + \frac{1}{m_2}\left|\vec{F}_2(s)\right|\right)|\vec{v}_1(s)-\vec{v}_2(s)|\,ds \leq \left(\frac{G(4m_1+m_2)}{|\vec{r}_1(t_0)-\vec{r}_2(t_0)|} - \frac{G(4m_1+m_2)}{|\vec{r}_1(t)-\vec{r}_2(t)|}\right).$$

Звідси та з (33) випливає, що

$$|\vec{v}_1(t)-\vec{v}_2(t)|^2 \geq |\vec{v}_1(t_0)-\vec{v}_2(t_0)|^2 - \frac{2G(4m_1+m_2)}{|\vec{r}_1(t_0)-\vec{r}_2(t_0)|}.$$

Тому у випадку виконання співвідношення (30)

$$\inf_{s\geqslant t_0}|\vec{v}_1(s)-\vec{v}_2(s)| > 0.$$

Оскільки

$$|\vec{r}_1(t)-\vec{r}_2(t)| \geq |\vec{r}_1(t_0)-\vec{r}_2(t_0))| + (t-t_0)\inf_{s\geq t_0}|\vec{v}_1(s)-\vec{v}_2(s)|, \quad t \geq t_0,$$

то співвідношення (31) справджується.

Таким чином, у випадку виконання співвідношення (30) відстань між точками M_1 і M_2 прямує до $+\infty$ при $t \to +\infty$.

Отже, прямування відстані між точками M_1 і M_2 до 0 або до $+\infty$ при $t \to +\infty$ у випадку нульової секторної швидкості обґрунтоване.

9. Неможливість обмеженого руху точки M_1 відносно точки M_2, зближення яких не може бути як завгодно малим, у випадку ненульової секторної швидкості. Зафіксуємо довільні додатні числа $a,\ a_1,\ a_2$ і b. Нехай $a_1 < a_2$ і $b < c$.

Припустимо, що існує такий рух точок M_1 і M_2, для якого

$$|\vec{r}_1(t)| \le a, \quad t \ge t_0, \tag{34}$$

$$a_1 \le |\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)| \le a_2, \quad t \ge t_0,$$

$$|\vec{v}_1(t) - \vec{v}_2(t)| \le b, \quad t \ge t_0,$$

$$\max\{|\vec{v}_1(t)|, |\vec{v}_2(t)|\} \le b, \quad t \ge t_0, \tag{35}$$

і

$$0 \ne |\vec{v}_\sigma(t_0)|.$$

Тоді згідно з (20) для трансверсальної складової $\vec{v}_{**}(t)$ швидкості $\vec{v}(t) = \vec{v}_1(t) - \vec{v}_2(t)$ руху точки M_1 відносно точки M_2 буде виконуватися співвідношення

$$\frac{2|\vec{v}_\sigma(t_0)|}{a_2} \le \frac{2|\vec{v}_\sigma(t)|}{a_2} \le |\vec{v}_{**}(t)| \le \frac{2|\vec{v}_\sigma(t)|}{a_1}, \quad t \ge t_0, \tag{36}$$

і тому

$$0 < \inf_{t \ge t_0} |\vec{v}_1(t) - \vec{v}_2(t)|. \tag{37}$$

Відповідно до нерівностей (34) – (35) і (37) існують такі додатні числа $\Delta,\ \Lambda_1,\ \Lambda_2$ ($\Lambda_1 < < \Lambda_2$) і Υ, що

$$\max\{\tau_1(t), \tau_2(t)\} \le \Delta, \quad t \ge t_0,$$

$$\Lambda_1 \le \min\{|\vec{r}_1(t - \tau_1(t)) - \vec{r}_2(t)|, |\vec{r}_2(t - \tau_2(t)) - \vec{r}_1(t)|\} \le$$

$$\le \max\{|\vec{r}_1(t - \tau_1(t)) - \vec{r}_2(t)|, |\vec{r}_2(t - \tau_2(t)) - \vec{r}_1(t)|\} \le \Lambda_2, \quad t \ge t_0,$$

$$\max\left\{\left|\vec{F}_1(t)\right|, \left|\vec{F}_2(t)\right|\right\} \le \Upsilon, \quad t \ge t_0, \tag{38}$$

а завдяки зростанню секторної швидкості та рівності (17)

$$\frac{1}{m_1}\left|\vec{F}_{1,**}(t)\right| + \frac{1}{m_2}\left|\vec{F}_{2,**}(t)\right| > 0 \quad \text{для всіх} \quad t \ge t_0. \tag{39}$$

Співвідношення (39) означає, що кутова швидкість обертання точки M_1 навколо точки M_2 є ненульовою в усі моменти часу $t \ge t_0$.

Покажемо, що

$$\inf_{t \ge t_0}\left(\frac{1}{m_1}\left|\vec{F}_{1,**}(t)\right| + \frac{1}{m_2}\left|\vec{F}_{2,**}(t)\right|\right) > 0. \tag{40}$$

Розглянемо множину $\mathfrak{M}$ упорядкованих четвірок $\big(\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t), \vec{v}_1(t), \vec{v}_2(t)\big)$ неперервних на проміжку $[t_0 - \Delta, t_0 + \Delta]$ функцій, де $\vec{v}_1(t) = \dot{\vec{r}}_1(t)$ і $\vec{v}_2(t) = \dot{\vec{r}}_2(t)$, кожна з яких описує рух точок M_1 і M_2 на проміжку $[t_0 - \Delta, t_0 + \Delta]$ і задовольняє співвідношення (34) – (38).

Завдяки співвідношенням (34) – (38) та рівнянням системи (10), що описує рух точок M_1 і M_2, четвірки $(\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t), \vec{v}_1(t), \vec{v}_2(t))$ функцій із множини $\mathfrak{M}$ рівномірно обмежені та рівностепенево неперервні [13] на проміжку $[t_0 - \Delta, t_0 + \Delta]$, а множина $\mathfrak{M}$ є замкненою. Тому на підставі узагальненої теореми Арцела [13] обмежена та замкнена множина $\mathfrak{M}$ буде компактною множиною. Зазначимо, що згідно з (5) і (7) та рівняннями системи (38) скалярна величина

$$\min_{t\in[t_0,t_0+\Delta]} \left(\frac{1}{m_1} \left| \vec{F}_{1,**}(t) \right| + \frac{1}{m_2} \left| \vec{F}_{2,**}(t) \right| \right)$$

неперервно залежить від $(\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t), \vec{v}_1(t), \vec{v}_2(t)) \in \mathfrak{M}$. Тому за теоремою Вейерштрасса про найбільше та найменше значення (див. [7, с. 176] і [14, с. 34]) існує така точка $(\vec{r}_1^*(t), \vec{r}_2^*(t), \vec{v}_1^*(t), \vec{v}_2^*(t)) \in \mathfrak{M}$, в якій

$$\min_{t\in[t_0,t_0+\Delta]} \left(\frac{1}{m_1} \left| \vec{F}_{1,**}(t) \right| + \frac{1}{m_2} \left| \vec{F}_{2,**}(t) \right| \right)$$

досягає найменшого значення. Це значення на підставі умови А не може бути нульовим. Тому для розглянутого на початку пункту руху точок M_1 і M_2, що описується векторними функціями $\vec{r}_1(t)$ і $\vec{r}_2(t)$, виконується співвідношення (40).

Таким чином, $|\vec{v}_\sigma(t)| \to +\infty$ при $t \to +\infty$, що суперечить (36) та нерівностям $|\vec{v}_{**}(t)| < c,\ t \geq t_0$.

Отже, припущення про існування обмеженого руху точки M_1 відносно точки M_2, зближення яких не може бути як завгодно малим, є хибним.

Як тоді рухається точка M_1 відносно точки M_2 у випадку виконання умови А?

Твердження 3. $\underline{\lim}_{t\to+\infty} d(M_1, M_2) = 0$ *(тоді за скінчений проміжок часу відбувається зіткнення двох тіл ненульових розмірів) або* $\overline{\lim}_{t\to+\infty} d(M_1, M_2) = +\infty$.

Звідси випливає, що рух точки M_1 відносно точки M_2 у випадку виконання умови А не може здійснюватися за третім законом Кеплера (оскільки траєкторія руху точки M_1 відносно точки M_2 не є еліпсом).

Отже, на підставі результатів пп. 5, 7 – 9 *рух планет Сонячної системи не здійснюється за законами Кеплера.*

Завдяки виконанню співвідношення (39) (тоді величина секторної швидкості руху точки M_1 відносно точки M_2 є строго зростаючою) траєкторії руху точки M_1 відносно точки M_2 в твердженні 3 на скінченних проміжках часу є спіралеподібними.

10. Існування необмежених спіралеподібних траєкторій. Спочатку покажемо, що множина траєкторій руху точок M_1 і M_2, кожна з яких не знаходиться на прямій і $d(M_1, M_2) \to +\infty$ при $t \to +\infty$, є не порожньою.

Використаємо співвідношення (19) про зображення швидкості $\vec{v}(t) = \vec{v}_1(t) - \vec{v}_2(t)$ за допомогою радіальної та трансверсальної складових $\vec{v}_*(t)$ і $\vec{v}_{**}(t)$.

Розглянемо вектори $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$, що задовольняють умови, наведені нижче.

Покажемо, що коли вектори $\vec{a}_1 - \vec{a}_2$ і $\vec{r}_1(t_0) - \vec{r}_2(t_0)$ мають однаковий напрямок, величини $|\vec{a}_1 - \vec{a}_2|$ і $|\vec{r}_1(t_0) - \vec{r}_2(y_0)|$ є достатньо великими, величина

$$\varepsilon = \sup_{s\in[t_0-\tau_1(t_0),t_0]} |\vec{v}_1(s) - \vec{a}_1| + \sup_{s\in[t_0-\tau_2(t_0),t_0]} |\vec{v}_2(s) - \vec{a}_2| + \\ + \sup_{s\in[t_0-\tau_1(t_0),t_0]} |\vec{r}_1(s) - \vec{r}_1(t_0)| + \sup_{s\in[t_0-\tau_2(t_0),t_0]} |\vec{r}_2(s) - \vec{r}_2(t_0)| \qquad (41)$$

є достатньо малою,

$$\vec{v}_\sigma(t_0) \neq \vec{0} \tag{42}$$

і справджується нерівність

$$(|\vec{a}_1 - \vec{a}_2| - \varepsilon)^2 > \frac{16G(m_1 + m_2)}{|\vec{r}_1(t_0) - \vec{r}_2(t_0)|}, \tag{43}$$

тоді

$$\lim_{t\to+\infty} \big|\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)\big| = +\infty. \tag{44}$$

Використаємо співвідношення

$$\frac{d(\vec{v}_1(t) - \vec{v}_2(t))}{dt} = \frac{1}{m_1}\vec{F}_1(t) - \frac{1}{m_2}\vec{F}_2(t), \quad t \geq t_0, \tag{45}$$

що з урахуванням (5) і (7) випливає з рівнянь системи (10). Завдяки (45) для всіх $t \geq t_0$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \left(\frac{1}{m_1}\vec{F}_1(s) - \frac{1}{m_2}\vec{F}_2(s)\right) ds. \tag{46}$$

Позначимо через $\big(\vec{a}, \vec{b}\big)$ скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Помноживши обидві частини рівності (46) скалярно на вектор $\vec{a}_1 - \vec{a}_2$, отримаємо

$$(\vec{a}_1 - \vec{a}_2, \vec{v}(t)) = (\vec{a}_1 - \vec{a}_2, \vec{v}(t_0)) + \left(\vec{a}_1 - \vec{a}_2, \int\limits_{t_0}^{t} \left(\frac{1}{m_1}\vec{F}_1(s) - \frac{1}{m_2}\vec{F}_2(s)\right) ds\right), \quad t \geq t_0.$$

Звідси випливає, що

$$(\vec{a}_1 - \vec{a}_2, \vec{v}_*(t)) = (\vec{a}_1 - \vec{a}_2, \vec{a}_1 - \vec{a}_2) + (\vec{a}_1 - \vec{a}_2, \vec{v}(t_0) - (\vec{a}_1 - \vec{a}_2)) +$$
$$+ \left(\vec{a}_1 - \vec{a}_2, \int\limits_{t_0}^{t} \left(\frac{1}{m_1}\vec{F}_1(s) - \frac{1}{m_2}\vec{F}_2(s)\right) ds\right), \quad t \geq t_0,$$

і, отже,

$$|\vec{a}_1 - \vec{a}_2|\,|\vec{v}_*(t)| = |\vec{a}_1 - \vec{a}_2|^2 + (\vec{a}_1 - \vec{a}_2, \vec{v}(t_0) - (\vec{a}_1 - \vec{a}_2)) +$$
$$+ \left(\vec{a}_1 - \vec{a}_2, \int\limits_{t_0}^{t} \left(\frac{1}{m_1}\vec{F}_1(s) - \frac{1}{m_2}\vec{F}_2(s)\right) ds\right), \quad t \geq t_0. \tag{47}$$

Завдяки тому, що вектори $\vec{a}_1 - \vec{a}_2$ і $\vec{r}_1(t_0) - \vec{r}_2(t_0)$ мають однаковий напрямок, точки M_1 і M_2 притягуються під впливом сили тяжіння, величина ε є достатньо малою і функція $\vec{v}(t)$ є неперервною, існує проміжок $[t_0, t_1)$, на якому величина $|\vec{v}_*(t)|$ монотонно спадає і

$$|\vec{v}_*(t)| > 0 \quad \text{для всіх} \quad t \in [t_0, t_1). \tag{48}$$

Припустимо, що

$$|\vec{v}_*(t_1)| = 0. \tag{49}$$

На підставі (41) і (47)

$$|\vec{a}_1 - \vec{a}_2|\ |\vec{v}_*(t)| \geq |\vec{a}_1 - \vec{a}_2|^2 - |\vec{a}_1 - \vec{a}_2|\varepsilon -$$
$$- |\vec{a}_1 - \vec{a}_2| \int\limits_{t_0}^{t} \left| \frac{1}{m_1}\,\vec{F}_1(s) - \frac{1}{m_2}\,\vec{F}_2(s) \right| ds, \quad t \in [t_0, t_1).$$

Тому

$$|\vec{v}_*(t)| \geq |\vec{a}_1 - \vec{a}_2| - \varepsilon - \int\limits_{t_0}^{t} \left| \frac{1}{m_1}\,\vec{F}_1(s) - \frac{1}{m_2}\,\vec{F}_2(s) \right| ds, \quad t \in [t_0, t_1). \tag{50}$$

Оцінимо зверху значення величини

$$\int\limits_{t_0}^{t} \left| \frac{1}{m_1}\,\vec{F}_1(s) - \frac{1}{m_2}\,\vec{F}_2(s) \right| ds$$

для $t \in [t_0, t_1)$, використавши рівності

$$\big| d|\vec{r}_1(s) - \vec{r}_2(s)| \big| = \left| d\sqrt{(x_1(s) - x_2(s))^2 + (y_1(s) - y_2(s))^2 + (z_1(s) - z_2(s))^2} \right| =$$
$$= \left| \frac{(\vec{r}_1(s) - \vec{r}_2(s), \vec{v}_1(s) - \vec{v}_2(s))}{|\vec{r}_1(s) - \vec{r}_2(s)|}\, ds \right| = |\vec{v}_*(s)|\ ds, \quad t \in [t_0, t_1), \tag{51}$$

і те, що згідно з (51)

$$\int\limits_{t_0}^{t} \left| \frac{1}{m_1}\,\vec{F}_1(s) - \frac{1}{m_2}\,\vec{F}_2(s) \right| ds = \int\limits_{t_0}^{t} \left| \frac{1}{m_1}\,\vec{F}_1(s) - \frac{1}{m_2}\,\vec{F}_2(s) \right| \frac{\big| d|\vec{r}_1(s) - \vec{r}_2(s)| \big|}{|\vec{v}_*(s)|}, \quad t \in [t_0, t_1).$$

Оскільки

$$\left|\overrightarrow{M_1 M_1^*}\right| + \left|\overrightarrow{M_1^* M_2}\right| \geq \left|\overrightarrow{M_1 M_2}\right|, \qquad \left|\overrightarrow{M_2 M_2^*}\right| + \left|\overrightarrow{M_2^* M_1}\right| \geq \left|\overrightarrow{M_1 M_2}\right|$$

(на підставі нерівності трикутника, див. рис. 3),

$$\left|\overrightarrow{M_1 M_2}\right| = |\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)|, \qquad \left|\overrightarrow{M_1^* M_2}\right| = |\vec{r}_1(t - \tau_1(t)) - \vec{r}_2(t)|,$$
$$\left|\overrightarrow{M_2^* M_1}\right| = |\vec{r}_2(t - \tau_2(t)) - \vec{r}_1(t)|$$

і

$$\left|\overrightarrow{M_1 M_1^*}\right| \leq \left|\overrightarrow{M_1^* M_2}\right|, \qquad \left|\overrightarrow{M_2 M_2^*}\right| \leq \left|\overrightarrow{M_2^* M_1}\right|$$

(на підставі того, що швидкості руху точок M_1 і M_2 не можуть бути більшими швидкості гравітації c), то

$$|\vec{r}_1(t-\tau_1(t))-\vec{r}_2(t)| \geq \frac{|\vec{r}_1(t)-\vec{r}_2(t)|}{2} \quad \text{і} \quad |\vec{r}_2(t-\tau_2(t))-\vec{r}_1(t)| \geq \frac{|\vec{r}_1(t)-\vec{r}_2(t)|}{2}, \quad t \geq t_0.$$

Тому

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{m_1}\,\vec{F}_1(t)-\frac{1}{m_2}\,\vec{F}_2(t)\right| &\leq \frac{\left|\vec{F}_1(t)\right|}{m_1}+\frac{\left|\vec{F}_2(t)\right|}{m_2}= \\ &= \frac{Gm_2}{|\vec{r}_2(t-\tau_2(t))-\vec{r}_1(t)|^2}+\frac{Gm_1}{|\vec{r}_1(t-\tau_1(t))-\vec{r}_2(t)|^2} \leq \\ &\leq \frac{4G(m_1+m_2)}{|\vec{r}_1(t)-\vec{r}_2(t)|^2}, \quad t \geq t_0.\end{aligned}$$

Отже, на підставі (48), (51) та того, що $|\vec{v}_*(t)|$ монотонно спадає на $[t_0,t_1)$,

$$\begin{aligned}\int\limits_{t_0}^{t}\left|\frac{1}{m_1}\,\vec{F}_1(s)-\frac{1}{m_2}\,\vec{F}_2(s)\right|ds &= \int\limits_{t_0}^{t}\left|\frac{1}{m_1}\,\vec{F}_1(s)-\frac{1}{m_2}\,\vec{F}_2(s)\right|\frac{|d(\vec{r}_1(s)-\vec{r}_2(s))|}{|\vec{v}_*(s)|} \leq \\ &\leq \int\limits_{t_0}^{t}\frac{4G(m_1+m_2)}{|\vec{r}_1(s)-\vec{r}_2(s)|^2}\,\frac{|d|\vec{r}_1(s)-\vec{r}_2(s)||}{|\vec{v}_*(s)|} \leq \\ &\leq \frac{4G(m_1+m_2)}{|\vec{v}_*(t)|}\left|\frac{1}{|\vec{r}_1(t_0)-\vec{r}_2(t_0)|}-\frac{1}{|\vec{r}_1(t)-\vec{r}_2(t)|}\right|\end{aligned}$$

для всіх $t \in [t_0,t_1)$, і згідно з (50) маємо

$$|\vec{v}_*(t)| \geq |\vec{a}_1-\vec{a}_2|-\varepsilon-\frac{1}{|\vec{v}_*(t)|}\left|\frac{4G(m_1+m_2)}{|\vec{r}_1(t_0)-\vec{r}_2(t_0)|}-\frac{4G(m_1+m_2)}{|\vec{r}_1(t)-\vec{r}_2(t)|}\right|, \quad t \in [t_0,t_1). \tag{52}$$

Завдяки (48) величина $|\vec{r}_1(t)-\vec{r}_2(t)|$ є строго зростаючою на відрізку $[t_0,t_1]$. Тому з (52) одержуємо

$$|\vec{v}_*(t)| \geq |\vec{a}_1-\vec{a}_2|-\varepsilon-\frac{4G(m_1+m_2)}{|\vec{v}_*(t)|\,|\vec{r}_1(t_0)-\vec{r}_2(t_0)|}, \quad t \in [t_0,t_1). \tag{53}$$

Оцінимо знизу величину $|\vec{v}_*(t)|$ на проміжку $[t_0,t_1)$. На підставі (48) і (53)

$$|\vec{v}_*(t)|^2-(|\vec{a}_1-\vec{a}_2|-\varepsilon)|\vec{v}_*(t)| \geq -\frac{4G(m_1+m_2)}{|\vec{r}_1(t_0)-\vec{r}_2(t_0)|}, \quad t \in [t_0,t_1).$$

Тому

$$\left(|\vec{v}_*(t)|-\frac{|\vec{a}_1-\vec{a}_2|-\varepsilon}{2}\right)^2 \geq \frac{(|\vec{a}_1-\vec{a}_2|-\varepsilon)^2}{4}-\frac{4G(m_1+m_2)}{|\vec{r}_1(t_0)-\vec{r}_2(t_0)|}, \quad t \in [t_0,t_1).$$

Отже, з урахуванням (43), (50) і (53)

$$|\vec{v}_*(t)| \geq \frac{|\vec{a}_1 - \vec{a}_2| - \varepsilon}{2} + \sqrt{\frac{(|\vec{a}_1 - \vec{a}_2| - \varepsilon)^2}{4} - \frac{4G(m_1 + m_2)}{|\vec{r}_1(t_0) - \vec{r}_2(t_0)|}}, \quad t \in [t_0, t_1). \tag{54}$$

Оскільки функція $|\vec{v}_*(t)|$ неперервна і число

$$\lambda = \frac{|\vec{a}_1 - \vec{a}_2| - \varepsilon}{2} + \sqrt{\frac{(|\vec{a}_1 - \vec{a}_2| - \varepsilon)^2}{4} - \frac{4G(m_1 + m_2)}{|\vec{r}_1(t_0) - \vec{r}_2(t_0)|}}$$

додатне, то нерівність (54) суперечить (49).

Таким чином, припущення про виконання співвідношення (49) є хибним.

Отже, нерівність (48) виконується при $t_1 = +\infty$.

Далі, очевидно, що завдяки виконанню для кожного $t \geq t_0$ нерівності $|\vec{v}_*(t)| \geq \lambda$ справджується співвідношення (44).

Таким чином, множина траєкторій руху точок M_1 і M_2, для кожної з яких $d(M_1, M_2) \to \to +\infty$ при $t \to +\infty$ і $\vec{v}_\sigma(t) \neq \vec{0}$, $t \geq t_0$, є не порожньою. Усі траєкторії руху точки M_1 відносно точки M_2 цієї множини завдяки (42) (тоді $|\vec{v}_{**}(t)| > 0$ для всіх $t \geq t_0$) є спіралеподібними.

11. Нестійкість необмежених рухів тіл. Із наведених досліджень випливає, що в реальному просторі зі скінченною швидкістю гравітації два тіла рухаються не за законами Кеплера, а відбувається зіткнення їх або траєкторії руху одного тіла відносно другого тіла є необмеженими.

Дослідимо нестійкість руху цих тіл.

Позначимо через

$$\vec{r}_i(t, t_0, \vec{\varphi}_{0,1}, \vec{\varphi}_{0,2}, \vec{\varphi}_{1,1}, \vec{\varphi}_{1,2}), \quad i = \overline{1,2}, \tag{55}$$

розв'язки системи рівнянь (10), що задовольняють початкові умови (11).

Рух точок M_1 і M_2, що описується векторними функціями (55), називається *стійким (за Ляпуновим)*, якщо для кожного як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta > 0$, що для будь-якого іншого руху цих точок, що описується векторними функціями

$$\hat{\vec{r}}_i\left(t, t_0, \hat{\vec{\varphi}}_{0,1}, \hat{\vec{\varphi}}_{0,2}, \hat{\vec{\varphi}}_{1,1}, \hat{\vec{\varphi}}_{1,2}\right), \quad i = \overline{1,2} \tag{56}$$

(тут $\hat{\vec{\varphi}}_{0,1}, \hat{\vec{\varphi}}_{0,2}, \hat{\vec{\varphi}}_{1,1}, \hat{\vec{\varphi}}_{1,2}$ — неперервні функції, аналогічні функціям $\vec{\varphi}_{0,1}, \vec{\varphi}_{0,2}, \vec{\varphi}_{1,1}, \vec{\varphi}_{1,2}$), із нерівності

$$\sup_{s \in [t_0 - \tau_1(t_0), t_0]} \left(\left|\vec{\varphi}_{0,1}(s) - \hat{\vec{\varphi}}_{0,1}(s)\right| + \left|\vec{\varphi}_{1,1}(s) - \hat{\vec{\varphi}}_{1,1}(s)\right|\right) + \\ + \sup_{s \in [t_0 - \tau_2(t_0), t_0]} \left(\left|\vec{\varphi}_{0,2}(s) - \hat{\vec{\varphi}}_{0,2}(s)\right| + \left|\vec{\varphi}_{1,2}(s) - \hat{\vec{\varphi}}_{1,2}(s)\right|\right) < \delta, \tag{57}$$

випливає

$$\sum_{i=1}^{2} \left|\vec{r}_i\left(t, t_0, \vec{\varphi}_{0,1}, \vec{\varphi}_{0,2}, \vec{\varphi}_{1,1}, \vec{\varphi}_{1,2}\right) - \hat{\vec{r}}_i\left(t, t_0, \hat{\vec{\varphi}}_{0,1}, \hat{\vec{\varphi}}_{0,2}, \hat{\vec{\varphi}}_{1,1}, \hat{\vec{\varphi}}_{1,2}\right)\right| < \varepsilon, \quad t \geq t_0.$$

Рух точок M_1 і M_2, що описується векторними функціями (55), називається *нестійким (за Ляпуновим)*, якщо існує таке число $\varepsilon > 0$, що для кожного як завгодно малого числа $\delta > 0$, знайдуться такі рух цих точок, що описується векторними функціями (56), і момент часу $t_1 > t_0$, для яких виконуються співвідношення (57) і

$$\sum_{i=1}^{2} \left| \vec{r}_i\left(t_1, t_0, \vec{\varphi}_{0,1}, \vec{\varphi}_{0,2}, \vec{\varphi}_{1,1}, \vec{\varphi}_{1,2}\right) - \vec{\hat{r}}_i\left(t_1, t_0, \vec{\hat{\varphi}}_{0,1}, \vec{\hat{\varphi}}_{0,2}, \vec{\hat{\varphi}}_{1,1}, \vec{\hat{\varphi}}_{1,2}\right)\right| > \varepsilon.$$

Очевидно, що рух точок M_1 і M_2, що описується векторними функціями (55), є нестійким, якщо нестійким є відповідний рух точки M_1 відносно точки M_2, тобто існує таке число $\varepsilon > 0$, що для кожного як завгодно малого числа $\delta > 0$ знайдуться такі рух цих точок, що описується векторними функціями (56), і момент часу $t_1 > t_0$, для яких виконуються співвідношення (57) і для функцій

$$\vec{r}\left(t, t_0, \vec{\varphi}_{0,1}, \vec{\varphi}_{0,2}, \vec{\varphi}_{1,1}, \vec{\varphi}_{1,2}\right) = \vec{r}_1\left(t, t_0, \vec{\varphi}_{0,1}, \vec{\varphi}_{0,2}, \vec{\varphi}_{1,1}, \vec{\varphi}_{1,2}\right) - \vec{r}_2\left(t, t_0, \vec{\varphi}_{0,1}, \vec{\varphi}_{0,2}, \vec{\varphi}_{1,1}, \vec{\varphi}_{1,2}\right),$$

$$\vec{\hat{r}}\left(t, t_0, \vec{\hat{\varphi}}_{0,1}, \vec{\hat{\varphi}}_{0,2}, \vec{\hat{\varphi}}_{1,1}, \vec{\hat{\varphi}}_{1,2}\right) = \vec{\hat{r}}_1\left(t, t_0, \vec{\hat{\varphi}}_{0,1}, \vec{\hat{\varphi}}_{0,2}, \vec{\hat{\varphi}}_{1,1}, \vec{\hat{\varphi}}_{1,2}\right) - \vec{\hat{r}}_2\left(t, t_0, \vec{\hat{\varphi}}_{0,1}, \vec{\hat{\varphi}}_{0,2}, \vec{\hat{\varphi}}_{1,1}, \vec{\hat{\varphi}}_{1,2}\right)$$

справедлива нерівність

$$\left| \vec{r}\left(t_1, t_0, \vec{\varphi}_{0,1}, \vec{\varphi}_{0,2}, \vec{\varphi}_{1,1}, \vec{\varphi}_{1,2}\right) - \vec{\hat{r}}\left(t_1, t_0, \vec{\hat{\varphi}}_{0,1}, \vec{\hat{\varphi}}_{0,2}, \vec{\hat{\varphi}}_{1,1}, \vec{\hat{\varphi}}_{1,2}\right)\right| > \varepsilon.$$

Тому в подальшому покажемо нестійкість руху точки M_1 відносно точки M_2 у випадку, коли траєкторії руху цих точок є необмеженими.

Припустимо, що векторна функція $\vec{r}(t, t_0, \vec{\varphi}_{0,1}, \vec{\varphi}_{0,2}, \vec{\varphi}_{1,1}, \vec{\varphi}_{1,2})$, є необмеженою, тобто $\overline{\lim}_{t\to+\infty} d(M_1, M_2) = +\infty$.

Не обмежуючи загальності, можна вважати, що траєкторія руху точки M_1 відносно точки M_2 є плоскою і знаходиться на деякій площині E, яка містить центр мас точок M_1 і M_2 (точку O). Вважаємо, що на площині E вибрана декартова прямокутна система координат із початком координат у точці O.

Зафіксуємо довільний кут $\omega \in (0, 2\pi]$ і розглянемо оператор A_ω повороту на кут ω точок площини E та відповідних векторів навколо центра обертання — точки O. Цей оператор подається за допомогою матриці $\begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix}$ [15, с. 286]. Це означає, що коли $\vec{b} = A_\omega \vec{a}$ і $\vec{a} = (a_1, a_2)$, тоді $\vec{b} = (a_1\cos\omega - a_2\sin\omega, a_1\sin\omega + a_2\cos\omega)$, де a_1 і a_2 — координати вектора $\vec{a}$.

Розглянемо функцію $\vec{r}(t, t_0, A_\omega\vec{\varphi}_{0,1}, A_\omega\vec{\varphi}_{0,2}, A_\omega\vec{\varphi}_{1,1}, A_\omega\vec{\varphi}_{1,2})$. Тут $A_\omega\vec{\varphi}_{0,1}$, $A_\omega\vec{\varphi}_{0,2}$, $A_\omega\vec{\varphi}_{1,1}$ і $A_\omega\vec{\varphi}_{1,2}$ — функції $A_\omega\vec{\varphi}_{0,1}(s)$, $A_\omega\vec{\varphi}_{0,2}(s)$, $A_\omega\vec{\varphi}_{1,1}(s)$ і $A_\omega\vec{\varphi}_{1,2}(s)$ відповідно, для яких

$$\vec{r}_i\left(s, t_0, A_\omega\vec{\varphi}_{0,1}, A_\omega\vec{\varphi}_{0,2}, A_\omega\vec{\varphi}_{1,1}, A_\omega\vec{\varphi}_{1,2}\right) = A_\omega\vec{\varphi}_{0,i}(s), \quad s \in [t_0 - \tau_i(t_0), t_0], \quad i = \overline{1,2}, \tag{58}$$

$$\dot{\vec{r}}\left(s, t_0, A_\omega\vec{\varphi}_{0,1}, A_\omega\vec{\varphi}_{0,2}, A_\omega\vec{\varphi}_{1,1}, A_\omega\vec{\varphi}_{1,2}\right) = A_\omega\vec{\varphi}_{1,i}(s), \quad s \in [t_0 - \tau_i(t_0), t_0], \quad i = \overline{1,2}. \tag{59}$$

Неважко перевірити, що розв'язками системи рівнянь (10) також є векторні функції

$$A_\omega\vec{r}_i\left(t, t_0, \vec{\varphi}_{0,1}, \vec{\varphi}_{0,2}, \vec{\varphi}_{1,1}, \vec{\varphi}_{1,2}\right), \quad i = \overline{1,2},$$

для яких

$$A_\omega\vec{r}_i\left(s, t_0, \vec{\varphi}_{0,1}, \vec{\varphi}_{0,2}, \vec{\varphi}_{1,1}, \vec{\varphi}_{1,2}\right) = A_\omega\vec{\varphi}_{0,i}(s), \quad s \in [t_0 - \tau_i(t_0), t_0], \quad i = \overline{1,2},$$

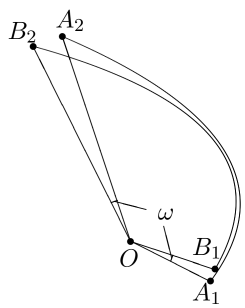

Рис. 5. Випадок спіралеподібного руху точки M_1 відносно точки M_2.

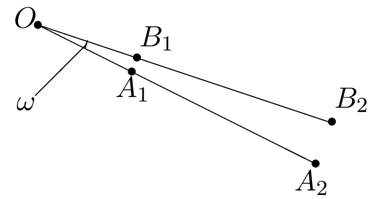

Рис. 6. Випадок прямолінійного руху точки M_1 відносно точки M_2.

і

$$(A_\omega \vec{r}_i\,(s, t_0, \vec{\varphi}_{0,1}, \vec{\varphi}_{0,2}, \vec{\varphi}_{1,1}, \vec{\varphi}_{1,2}))' = A_\omega \vec{\varphi}_{1,i}(s), \quad s \in [t_0 - \tau_i(t_0), t_0], \quad i = \overline{1,2}.$$

Завдяки єдиності розв'язку системи рівнянь (10), що задовольняє умови (58) і (59), справджуються рівності

$$\vec{r}_i\,(t, t_0, A_\omega\vec{\varphi}_{0,1}, A_\omega\vec{\varphi}_{0,2}, A_\omega\vec{\varphi}_{1,1}, A_\omega\vec{\varphi}_{1,2}) = A_\omega \vec{r}_i\,(t, t_0, \vec{\varphi}_{0,1}, \vec{\varphi}_{0,2}, \vec{\varphi}_{1,1}, \vec{\varphi}_{1,2})\,, \quad i = \overline{1,2}, \tag{60}$$

і, отже,

$$A_\omega \vec{r}\,(t, t_0, \vec{\varphi}_{0,1}, \vec{\varphi}_{0,2}, \vec{\varphi}_{1,1}, \vec{\varphi}_{1,2}) = \vec{r}\,(t, t_0, A_\omega\vec{\varphi}_{0,1}, A_\omega\vec{\varphi}_{0,2}, A_\omega\vec{\varphi}_{1,1}, A_\omega\vec{\varphi}_{1,2})\,.$$

Розглянемо траєкторії руху точки M_1 відносно точки M_2, що відповідають функціям

$$\vec{r}\,(t, t_0, \vec{\varphi}_{0,1}, \vec{\varphi}_{0,2}, \vec{\varphi}_{1,1}, \vec{\varphi}_{1,2}) \tag{61}$$

і

$$\vec{r}\,(t, t_0, A_\omega\vec{\varphi}_{0,1}, A_\omega\vec{\varphi}_{0,2}, A_\omega\vec{\varphi}_{1,1}, A_\omega\vec{\varphi}_{1,2}) \tag{62}$$

(див. рис. 5, випадок спіралеподібного руху, і рис. 6, випадок прямолінійного руху).

Траєкторії з точками A_1 і A_2 відповідають функції (61), а траєкторії з точками B_1 і B_2 — функції (62).

Завдяки (60) другі траєкторії отримуються з перших траєкторій поворотом на кут ω проти годинникової стрілки навколо точки O.

Зазначимо, що

$$\begin{gathered}\overrightarrow{OA_1} = \vec{r}\,(t_0, t_0, \vec{\varphi}_{0,1}, \vec{\varphi}_{0,2}, \vec{\varphi}_{1,1}, \vec{\varphi}_{1,2})\,, \\ \overrightarrow{OA_2} = \vec{r}\,(t, t_0, \vec{\varphi}_{0,1}, \vec{\varphi}_{0,2}, \vec{\varphi}_{1,1}, \vec{\varphi}_{1,2})\,,\end{gathered} \tag{63}$$

$$\begin{gathered}\overrightarrow{OB_1} = \vec{r}\,(t_0, t_0, A_\omega\vec{\varphi}_{0,1}, A_\omega\vec{\varphi}_{0,2}, A_\omega\vec{\varphi}_{1,1}, A_\omega\vec{\varphi}_{1,2})\,, \\ \overrightarrow{OB_2} = \vec{r}\,(t, t_0, A_\omega\vec{\varphi}_{0,1}, A_\omega\vec{\varphi}_{0,2}, A_\omega\vec{\varphi}_{1,1}, A_\omega\vec{\varphi}_{1,2})\end{gathered} \tag{64}$$

і кути між векторами $\overrightarrow{OA_1}$ і $\overrightarrow{OB_1}$, а також між векторами $\overrightarrow{OA_2}$ і $\overrightarrow{OB_2}$ дорівнюють ω.

Оскільки траєкторія руху точки M_1 відносно точки M_2 є необмеженою, то для кожного $\omega > 0$ $\overline{\lim}_{t\to+\infty} d(A_2, B_2) = +\infty$ і згідно з (63) та (64)

$$\overline{\lim}\, s_{t\to+\infty}\Big|\vec{r}\big(t, t_0, \vec{\varphi}_{0,1}, \vec{\varphi}_{0,2}, \vec{\varphi}_{1,1}, \vec{\varphi}_{1,2}\big) - \\ - \vec{r}\big(t, t_0, A_\omega\vec{\varphi}_{0,1}, A_\omega\vec{\varphi}_{0,2}, A_\omega\vec{\varphi}_{1,1}, A_\omega\vec{\varphi}_{1,2}\big)\Big| = +\infty \quad \text{для всіх} \quad \omega > 0. \tag{65}$$

Зазначимо, що $\lim\limits_{\omega\to 0} A_\omega \vec{a} = \vec{a}$ для кожного вектора $\vec{a}$. Тому завдяки неперервності функцій $\vec{\varphi}_{0,1}(s),\ \vec{\varphi}_{1,1}(s)$ на $[t_0 - \tau_1(t_0), t_0]$ і $\vec{\varphi}_{0,2}(s),\ \vec{\varphi}_{1,2}(s)$ на $[t_0 - \tau_2(t_0), t_0]$ маємо

$$\lim_{\omega\to 0}\Bigg(\sup_{s\in[t_0-\tau_1(t_0), t_0]}\big(|A_\omega\vec{\varphi}_{0,1}(s) - \vec{\varphi}_{0,1}(s)| + |A_\omega\vec{\varphi}_{1,1}(s) - \vec{\varphi}_{1,1}(s)|\big) + \\ + \sup_{s\in[t_0-\tau_2(t_0), t_0]}\big(|A_\omega\vec{\varphi}_{0,2}(s) - \vec{\varphi}_{0,2}(s)| + |A_\omega\vec{\varphi}_{1,2}(s) - \vec{\varphi}_{1,2}(s)|\big)\Bigg) = 0.$$

Отже, виконується співвідношення (65), якою б малою не була величина

$$\delta = \sup_{s\in[t_0-\tau_1(t_0), t_0]}\big(|A_\omega\vec{\varphi}_{0,1}(s) - \vec{\varphi}_{0,1}(s)| + |A_\omega\vec{\varphi}_{1,1}(s) - \vec{\varphi}_{1,1}(s)|\big) + \\ + \sup_{s\in[t_0-\tau_2(t_0), t_0]}\big(|A_\omega\vec{\varphi}_{0,2}(s) - \vec{\varphi}_{0,2}(s)| + |A_\omega\vec{\varphi}_{1,2}(s) - \vec{\varphi}_{1,2}(s)|\big) > 0,$$

що означає *нестійкість руху точки M_1 відносно точки M_2, якщо траєкторія руху M_1 відносно M_2 є необмеженою.*

Якщо траєкторія руху одного тіла відносно другого тіла є обмеженою, то за скінченний проміжок часу відбудеться зіткнення тіл. Рух тіл у цьому випадку також можна вважати нестійким, оскільки в момент їх зіткнення відбуваються суттєві якісні зміни станів тіл.

12. Деякі висновки та зауваження. 1. Наведені дослідження про рух двох тіл довільних мас вказують на те, що в реальному світі, в якому швидкість гравітації є скінченною, небесні тіла рухаються за законами, що відрізняються від законів, покладених в основу класичної небесної механіки.

2. Для двох тіл характерними є спіралеподібні траєкторії руху. Такого типу траєкторіям у небесній механіці не приділено належної уваги, оскільки вони не узгоджуються із законами Кеплера. Множина таких рухів не є порожньою, що підтверджується, наприклад, спіральними галактиками, до яких відносяться, зокрема, наша Галактика і Туманність Андромеди. Подвійні зірки, зірка та чорна діра також рухаються не за законами Кеплера (згідно з викладеними в статті дослідженнями), а рухаються по спіралеподібних або прямолінійних кривих.

3. За допомогою спостережень за небесними об'єктами важко помітити відхилення реальних траєкторій їхнього руху від траєкторій руху, знайдених з урахуванням законів Кеплера. Такі відхилення можуть бути дуже малими (відхилення залежать від станів небесних об'єктів у "початковий момент" часу). Наприклад, відстань між Землею і Сонцем за рік збільшується приблизно на 15 см, а між Землею і Місяцем – на 3,82 см [16].

Відхилення від еліптичних (за Кеплером) траєкторій руху двох тіл викликане зростанням секторної швидкості руху одного тіла відносно іншого. Причиною цього є скінченна швидкість гравітації. Зазначимо, що збільшення відстаней між Землею і Сонцем та між Місяцем і Землею авторами статті [16] пояснюється припливо-відливною взаємодією. Однак, в ідеальному випадку, коли маси тіл зосереджені в центрах мас (тоді припливо-відливна взаємодія відсутня), згідно з викладеною теорією руху тіл також можливі збільшення відстані між тілами (а можливі і зменшення відстані між тілами). Це говорить про неповноту причин збільшення відстані між небесними об'єктами, наведених у [16], і що використання для цих цілей закону про зростання секторної швидкості заслуговує уваги.

Такі відхилення (15 см та 3,82 см) в порівнянні з відстанями від Землі до Сонця та до Місяця ($1{,}495978706960\times10^{11}\pm0{,}1$ м та $3{,}844\times10^{8}$ м) є надзвичайно малими. Перенесення законів Кеплера на реальні системи (зі скінченною швидкістю гравітації), аналогічні (за розмірами) Сонячній системі, не приводять до великих похибок у випадку малих проміжків часу. Однак у випадку великих проміжків часу (це в першу чергу стосується руху тіл із необмеженими траєкторіями) похибки можуть бути достатньо великими.

4. Використання звичайних диференціальних рівнянь (1) для дослідження динаміки руху двох тіл на великих проміжках часу може привести до значних розбіжностей між отриманими (у процесі досліджень) та реальними рухами тіл. Такі розбіжності будуть відсутні у випадку використання диференціальних рівнянь із запізнювальним аргументом (10). При цьому не можна не враховувати нестійкість необмежених траєкторій руху тіл.

Література

1. *Брумберг В. А.* Релятивистская небесная механика. – М.: Наука, 1972. – 382 с.
2. *Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. Н.* Математические аспекты классической и небесной механики. – М: URSS, 2002. – 414 с.
3. *Мультон Ф.* Введение в небесную механику. – М.; Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1935. – 480 с.
4. *Голубева О. В.* Теоретическая механика. – М: Высш. шк., 1968. – 488 с.
5. *Копейкин С. М., Фомалонт Э.* Фундаментальный предел скорости гравитации и его измерение // Земля и Вселенная. – 2004. – № 3. URL: http://ziv.telescopes.ru/rubric/hypothesis/?pub=1
6. *Слюсарчук В. Ю.* Математична модель сонячної системи з урахуванням швидкості гравітації // Нелінійні коливання. – 2018. – **21**, № 2. – С. 238 – 261.
7. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3-х т. – М: Наука, 1966. – Т. 1. – 608 с.
8. *Мышкис А. Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. – М.; Л.: Гостехиздат, 1951. – 255 с.
9. *Беллман Р., Кук К. Л.* Дифференциально-разностные уравнения. – М: Мир, 1967. – 548 с.
10. *Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – М.: Наука, 1971. – 296 с.
11. *Слюсарчук В. Ю.* Абсолютна стійкість динамічних систем із післядією. – Рівне: Вид-во Нац. ун-ту вод. госп-ва та природокористування, 2003. – 366 с.
12. *Цесевич В. П.* Что и как наблюдать на небе. – М: Наука, 1984. – 304 с.
13. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1968. – 496 с.
14. *Садовничий В. А.* Теория операторов. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986. – 368 с.
15. *Мышкис А. Д.* Лекции по высшей математике. – М: Наука, 1969. – 640 с.
16. *Miura Takaho, Arakida Hideyoshi, Kasai Masumi, Kuramata Shuichi.* Secular increase of the astronomical unit: a possible explanation in terms of the total angular momentum conservation law // Publ. Astron. Soc. Japan. – 2009. – **61**, № 6. – P. 1247 – 1250.

Одержано 25.03.18