УДК 517.956.3

НЕЛІНІЙНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ЛЯПУНОВА У ПРОСТОРІ $\mathbf{L}_p$*

Є. В. Панасенко

Запоріз. нац. ун-т
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, 69600, Україна
e-mail: panasenko.yevgeniy@gmail.com

О. О. Покутний

Ін-т математики НАН України
вул. Терещенківська, 3, Київ, 01601, Україна
e-mail: lenasas@gmail.com

We investigate boundary-value problems for a Lyapunov-type equation in the space $\mathbf{L}_p(I, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$. Necessary and sufficient conditions of solvability of the corresponding boundary-value problem are obtained both in linear and nonlinear cases. Solutions of the linear boundary-value problem are constructed by using a generalized Green's operator. For finding approximate solutions of the nonlinear equation, we propose iterative Newton – Kantorovich-type algorithms.

Досліджуються крайові задачі для рівняння типу Ляпунова у просторі $\mathbf{L}_p(I, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$. Отримано необхідні та достатні умови розв'язності відповідної крайової задачі як у лінійному, так і в нелінійному випадках. За допомогою узагальненого оператора Гріна побудовано розв'язки лінійної крайової задачі. Для знаходження наближених розв'язків нелінійного рівняння запропоновано збіжні ітеративні алгоритми типу Ньютона – Канторовича.

Вступ. Рівняння Ляпунова посідає одне з центральних місць у якісній теорії диференціальних рівнянь. Крайові задачі для рівняння Ляпунова та Ріккаті досліджувалися в скінченновимірному та нескінченновимірному просторах, як у неперервному, так і дискретному випадках у багатьох роботах. Зазначимо такі роботи, як [1 – 8].

Дана робота є певним продовженням робіт [6, 7]. Досліджується біфуркація розв'язків для рівняння Ляпунова у просторі інтегровних із p-м степенем операторів. У цьому полягає основна відмінність цієї роботи від існуючих. Для отримання основних результатів застосовується розвинення методу Ляпунова – Шмідта [9]. Розглядаються крайові задачі для нелінійного рівняння Ляпунова зі значеннями не в звичайному функціональному просторі, а в просторі операторів, що мають інтегровну з p-м степенем норму, тобто належать простору $L_p(I, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$. Вони належать до класу еволюційних рівнянь [10 – 12]. Наведено достатні умови, за яких розв'язок належить до відповідного простору, та показано певні апріорні нерівності. Розглядаються резонансні, нерегулярні (некоректні) задачі. У скінченновимірному випадку такі задачі досліджувалися, наприклад, у зазначених вище недавніх роботах [1 – 4]. У нескінченновимірному випадку вони мало досліджені. Відомо, що для розв'язання операторно-диференціальних рівнянь потужним виявився апарат теорії напівгруп, про що свідчать, наприклад, класичні роботи [13 – 15] та [16 – 19], де також вивчалися деякі класи нерегулярних вироджених операторно-диференціальних задач Коші. У даній

* Підтримано грантом НАН України дослідницької групи молодих вчених НАН України для проведення досліджень за пріоритетними напрямками розвитку науки і техніки у 2018 р. (№ 16-10/2018).

© Є. В. Панасенко, О. О. Покутний, 2018

роботі до дослідження крайових задач застосовується апарат теорії узагальнено-обернених операторів [20 – 23] у поєднанні з методами теорії напівгруп та апріорні нерівності. Такі задачі мають широке коло застосувань як у задачах теорії стійкості руху, так і в задачах прикладної механіки [24].

1. Постановка задачі. Розглянемо крайову задачу

$$\dot{Z}(t,\varepsilon) = A(t)Z(t,\varepsilon) - Z(t,\varepsilon)B(t) + \varepsilon R(Z(t,\varepsilon),t,\varepsilon) + \Phi(t), \tag{1}$$

$$\ell Z(\cdot,\varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(Z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon), \tag{2}$$

де $Z = Z(t,\varepsilon)$ — невідома оператор-функція з простору $L_p(I;\mathcal{L}(H))$, похідна якої належить також $L_p(I,\mathcal{L}(H))$, $A(t)$, $B(t)$ — обмежені оператор-функції з простору $\mathcal{L}(L_p(I;\mathcal{L}(H)))$, $\Phi(t)$ — інтегровна з p-степенем оператор-функція з простору $L_p(I,\mathcal{L}(H))$, $R(Z(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ — нелінійна оператор-функція; α — елемент простору H, $J(Z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ — нелінійний обмежений оператор; ε — малий параметр; оператор ℓ — лінійний неперервний, що переводить розв'язки (1) у простір Гільберта H_1, $\ell\colon W_p^1(I,\mathcal{L}(H)) \to H_1$, $I \subset \mathbb{R}$,

$$L_p(I,H) := \left\{ x\colon I \to H, \|x\|_{L_p(I,H)} = \left(\int\limits_I \|x(t)\|_H^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}.$$

Тоді

$$L_p(I,\mathcal{L}(H)) := \Bigg\{ X\colon I \to \mathcal{L}(H), X(t) \in \mathcal{L}(H)\ \forall t \in I, \|X\|_{L_p(I,\mathcal{L}(H))} =$$

$$= \left(\int\limits_I \|X(t)\|_{\mathcal{L}(H)}^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \Bigg\},$$

$$W_p^1(I,H) = \left\{ z\colon I \to H, z \in L_p(I,H); \dot{z} \in L_p(I,H) \right\},$$

$\mathcal{L}(H)$ — простір лінійних та обмежених операторів, що діють із гільбертова простору H у себе:

$$\mathcal{L}(H) = \{ A\colon H \to H, A \text{ лінійний та неперервний} \}.$$

Задача полягає у знаходженні розв'язків крайової задачі (1), (2), які при $\varepsilon = 0$ перетворюються в один із розв'язків породжуючої лінійної крайової задачі.

2. Лінійна задача. При $\varepsilon = 0$ отримаємо породжуючу крайову задачу

$$\dot{Z}(t,\varepsilon) = A(t)Z(t) - Z(t)B(t) + \Phi(t), \tag{3}$$

$$\ell Z(\cdot) = \alpha. \tag{4}$$

Розглянемо лінійний оператор $\mathbf{K}_\tau^t$, який переводить оператор-функцію $\Phi = \Phi(t)$ з простору $L_p(I,\mathcal{L}(H))$ в оператор-функцію $K_\tau^t[\Phi] \in L_p(I \times I, \mathcal{L}(H))$ вигляду

$$\mathbf{K}_\tau^t[\Phi] = U(t)U^{-1}(\tau)\Phi(\tau)V^{-1}(t)V(\tau), \tag{5}$$

де $U(t)$, $V(t)$ — еволюційні оператори операторних рівнянь

$$\dot{X}(t,\tau) = A(t)X(t,\tau), \qquad X(\tau,\tau) = I, \quad X(t) := X(t,0), \tag{6}$$

$$\dot{Y}(t,\tau) = B(t)Y(t,\tau), \qquad Y(\tau,\tau) = I, \qquad Y(t) := Y(t,0), \tag{7}$$

відповідно. Очевидно, що $V^{-1}(t)$ задовольняє операторно-диференціальному рівнянню

$$\dot{Y}(t,\tau) = -Y(t,\tau)B(t), \qquad Y(\tau,\tau) = I, \qquad Y(t) = Y(t,0).$$

За допомогою цього оператора можна зобразити загальний розв'язок рівняння (4) у вигляді

$$Z(t) = \mathbf{K}_0^t[M] + \int\limits_0^t \mathbf{K}_\tau^t[\Phi]\, d\tau, \tag{8}$$

де довільний оператор M належить $\mathcal{L}(H)$. Будемо вимагати, щоб для ядра операторного рівняння виконувалася нерівність

$$\int\limits_I \int\limits_I \left\|U(t)U^{-1}(\tau)\right\|_{\mathcal{L}(H)}^q \left\|V^{-1}(t)V(\tau)\right\|_{\mathcal{L}(H)}^q d\tau dt \le C, \quad C > 0,$$

або аналог нерівності Гельдера,

$$\forall \Phi \in L_p(I, \mathcal{L}(H)) \qquad \int\limits_I \int\limits_I \left\|K_\tau^t[\Phi]\right\|_{\mathcal{L}(H)} d\tau dt \le c||\mathbf{K}_\tau^t||_{L_q(I\times I, \mathcal{L}(\mathcal{H}))} \|\Phi\|_{L_p(I,\mathcal{L}(H))},$$

$\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1,\ c > 0$ — деяка стала, причому

$$||\mathbf{K}_\tau^t||_{L_q(I\times I, \mathcal{L}(\mathcal{H}))} = \left(\int\limits_I \int\limits_I \left\|K_\tau^t\right\|_{\mathcal{L}(H)}^q d\tau dt \right)^{\frac{1}{q}} < \infty. \tag{9}$$

Застосовуючи нерівності до зображення (8), отримаємо (проінтегрувавши норму $\|Z(t)\|_{\mathcal{L}(H)}^p$ по відрізку I) нерівність

$$\|Z\|_{L_p(I,\mathcal{L}(H))} \le K\|M\|_{\mathcal{L}(H)} + K_1\|\Phi\|_{L_p(I,\mathcal{L}(H))}$$

або

$$\|Z\|_{L_p(I,\mathcal{L}(H))} \le K\|Z(0)\|_{\mathcal{L}(H)} + K_1\|\mathcal{D}Z\|_{L_p(I,\mathcal{L}(H))},$$

де

$$K = \sqrt[p]{\int\limits_I ||\mathbf{K}_0^t||^p dt}, \qquad K_1 = c\sqrt[q]{\left(\int\limits_I \int\limits_I \|\mathbf{K}_\tau^t\|_{\mathcal{L}(H)}^q d\tau dt \right)^{\frac{1}{q}}},$$

$$\mathcal{D}Z(t) := Z'(t) - A(t)Z(t) + Z(t)B(t) = \Phi(t).$$

Підставимо (8) у крайову умову (4) та отримаємо операторне рівняння відносно оператора M:

$$\mathbf{L}M = \alpha - \ell \int\limits_0^{(\cdot)} \mathbf{K}_\tau^{(\cdot)}[\Phi]\, d\tau, \tag{10}$$

де оператор $\mathbf{L}$ діє за правилом $\mathbf{L}M = \ell\mathbf{K}_0^{\cdot}[M]\colon \mathcal{L}(H) \to H$. Припустимо, що оператор $\mathbf{L}$ є узагальнено-оборотним. Тоді, як показано в [11], він є нормально розв'язним і існують обмежені проектори $\mathcal{P}_{Y_L}\colon H \to Y_L$ та $\mathcal{P}_Y\colon H \to Y$, які індукують розбиття $\mathcal{L}(H)$ і H у прямі топологічні суми замкнених підпросторів

$$\mathcal{L}(H) = N(\mathbf{L}) \oplus X_{\mathbf{L}},$$

$$H = Y_{\mathbf{L}} \oplus R(\mathbf{L}).$$

Внаслідок нормальної розв'язності оператора $\mathbf{L}$ рівняння (10) є розв'язним [9] тоді і тільки тоді, коли його права частина задовольняє умову

$$\mathcal{P}_{Y_{\mathbf{L}}}\left[\alpha - \ell\int\limits_0^{(\cdot)} \mathbf{K}_\tau^{(\cdot)}[\Phi]d\tau\right] = 0. \tag{11}$$

Тут $\mathcal{P}_{Y_{\mathbf{L}}}$ — проектор на ядро оператора $\mathbf{L}^*$, спряженого до оператора $\mathbf{L}$. Ця умова гарантує належність правої частини рівняння (10) множині значень оператора $\mathbf{L}$:

$$\left[\alpha - \ell\int\limits_0^{\cdot} \mathbf{K}_\tau^{\cdot}[\Phi]d\tau\right] \in R(\mathbf{L}).$$

При виконанні умови розв'язності (11) операторне рівняння (10) має множину розв'язків вигляду

$$M = \mathbf{L}^-\left[\alpha - \ell\int\limits_0^{(\cdot)} \mathbf{K}_\tau^{(\cdot)}[\Phi]d\tau\right] + \mathcal{P}_{N(\mathbf{L})}C,$$

де C — довільний лінійний обмежений оператор $C \in \mathcal{L}(H)$, $\mathcal{P}_{N(\mathbf{L})}$ — проектор на ядро оператора $\mathbf{L}$. Підставивши оператор M у зображення (8), отримаємо загальний розв'язок задачі (3), (4) у вигляді

$$Z_0(t, C) = \mathbf{K}_0^t[\mathcal{P}_{N(\mathbf{L})}C] + (G[\Phi, \alpha])(t), \tag{12}$$

де узагальнений оператор Гріна визначається таким чином:

$$(G[\Phi, \alpha])(t) = \int_0^t \mathbf{K}_\tau^t[\Phi]d\tau - \mathbf{K}_0^t\left[\mathbf{L}^-\ell\int\limits_0^{(\cdot)} \mathbf{K}_\tau^{(\cdot)}[\Phi]d\tau\right] + \mathbf{K}_0^t[\mathbf{L}^-\alpha].$$

Отже, отримали наступну теорему.

Теорема 1. *Нехай оператор* $\mathbf{L}$ *є узагальнено-оборотним. Крайова задача (3), (4) має розв'язки тоді і тільки тоді, коли виконується умова* (11). *При цьому розв'язки крайової задачі (3), (4) мають вигляд (12).*

Зауваження. У випадку, коли оператор-функції $A(t)$ та $B(t)$ співпадають $(A(t) = B(t))$, крайову задачу (3), (4) можна переписати у вигляді

$$\dot{Z}(t,\varepsilon) = [A(t), Z(t)] + \Phi(t),$$

$$\ell Z(\cdot) = \alpha,$$

де

$$[A(t), Z(t)] = A(t)Z(t) - Z(t)A(t),$$

та відповідні формули для зображення розв'язків набувають більш простого вигляду. У цьому випадку оператор-функція $\mathbf{K}_\tau^t$ діє на $\Phi(t)$ таким чином:

$$\mathbf{K}_\tau^t[\Phi] = U(t)U^{-1}(\tau)\Phi(\tau)U^{-1}(t)U(\tau).$$

3. Нелінійна задача. Знайдемо необхідну умову існування розв'язків $Z(t,\varepsilon)$ крайової задачі (1), (2), які при $\varepsilon = 0$ перетворюються в породжуючий розв'язок $Z_0(t,C)$ вигляду (12).

Для цього будемо вимагати, щоб оператор-функція $R(Z,t,\varepsilon)$ та нелінійність $J(Z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ були неперервними в околі породжуючого розв'язку $Z_0(t,C)$.

Якщо крайова задача (1), (2) має розв'язок, то згідно з теоремою 1 повинна виконуватися умова розв'язності

$$\mathcal{P}_{Y_\mathbf{L}}\left[\alpha + \varepsilon J(Z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \ell\int_0^{(\cdot)} \mathbf{K}_\tau^{(\cdot)}\left[\varepsilon R(Z(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon) + \Phi(\tau)\right] d\tau\right] = 0.$$

Враховуючи умову розв'язності (11), отримуємо

$$\varepsilon\mathcal{P}_{Y_\mathbf{L}}\left[J(Z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \ell\int_0^{(\cdot)} \mathbf{K}_\tau^{(\cdot)}\left[R(Z(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\right] d\tau\right] = 0.$$

При $\varepsilon \neq 0$ маємо

$$\mathcal{P}_{Y_\mathbf{L}}\left[J(Z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \ell\int_0^{(\cdot)} \mathbf{K}_\tau^{(\cdot)}\left[R(Z(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\right] d\tau\right] = 0.$$

Враховуючи неперервність по t і ε оператор-функції $R(Z(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ та нелінійності $J(Z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$, переходимо до границі при $\varepsilon \to 0,\ Z(t,\varepsilon) \to Z_0(t,C^0).$ Остаточно одержуємо

$$F(C^0) = \mathcal{P}_{Y_\mathbf{L}}\left[J(Z_0(\cdot,C^0),0) - \ell\int_0^{(\cdot)} \mathbf{K}_\tau^{(\cdot)}\left[R(Z_0(\tau,C^0),\tau,0)\right] d\tau\right] = 0 \tag{13}$$

або

$$F(C^0) = \mathcal{P}_{Y_\mathbf{L}}\Big[J\Big(\mathbf{K}_0^{(\cdot)}[\mathcal{P}_{N(\mathbf{L})}C^0] + (G[\Phi,\alpha])(\cdot),0\Big) -$$

$$- \ell\int_0^{(\cdot)} \mathbf{K}_\tau^{(\cdot)}\Big[R\Big(\mathbf{K}_0^t[\mathcal{P}_{N(\mathbf{L})}C^0] + (G[\Phi,\alpha])(\tau),\tau,0\Big)\Big] d\tau\Big] = 0. \tag{14}$$

Таким чином, доведено необхідну умову існування розв'язків нелінійної крайової задачі у просторі $L_p(I;\mathcal{L}(H))$.

Теорема 2 (необхідна умова)**.** *Нехай виконано умову розв'язності (11) породжуючої крайової задачі (3), (4) та крайова задача (1), (2) має розв'язок* $Z(t,\varepsilon)\colon Z(\cdot,\varepsilon)\in L_p(I;\mathcal{L}(H))$, $Z(t,\cdot)\in C[0;\varepsilon_0]$, *який перетворюється при* $\varepsilon=0$ *в породжуючий розв'язок* $Z_0(t,C^0)$ *вигляду (12) з довільним оператором* $C=C^0$. *Тоді оператор* $C^0\in\mathcal{L}(H)$ *задовольняє операторне рівняння (13). Це рівняння будемо називати рівнянням для породжуючих операторів крайової задачі (1), (2).*

Якщо рівняння (13) має розв'язок, то породжуючому розв'язку $Z_0\left(t,C^0\right)$ може відповідати розв'язок $Z(t,\cdot)\in C[0;\varepsilon_0]\colon Z(t,0)=Z_0(t,C^0)$ крайової задачі (1), (2).

Знайдемо достатню умову існування розв'язків $Z(t,\varepsilon)$ крайової задачі (1), (2), які при $\varepsilon=0$ перетворюються в породжуючий розв'язок $Z_0(t,C^0)$ вигляду (12) з оператором $C=C^0$ породжуючої крайової задачі (3), (4).

Для отримання достатньої умови існування розв'язку виконаємо у крайовій задачі (1), (2) заміну змінних

$$Z(t,\varepsilon)=Z_0(t,C^0)+Y(t,\varepsilon),$$

в якій $Z_0(t,C^0)$ — породжуючий розв'язок вигляду (12), C^0 — лінійний та обмежений оператор з простору $\mathcal{L}(H)$, який задовольняє операторне рівняння для породжуючих операторів (14).

Враховуючи, що $Z_0(t,C^0)$ є розв'язком крайової задачі (3), (4), отримуємо крайову задачу

$$\dot{Y}(t,\varepsilon)=A(t)Y(t,\varepsilon)-Y(t,\varepsilon)B(t)+\varepsilon R(Z_0(t,C^0)+Y(t,\varepsilon),t,\varepsilon), \tag{15}$$

$$\ell Y(\cdot,\varepsilon)=\varepsilon J\left(Z_0(\cdot,C^0)+Y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\right). \tag{16}$$

Застосуємо до крайової задачі (15), (16) теорему 1, в якій нелінійності

$$R\left(Z_0(t,C^0)+Y(t,\varepsilon),t,\varepsilon\right), \qquad J\left(Z_0(\cdot,C^0)+Y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\right)$$

формально розглядаємо як неоднорідності. Крім того, формально розв'язок крайової задачі (15), (16) можна записати у вигляді

$$Y(t,\varepsilon)=K_0^t[\mathcal{P}_{N(\mathbf{L})}C]+\overline{Y}(t,\varepsilon),$$
$$\overline{Y}(t,\varepsilon)=\varepsilon\left(G\left[R\left(Z_0(t,C^0)+Y(t,\varepsilon),t,\varepsilon\right),J\left(Z_0(\cdot,C^0)+Y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\right)\right]\right)(t,\varepsilon).$$

Розв'язність крайової задачі (1), (2) еквівалентна розв'язності крайової задачі (15), (16). У подальшому будемо припускати, що нелінійності є строго-диференційовними в околі породжуючого розв'язку. Використовуючи неперервну диференційовність нелінійностей в околі породжуючого розв'язку, виділяємо лінійну частину за Y і члени нульового порядку за ε. Справедливі такі розклади:

$$R\left(Z_0(t,C^0)+Y(t,\varepsilon),t,\varepsilon\right)=R\left(Z_0(t,C^0),t,0\right)+A_1(t)Y(t,\varepsilon)+\mathcal{R}(Y(t,\varepsilon),t,\varepsilon),$$
$$J\left(Z_0(\cdot,C^0)+Y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\right)=J\left(Z_0(\cdot,C^0),0\right)+\ell_1 Y(\cdot,\varepsilon)+\mathcal{R}_1(Y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon),$$

де

$$A_1(t) = A_1(t, C^0) = R_Z^{(1)}(v, t, \varepsilon)\Big|_{v=Z_0(t,C^0),\varepsilon=0}, \quad \ell_1 = J^{(1)}(Z_0, 0),$$

— похідні Фреше в точці $\big(Z = Z_0(t, C^0), \varepsilon = 0\big)$, а для членів більш високого порядку $\mathcal{R}(Y, t, \varepsilon), \mathcal{R}_1(Y, \varepsilon)$ виконується співвідношення

$$\mathcal{R}(0, t, 0) = 0, \qquad \mathcal{R}_Y^{(1)}(0, t, 0) = 0, \qquad \mathcal{R}_1(0, 0) = 0, \qquad \mathcal{R}_{1\,Y}^{(1)}(0, 0) = 0.$$

Таким чином, враховуючи заміну, будемо розглядати крайову задачу

$$\frac{dY(t,\varepsilon)}{dt} = A(t)Y(t,\varepsilon) - Y(t,\varepsilon)B(t) + \\ + \varepsilon\left\{R\left(Z_0(t, C^0), t, 0\right) + A_1(t)Y(t,\varepsilon) + \mathcal{R}(Y(t,\varepsilon), t, \varepsilon)\right\},$$

$$\ell Y(\cdot,\varepsilon) = \varepsilon\left\{J\left(Z_0(\cdot, C^0), 0\right) + \ell_1 Y(\cdot,\varepsilon) + \mathcal{R}_1(Y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\right\},$$

яка має розв’язок

$$Y(t,\varepsilon) = K_0^t\big[\mathcal{P}_{N(\mathbf{L})}C\big] + \overline{Y}(t,\varepsilon), \quad C \in \mathcal{L}(H),$$

$$\overline{Y}(t,\varepsilon) = \varepsilon\bigg(G\Big[R\left(Z_0(t, C^0), t, 0\right) + A_1(t)Y(t,\varepsilon) + \mathcal{R}(Y(t,\varepsilon), t, \varepsilon), \\ J\left(Z_0(\cdot, C^0), 0\right) + \ell_1 Y(\cdot,\varepsilon) + \mathcal{R}_1(Y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big]\bigg)(t,\varepsilon),$$

а невідомий оператор $C \in \mathcal{L}(H)$ визначається з умови розв’язності крайової задачі (15), (16):

$$\mathcal{P}_{Y_{\mathbf{L}}}\Bigg[J(Z_0(\cdot, C^0), 0) + \ell_1 Y(\cdot,\varepsilon) + \mathcal{R}_1(Y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \\ - \ell\int_0^{(\cdot)} \mathbf{K}_\tau^{(\cdot)}\Big[R(Z_0(\tau, C^0), \tau, 0) + A_1(\tau)Y(t,\varepsilon) + \mathcal{R}(Y(\tau,\varepsilon), \tau, \varepsilon)\Big]d\tau\Bigg] = 0.$$

Підставляючи в лінійну частину замість виразу $Y(t,\varepsilon)$ зображення вигляду $K_0^t[\mathcal{P}_{N(\overline{Q})}C] + \overline{Y}(t,\varepsilon)$ та враховуючи виконання умови (13), отримуємо операторне рівняння відносно оператора $C \in \mathcal{L}(H)$:

$$\mathcal{P}_{Y_{\mathbf{L}}}\Bigg[J(Z_0(\cdot, C^0), 0) + \ell_1\Big(\mathbf{K}_0^{(\cdot)}\big[\mathcal{P}_{N(\mathbf{L})}C\big] + \overline{Y}(\cdot,\varepsilon)\Big) + \\ + \mathcal{R}_1(Y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \ell\int_0^{(\cdot)} \mathbf{K}_\tau^{(\cdot)}\Big[R(Z_0(\tau, C^0), \tau, 0) + \\ + A_1(\tau)\Big(K_0^\tau\big[\mathcal{P}_{N(\mathbf{L})}C\big] + \overline{Y}(\tau,\varepsilon)\Big) + \mathcal{R}(Y(\tau,\varepsilon), \tau, \varepsilon)\Big]d\tau\Bigg] = 0.$$

Для знаходження розв'язку $Y(t,\cdot) \in C[0;\varepsilon_0]\colon Y(t,0) = 0$ крайової задачі (15), (16) приходимо до еквівалентної операторної системи

$$\begin{gathered} Y(t,\varepsilon) = K_0^t\big[\mathcal{P}_{N(\mathbf{L})}C\big] + \overline{Y}(t,\varepsilon), \\ B_0C = -\mathcal{P}_{Y_\mathbf{L}}\left[\ell_1\overline{Y}(\cdot,\varepsilon) + \mathcal{R}_1(Y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \ell\int\limits_0^{(\cdot)}\mathbf{K}_\tau^{(\cdot)}\Big[A_1(\tau)\overline{Y}(\tau,\varepsilon) + \mathcal{R}(Y(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\Big]d\tau\right], \\ \overline{Y}(t,\varepsilon) = \varepsilon\bigg(G\Big[R(Z_0(t,C^0),t,0) + A_1(t)Y(t,\varepsilon) + \mathcal{R}(Y(t,\varepsilon),t,\varepsilon), \\ J(Z_0(\cdot,C^0),0) + \ell_1Y(\cdot,\varepsilon) + \mathcal{R}_1(Y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big]\bigg)(t,\varepsilon), \end{gathered} \tag{17}$$

де оператор B_0 визначається таким чином:

$$B_0C := \mathcal{P}_{Y_\mathbf{L}}\left[\ell_1\mathbf{K}_0^{(\cdot)}\big[\mathcal{P}_{N(\mathbf{L})}C\big] - \ell\int\limits_0^{(\cdot)}K_\tau^{(\cdot)}\Big[A_1(\tau)K_0^\tau\big[\mathcal{P}_{N(\mathbf{L})}C\big]\Big]d\tau\right]. \tag{18}$$

Припустимо, що оператор B_0 є узагальнено-оборотним. Тоді, як показано в [11], він є нормально розв'язним та існують обмежені проектори $\mathcal{P}_{N(B_0)}\colon \mathcal{L}(H) \to N(B_0)$ і $\mathcal{P}_{Y_{B_0}}\colon H \to$ $\to Y_{B_0}$, які індукують розбиття $\mathcal{L}(H)$ і H у прямі топологічні суми замкнених підпросторів

$$\mathcal{L}(H) = N(B_0) \oplus X_{B_0},$$
$$H = Y_{B_0} \oplus R(B_0).$$

Внаслідок нормальної розв'язності оператора B_0 рівняння (17) є розв'язним [9] тоді і тільки тоді, коли його права частина задовольняє умову

$$\mathcal{P}_{Y_{B_0}}\mathcal{P}_{Y_\mathbf{L}}\left[\ell_1\overline{Y}(\cdot,\varepsilon) + \mathcal{R}_1(Y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \ell\int\limits_0^{(\cdot)}\mathbf{K}_\tau^{(\cdot)}\Big[A_1(\tau)\overline{Y}(\tau,\varepsilon) + \mathcal{R}(Y(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\Big]d\tau\right] = 0.$$

Ця умова виконується, якщо, в свою чергу, виконується умова

$$\mathcal{P}_{Y_{B_0}}\mathcal{P}_{Y_\mathbf{L}} = 0. \tag{19}$$

При виконанні умови (19) операторне рівняння (17) розв'язне. Таким чином, маємо, що відповідна операторна система еквівалентна крайовій задачі (15), (16) у просторі функцій

$Y(\cdot,\varepsilon)\in L_p(I,\mathcal{L}(H));\ Y(t,\cdot)\in C[0;\varepsilon_0]$ та має вигляд

$$\begin{cases} Y(t,\varepsilon)=\mathbf{K}_0^t\big[\mathcal{P}_{N(\mathbf{L})}C\big]+\overline{Y}(t,\varepsilon),\\ C=-B_0^-\mathcal{P}_{Y_\mathbf{L}}\Bigg[\ell_1\overline{Y}(\cdot,\varepsilon)+\mathcal{R}_1(Y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-\\ \qquad\qquad -\ell\displaystyle\int\limits_0^{(\cdot)}\mathbf{K}_\tau^{(\cdot)}\Big[A_1(\tau)\overline{Y}(\tau,\varepsilon)+\mathcal{R}(Y(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\Big]d\tau\Bigg],\\ \overline{Y}(t,\varepsilon)=\varepsilon\Big(G\Big[R(Z_0(t,C^0),t,0)+A_1(t)\Big(\mathbf{K}_0^t\big[\mathcal{P}_{N(\mathbf{L})}C\big]+\overline{Y}(t,\varepsilon)\Big)+\mathcal{R}(Y(t,\varepsilon),t,\varepsilon),\\ \qquad J(Z_0(\cdot,C^0),0)+\ell_1Y(\cdot,\varepsilon)+\mathcal{R}_1(Y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big]\Big)(t,\varepsilon).\end{cases}\tag{20}$$

Ввівши до розгляду вектор $u=(Y,C,\overline{Y})^T\in(\mathcal{L}(H))^3$, операторну систему (20) можна подати у вигляді

$$u=\begin{bmatrix}0 & K_0^t[\mathcal{P}_{N(\mathbf{L})}\cdot] & I\\ 0 & 0 & L_1\cdot\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}u+g$$

або

$$u=Wu+g,$$

де

$$Wu=\begin{bmatrix}0 & K_0^t[\mathcal{P}_{N(\mathbf{L})}\cdot] & I\\ 0 & 0 & L_1\cdot\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}u=\begin{pmatrix}K_0^t[\mathcal{P}_{N(\mathbf{L})}C]+\overline{Y}(t,\varepsilon)\\ L_1\overline{Y}(t,\varepsilon)\\ 0\end{pmatrix},$$

$$L_1\overline{Y}(t,\varepsilon)=-B_0^-\mathcal{P}_{Y_\mathbf{L}}\Bigg[l_1\overline{Y}(\cdot,\varepsilon)-\ell\int\limits_0^{(\cdot)}\mathbf{K}_\tau^{(\cdot)}\big[A_1(\tau)\overline{Y}(\tau,\varepsilon)\big]d\tau\Bigg],$$

$$g=\begin{pmatrix}0\\ -B_0^-\mathcal{P}_{Y_\mathbf{L}}\Big\{l_1\mathcal{R}_1(Y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-\ell\int_0^{(\cdot)}\mathbf{K}_\tau^{(\cdot)}\big[\mathcal{R}(Y(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\big]d\tau\Big\}\\ \varepsilon\Big(G\Big[R(Z_0(t,C^0),t,0)+A_1(t)Y(t,\varepsilon)+\\ \qquad+\mathcal{R}(Y(t,\varepsilon),t,\varepsilon),J(Z_0(\cdot,C^0),0)+\ell_1Y(\cdot,\varepsilon)+\mathcal{R}_1(Y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big]\Big)\end{pmatrix}.$$

Одержану систему можна переписати у вигляді

$$u=(I-W)^{-1}g,$$

де

$$(I-W)^{-1}=\begin{bmatrix}I & K_0^t[\mathcal{P}_{N(\mathbf{L})}\cdot] & K_0^t[\mathcal{P}_{N(\mathbf{L})}L_1\cdot]+I\\ 0 & I & L_1\\ 0 & 0 & I\end{bmatrix}.$$

Тоді

$$u = (I-W)^{-1}g = (I-W)^{-1}S(\varepsilon)u =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{K}_0^t\Big[\mathcal{P}_{N(\mathbf{L})}\Big\{-B_0^-\mathcal{P}_{Y_\mathbf{L}}\Big\{l_1\mathcal{R}_1 - \ell\int_0^{(\cdot)}\mathbf{K}_\tau^{(\cdot)}[\mathcal{R}]d\tau\Big\}+ \\ +\varepsilon L_1\Big(G\big[R+A_1Y+\mathcal{R}, J+\ell_1Y+\mathcal{R}_1\big]\Big)(t,\varepsilon)\Big\}\Big]+ \\ +\varepsilon\Big(G\big[R+A_1Y+\mathcal{R}, J+\ell_1Y+\mathcal{R}_1\big]\Big)(t,\varepsilon) \\ -B_0^-\mathcal{P}_{Y_\mathbf{L}}\Big\{\ell_1\mathcal{R}_1(Y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \ell\int_0^{(\cdot)}\mathbf{K}_\tau^{(\cdot)}[\mathcal{R}(Y(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)]d\tau\Big\}+ \\ +\varepsilon L_1\Big(G\big[R+A_1Y+\mathcal{R}, J+\ell_1Y+\mathcal{R}_1\big]\Big)(t,\varepsilon) \\ \varepsilon\Big(G\Big[R(Z_0(t,C^0),t,0)+A_1(t)Y(t,\varepsilon)+ \\ +\mathcal{R}(Y(t,\varepsilon),t,\varepsilon), J(Z_0(\cdot,C^0),0)+\ell_1Y(\cdot,\varepsilon)+\mathcal{R}_1(Y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big]\Big) \end{pmatrix}.$$

Операторна система (20) належить до класу систем вигляду [25], для розв'язання яких можна застосувати метод простих ітерацій.

На основі операторної системи (20) побудуємо ітераційний процес для знаходження розв'язку $Y(t,\cdot)\in C[0;\varepsilon_0],\ Y(t,0)=0$ крайової задачі (15), (16).

Виходячи з позначень, отримуємо наступне твердження.

Теорема 3 (достатня умова)**.** *Нехай для оператора B_0 виконується умова*

$$\mathcal{P}_{N\left(B_0^*\right)}\mathcal{P}_{N(\mathbf{L}^*)} = 0.$$

Тоді для довільного оператора $C = C^0 \in \mathcal{L}(H)$, що задовольняє рівняння для породжуючих операторів (14), існує принаймні один розв'язок крайової задачі (1), (2). Цей розв'язок може бути знайдений з використанням ітераційного процесу

$$\overline{Y}_{k+1}(t,\varepsilon) = \varepsilon G\left[R\left(Z_0(\cdot,C^0)+Y_k(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon\right), J(Z_0(\cdot,C_0)+Y_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\right](t,\varepsilon),$$

$$C_k = \overline{B}_0^-\Bigg\{\mathcal{P}_{Y_\mathbf{L}}\ell\int\limits_0^{(\cdot)}\mathbf{K}_\tau^{(\cdot)}[A_1(\tau)\overline{Y}_k(\tau,\varepsilon)+\mathcal{R}(Y_k(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)]d\tau -$$

$$- \mathcal{P}_{Y_\mathbf{L}}\big\{l_1\overline{Y}_k(\cdot,\varepsilon)+\mathcal{R}_1(Y_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\big\}\Bigg\},$$

$$Y_{k+1}(t,C_k) = K_0^t[\mathcal{P}_{N(\mathbf{L})}C_k] + \overline{Y}_{k+1}(t,\varepsilon),$$

$$Z_k(t,\varepsilon) = Z_0(t,C^0)+Y_k(t,\varepsilon), \quad k=0,1,2,\ldots, \qquad Y_0(t,\varepsilon)=0,$$

$$Z(t,\varepsilon) = \lim_{k\to\infty} Z_k(t,\varepsilon).$$

Приклад. Розглянемо нелінійну крайову задачу (1), (2) у просторі $L_p(I,\mathcal{L}(l_2))$ із операторнозначними функціями, визначеними на відрізку $I=[a;b]=[0;8ln2]$ у вигляді зліченновимірних матриць $A,\ B,\ \Phi(t)$ та $R(Z,t,\varepsilon)$ такого вигляду:

$$A = \operatorname{diag}\left\{\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, 0, \ldots, \frac{1}{4}, 0, \ldots\right\}, \tag{21}$$

$$B = \operatorname{diag}\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots\right\},$$

$$\Phi(t) = \operatorname{diag}\left\{e^{\frac{1}{4}t}, e^{\frac{1}{2}t}, e^{\frac{1}{4}t}, e^{\frac{1}{2}t}, \ldots, e^{\frac{1}{4}t}, e^{\frac{1}{2}t}, \ldots\right\},$$

$$R(Z,t,\varepsilon) = \operatorname{diag}\Big\{\big(z_{11}(t)+z_{22}(t)\big)z_{33}(t), 0, \big(z_{11}(t)+z_{22}(t)\big)z_{44}(t), 0,$$

$$\big(z_{55}(t)+z_{66}(t)\big)z_{77}(t), 0, \big(z_{55}(t)+z_{66}(t)\big)z_{88}(t), 0, \ldots\Big\}, \tag{22}$$

і крайовою умовою вигляду

$$\ell Z(\cdot) = ((TZ(0) - NZ(8ln2))_{i,i})_{i\in\mathbb{N}} = \alpha = (\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}},$$

де

$$T = \operatorname{diag}\{1, 0, 1, 0, \ldots, 1, 0, \ldots\}, \quad N = \operatorname{diag}\{4, -16, 4, -16, \ldots, 4, -16, \ldots\},$$

$$\ell_1 = 0, \quad J(Z(\cdot)) = 0, \quad \alpha = \operatorname{diag}\{\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33}, \alpha_{44}, \ldots, \alpha_{nn}, \ldots\}, \quad \alpha_{nn}\in\mathbb{R}, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Таким чином, оператор крайових умов ℓ переводить оператор-функцію $Z(t)$ у вектор, елементами якого є діагональні елементи оператора $TZ(0)-NZ(8ln2)$. Неважко показати, що для норми операторнозначної функції $\Phi(t)$ справедлива така оцінка $(I = [a;b] = = [0;8ln2])$:

$$\|\Phi\|_{L_p(I,\mathcal{L}(l_2))} \le \left(\int\limits_I e^{\frac{pt}{2}}\,dt\right)^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{\frac{2}{p}}\,\left(e^{\frac{b}{2}} - e^{\frac{a}{2}}\right) = 15\sqrt[p]{\frac{2}{p}}.$$

Знайдемо розв'язок породжуючої крайової задачі. Еволюційні оператори рівнянь (6), (7) мають вигляд

$$U(t) = \operatorname{diag}\left\{e^{\frac{1}{4}t}, 1, e^{\frac{1}{4}t}, 1, \ldots, e^{\frac{1}{4}t}, 1, \ldots\right\},$$

$$V(t) = \operatorname{diag}\left\{e^{\frac{1}{2}t}, e^{\frac{1}{2}t}, e^{\frac{1}{2}t}, e^{\frac{1}{2}t}, \ldots, e^{\frac{1}{2}t}, e^{\frac{1}{2}t}, \ldots\right\}.$$

Лінійна оператор-функція $\mathbf{K}_\tau^t$, що переводить оператор-функцію $\Phi = \Phi(t)$ з простору $L_p(I,\mathcal{L}(l_2))$ в оператор-функцію $K_\tau^t[\Phi]\in L_p(I\times I,\mathcal{L}(l_2))$ за формулою (5), має вигляд

$$\mathbf{K}_\tau^t = \operatorname{diag}\left\{e^{-\frac{1}{4}t+\frac{1}{2}\tau}, e^{\tau-\frac{1}{2}t}, e^{-\frac{1}{4}t+\frac{1}{2}\tau}, e^{\tau-\frac{1}{2}t}, \ldots, e^{-\frac{1}{4}t+\frac{1}{2}\tau}, e^{\tau-\frac{1}{2}t}, \ldots\right\}.$$

Тоді для будь-якого $X\in\mathcal{L}(l_2)$ та фіксованих $t,\tau\in I$ справедлива нерівність

$$\left\|\mathbf{K}_\tau^t X\right\|_{\mathcal{L}(l_2)} \le \left(e^{-\frac{1}{4}t+\frac{1}{2}\tau} + e^{\tau-\frac{1}{2}t}\right)\|X\|_{\mathcal{L}(l_2)},$$

з якої випливає, що $\left\|\mathbf{K}_\tau^t\right\|_{\mathcal{L}(l_2)} \leq e^{-\frac{1}{4}t+\frac{1}{2}\tau} + e^{\tau-\frac{1}{2}t}$. Покажемо, що для $\mathbf{K}_\tau^t$ виконується нерівність (9). Дійсно,

$$\left\|\mathbf{K}_\tau^t\right\|_{L_q(I\times I,\mathcal{L}(l_2))} \leq \left(\int\limits_I\int\limits_I \left(e^{-\frac{1}{4}t+\frac{1}{2}\tau} + e^{\tau-\frac{1}{2}t}\right)^q d\tau dt\right)^{\frac{1}{q}}.$$

За нерівністю Мінковського маємо

$$\left(\int\limits_I\int\limits_I \left(e^{-\frac{1}{4}t+\frac{1}{2}\tau} + e^{\tau-\frac{1}{2}t}\right)^q d\tau dt\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\int\limits_I\int\limits_I e^{-\frac{1}{4}qt+\frac{1}{2}q\tau} d\tau dt\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int\limits_I\int\limits_I e^{q\tau-\frac{1}{2}qt} d\tau dt\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Остаточно одержуємо

$$\left\|\mathbf{K}_\tau^t\right\|_{L_q(I\times I,\mathcal{L}(l_2))} \leq \sqrt[q]{\frac{8}{q^2}}\left(e^{\frac{b}{2}} - e^{\frac{a}{2}}\right)\left(e^{-\frac{a}{4}} - e^{-\frac{b}{4}}\right) + \sqrt[q]{\frac{2}{q^2}}\left(e^{b} - e^{a}\right)\left(e^{-\frac{a}{2}} - e^{-\frac{b}{2}}\right) =$$
$$= \frac{45}{4}\left(\sqrt[q]{\frac{8}{q^2}} + \sqrt[q]{\frac{2}{q^2}}\right).$$

Загальний розв'язок рівняння (1) можна зобразити у вигляді (8) за допомогою довільного оператора M, який виберемо у вигляді зліченновимірної діагональної матриці

$$M = \operatorname{diag}\{m_{11}, m_{22}, m_{33}, m_{44}, \ldots, m_{nn}, \ldots\}.$$

Оператор $\mathbf{L}$ діє за правилом $\mathbf{L}M = \ell\mathbf{K}_0^{\cdot}[M] = \operatorname{diag}\{0, m_{22}, 0, m_{44}, \ldots, 0, m_{2n2n}, \ldots\}$. Він є узагальнено-оборотним, і існують проектори $\mathcal{P}_{N(\mathbf{L})}$ та $\mathcal{P}_{Y_\mathbf{L}}$:

$$\mathcal{P}_{N(\mathbf{L})} = \operatorname{diag}\{1,0,1,0,\ldots,1,0,\ldots\}, \qquad \mathcal{P}_{Y_\mathbf{L}} = \operatorname{diag}\{1,0,1,0,\ldots,1,0,\ldots\}.$$

Умова розв'язності $\mathcal{P}_{Y_\mathbf{L}}\left[\alpha + N\int_0^{8\ln 2}\mathbf{K}_\tau^{8\ln 2}[\Phi]d\tau\right] = 0$ вигляду (11) виконується для будь-якого $\alpha_{2n2n} \in \mathbb{R}$ і $\alpha_{11} = -30,\ \alpha_{33} = -30, \ldots, \alpha_{(2n-1)(2n-1)} = -30, \ldots,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Таким чином, породжуюча крайова задача (3), (4) розв'язна і має розв'язок:

$$\begin{aligned} Z_0(t,C) = \operatorname{diag}\Big\{&\big(C_{11}-2\big)e^{-\frac{1}{4}t} + 2e^{\frac{1}{4}t}, -256e^{-\frac{1}{2}t} + e^{\frac{1}{2}t}, \\ &\big(C_{33}-2\big)e^{-\frac{1}{4}t} + 2e^{\frac{1}{4}t}, -256e^{-\frac{1}{2}t} + e^{\frac{1}{2}t}, \ldots \\ &\ldots, \big(C_{(2n-1)(2n-1)}-2\big)e^{-\frac{1}{4}t} + 2e^{\frac{1}{4}t}, -256e^{-\frac{1}{2}t} + e^{\frac{1}{2}t}, \ldots\Big\}. \end{aligned} \tag{23}$$

Перевіримо необхідну умову. Підставивши знайдений породжуючий розв'язок $Z_0(t,C)$ в операторне рівняння (13) і розв'язавши його відносно невідомих $C_{11}, C_{22}, \ldots, C_{nn}$, отримаємо

$$C_{11} = \frac{68417}{375} - \frac{20418}{225}\ln 2, \qquad C_{33} = -\frac{12(133120\ln 2 - 154563)}{10240\ln 2 - 43251}, \ldots,$$

$$C_{(2n-1)(2n-1)} = \frac{68417}{375} - \frac{20418}{225}\ln 2, \qquad C_{(2n+1)(2n+1)} = -\frac{12(133120\ln 2 - 154563)}{10240\ln 2 - 43251}, \ldots$$

для довільних $C_{2n2n} \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$.

Отже, умови теореми 2 виконано.

Перевіримо достатню умову. Побудуємо оператор B_0, який визначається за формулою (18). Для цього треба визначити компоненти оператора $A_1(t)$, які знаходяться з розкладу $R(Z_0(t, C^0) + Y(t,\varepsilon), t, \varepsilon) = R\left(Z_0(t, C^0)t, 0\right) + A_1(t)Y(t,\varepsilon) + \mathcal{R}(Y(t,\varepsilon), t, \varepsilon)$:

$$A_1(t) = \operatorname{diag}\left\{ \frac{10240 e^{-\frac{1}{2}t}\left[\left(-158\ln 2 + \frac{970629}{5120}\right)e^{\frac{1}{4}t} + \left(\ln 2 - \frac{43251}{10240}\right)\left(e^t + 2e^{\frac{3}{4}t} - 256\right)\right]}{10240\ln 2 - 43251}, \right.$$

$$\frac{10240 e^{-\frac{1}{2}t}\left[\left(-158\ln 2 + \frac{970629}{5120}\right)e^{\frac{1}{4}t} + \left(\ln 2 - \frac{43251}{10240}\right)\left(e^t + 2e^{\frac{3}{4}t} - 256\right)\right]}{10240\ln 2 - 43251},$$

$$\frac{1}{1125}(-10240\ln 2 + 203001)e^{-\frac{1}{4}t} + \left(e^t + 2e^{\frac{3}{4}t} - 256\right)e^{-\frac{1}{2}t},$$

$$\left. \frac{1}{1125}(-10240\ln 2 + 203001)e^{-\frac{1}{4}t} + \left(e^t + 2e^{\frac{3}{4}t} - 256\right)e^{-\frac{1}{2}t}, \ldots \right\}.$$

Оператор B_0 має вигляд

$$B_0 = \operatorname{diag}\left\{ -\frac{900(10240\ln 2 - 26943)}{10240\ln 2 - 43251}, 0, -\frac{2048}{75}\ln 2 + \frac{14417}{125}, 0, \ldots \right.$$

$$\left. -\frac{900(10240\ln 2 - 26943)}{10240\ln 2 - 43251}, 0, -\frac{2048}{75}\ln 2 + \frac{14417}{125}, 0, \ldots \right\}.$$

Тоді

$$B_0^- = \operatorname{diag}\left\{ \frac{10240\ln 2 - 43251}{900(26943 - 10240\ln 2)}, 0, \frac{1}{-\frac{2048}{75}\ln 2 + \frac{14417}{125}}, 0, \ldots \right.$$

$$\left. \frac{10240\ln 2 - 43251}{900(26943 - 10240\ln 2)}, 0, \frac{1}{-\frac{2048}{75}\ln 2 + \frac{14417}{125}}, 0, \ldots \right\}.$$

Проектори відповідно визначаються рівностями

$$\mathcal{P}_{N(B_0)} = \operatorname{diag}\{0,1,0,1,\ldots,0,1,\ldots\}, \qquad \mathcal{P}_{Y_{B_0}} = \operatorname{diag}\{0,1,0,1,\ldots,0,1,\ldots\}.$$

Умова $\mathcal{P}_{Y_{B_0}}\mathcal{P}_{Y_{\mathbf{L}}} = 0$ теореми 3 завжди виконується. Згідно з теоремою 3 крайова задача (1), (2) зі зліченновимірними матрицями A, B, $\Phi(t)$ та $R(Z,t,\varepsilon)$ у диференціальному рівнянні вигляду (21), (22) і крайовою умовою вигляду (3) має розв'язок, який можна знайти за допомогою ітераційного процесу.

Література

1. *Бойчук О. А., Кривошея С. А.* Критерій розв'язності матричних рівнянь типу Ляпунова // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 8. – P. 1021 – 1026.
2. *Boichuk A. A., Krivosheya S. A.* A critical periodic boundary-value problem for a matrix Riccati equation // Differ. Equ. – 2001. – **37**, № 4. – P. 464 – 471.
3. *Чуйко С. М.* О решении матричных уравнений Ляпунова // Вісн. Харк. нац. ун-ту ім. В. Н. Каразіна. Сер. "Математика, прикл. математика і механіка". – 2014. – №1120. – С. 85 – 94.
4. *Boichuk An. A., Chuiko S. M.* Autonomous periodic boundary-value problem for a matrix differential equation // J. Math. Sci. – 2018. – **228**, № 3. – P. 323 – 334.
5. *Davor Dragicevic.* Lyapunov type equation for discrete exponential trichotomies // J. Nonlinear Sci. Appl. – 2017. – **10**. – P. 2001 – 2017.
6. *Панасенко Є. В., Покутний О. О.* Крайові задачі для рівняння Ляпунова у банаховому просторі // Нелін. коливання. – 2016. – **19**, № 2. – С. 240 – 246.
7. *Панасенко Є. В., Покутний О. О.* Умова біфуркації розв'язків рівняння Ляпунова у просторі Гільберта // Нелін. коливання. – 2017. – **20**, № 3. – С. 373 – 390.
8. *Pokutnyi O. O.* Boundary value problem for an operator-differential Riccati equation in the Hilbert space on the interval // Adv. Pure Math. – 2015. – **5**. – P. 865 – 873.
9. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. – 496 с.
10. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1967. – 464 с.
11. *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1971. – 104 с.
12. *Polyakov A., Efimov D., Fridman E., Perruquetti W.* On homogeneous evolution equation in a Banach space // European Control Conference 2015. – Austria, Linz. – 2015. https://hal.inria.fr/hal-01160068
13. *Kato T.* On linear differential equations in Banach spaces // Comm. Pure Appl. Math. – 1956. – **IX**. – P. 479 – 486.
14. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 830 с.
15. *Иосида К.* Функциональный анализ. – М.: Мир, 1967. – 624 с.
16. *Progress* in nonlinear differential equations and their applications. Semigroups of operators: theory and applications / A. V. Balakrishnan (Ed.). – Basel; Boston; Berlin: Birkhäuser Verlag, 2000. – **42**. – 364 p.
17. *Chen X.-Y., Hale J. K., Tan B.* Invariant foliations for C^1 Semigroups in Banach spaces // J. Differential Equations. – 1997. – **139**. – P. 283 – 318.
18. *Vu Ngoc Phat, Tran Tin Kiet.* On the Lyapunov equation in Banach spaces and applications to control problems // Int. J. Math. Math. Sci. – 2002. – **29**, № 3. – P. 155 – 166.
19. *Latushkin Yu., Montgomery-Smith S.* Lyapunov theorems for Banach spaces // Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.). – 1994. – **31**, № 1. – P. 44 – 49.
20. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and fredholm boundary-value problems. – Berlin: De Gruyter, 2016. – 296 p.
21. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Математические основы фазового укрупнения сложных систем. – К.: Наук. думка, 1978. – 218 с.
22. *Moore E. H.* On the reciprocal of the general algebraic matrix (Abstract) // Bull. Amer. Math. Soc. – 1920. – **26**. – P. 394 – 395.
23. *Penrose R. A.* Generalized inverse for matrices // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. – 1955. – **51**. – P. 406 – 413.
24. *Martynyuk A. A.* Elements of the theory of stability of hybrid systems (review) // Internat. Appl. Mech. – 2015. – **51**, № 3. – P. 243 – 302.
25. *Гребеников Е. А., Рябов Ю. А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. – М.: Наука, 1979. – 432 с.

Одержано 06.09.2018