УДК 517.929

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ НЕОДНОРОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ФУНКЦИОНАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ЛИНЕЙНО ПРЕОБРАЗОВАННЫМ АРГУМЕНТОМ

Г. П. Пелюх, Д. В. Бельский

Ин-т математики НАН Украины
ул. Терещенковская, 3, Киев, 01601, Украина

On the asymptotic properties of solutions of the inhomogeneous functional-differential equation with a linearly transformed argument.

Встановлено нові властивості розв'язків диференціально-функціонального рівняння з лінійно перетвореним аргументом.

В первой части данной статьи исследуется уравнение

$$x'(t) = ax(t) + bx(qt) + cx'(qt) + f\big(x(t), x(qt), x'(qt)\big), \tag{1}$$

где $\{a, b, c\} \subset \mathrm{C},\ 0 < q < 1,\ f\colon \mathrm{C}^3 \to \mathrm{C},\ f(0,0,0) = 0$, и существует неубывающая функция $h\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ такая, что

$$\big|f(x_1, x_2, x_3) - f(y_1, y_2, y_3)\big| \le h(r) \max\big\{\, |x_i|, |y_i| \,|\, i = \overline{1,3}\big\} \big(|x_1 - y_1| + \ldots + |x_3 - y_3|\big)$$

для всех $|x_i| \le r,\ |y_i| \le r,\ i = \overline{1,3}$, в окрестности точки $t = 0$. В [1] исследовано поведение решений однородного уравнения (1) при $f \equiv 0$ в окрестности точки $t = 0$, в [2] дано еще одно доказательство результата работы [1], основанное на методах из статьи [3], так же получена некоторая асимптотическая формула для нелинейного уравнения (1) при $f = f(x(t), x(qt))$.

Теорема. *Если $|c| > 1$, то для каждого непрерывно дифференцируемого решения уравнения (1) $x(t) = O\left(t^v\right),\ x'(t) = O\big(t^{v-1}\big),\ t \to 0+$, где v определяется из условия $cq^{v-1} = 1$, выполняется равенство*

$$x(t) = t^v \left\{ g\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + O\Big(t^{\min\{\mathrm{Re}\, v - 1, 1\}}\Big) \right\}, \quad t \to 0+, \tag{2}$$

где $g(s)$ — непрерывно дифференцируемая периодическая функция с периодом 1. И обратно, для каждой функции $g(s)$ существует единственное решение уравнения (1) с асимптотической формулой (2).

Доказательство. По условию теоремы $\mathrm{Re}\, v > 1$, следовательно, $x(t) = O(t^v) \to 0$, $t \to 0+$, т. е. можно проинтегрировать уравнение (1) на отрезке $[0, t]$:

$$x(t) = \frac{c}{q} x(qt) + \int\limits_0^t \big\{ax(u) + bx(qu) + f\left(x(u), x(qu), x'(qu)\right)\big\}\, du.$$

Сделаем замену переменных $x(t)=t^v y_1(t)$:

$$y_1(t)=y_1(qt)+t^{-v}\int\limits_0^t\left\{au^v y_1(u)+b\frac{q}{c}u^v y_1(qu)+\right.$$
$$\left.+f\left(u^v y_1(u),q^v u^v y_1(qu),q^v u^v y_1'(qu)+vq^{v-1}u^{v-1}y_1(qu)\right)\right\}du.$$

Выполним замену независимой переменной $e^{-s\ln q^{-1}}=t,\ y_1(t)=y_2(s)$:

$$y_2(s+1)-y_2(s)=e^{-ls}\int\limits_s^{+\infty}e^{lu}e^{-\left(\ln q^{-1}\right)u}\ln q$$
$$\times\left\{ay_2(u)+bc^{-1}qy_2(u+1)+e^{-lu}f\left(e^{lu}y_2(u),\right.\right.$$
$$\left.\left.\frac{q}{c}\,e^{lu}y_2(u+1),\ e^{lu}e^{\left(\ln q^{-1}\right)u}\left[\frac{1}{c\ln q}\,y_2'(u+1)+\frac{v}{c}\,y_2(u+1)\right]\right)\right\}du,$$

где $l\stackrel{\mathrm{df}}{=}v\ln q$. Для сокращения записи определим функцию

$$g(u,x_1,x_2,x_3)\stackrel{\mathrm{df}}{=}e^{-\left(\ln q^{-1}\right)u}\ln q\left\{ax_1+bc^{-1}qx_2+\right.$$
$$\left.+e^{-lu}f\left(e^{lu}x_1,\frac{q}{c}\,e^{lu}x_2,e^{lu}e^{\left(\ln q^{-1}\right)u}\left[\frac{1}{c\ln q}\,x_3+\frac{v}{c}\,x_2\right]\right)\right\},$$

имеющую следующие свойства: $g(u,0,0,0)=0$, для $u\geq 0,\ |x_i|\leq r,\ |y_i|\leq r,\ i=\overline{1,3}$, выполняется неравенство

$$|g(u,x_1,x_2,x_3)-g(u,y_1,y_2,y_3)|\leq$$
$$\leq e^{-\lambda u}\gamma(a,b,c,q,r)\left(|x_1-y_1|+|x_2-y_2|+|x_3-y_3|\right),$$

где величина $\lambda\stackrel{\mathrm{df}}{=}\min\left\{-\mathrm{Re}\,l-\ln q^{-1},\ln q^{-1}\right\}>0$, функция $\gamma(a,b,c,q,r)$ определяется на основании уравнения (1). В новых обозначениях получаем интегральное уравнение

$$y_2(s+1)-y_2(s)=e^{-ls}\int\limits_s^{+\infty}e^{lu}g\left(u,y_2(u),y_2(u+1),y_2'(u+1)\right)du. \tag{3}$$

Просуммируем равенства

$$y_2(s+n+1) - y_2(s+n) = e^{-l(s+n)} \int\limits_{s+n}^{+\infty} e^{lu} g\left(u, y_2(u), y_2(u+1), y_2'(u+1)\right) du,$$

. . . .

$$y_2(s+1) - y_2(s) = e^{-ls} \int\limits_{s}^{+\infty} e^{lu} g\left(u, y_2(u), y_2(u+1), y_2'(u+1)\right) du,$$

$$y_2(s+n+1) - y_2(s) = \sum_{j=0}^{n} e^{-l(s+j)} \int\limits_{s+j}^{+\infty} e^{lu} g\left(u, y_2(u), y_2(u+1), y_2'(u+1)\right) du.$$

Ограниченность решения $y_2(s)$ вместе с первой производной, свойства функции g и последнее равенство означают фундаментальность последовательности $y_2(s+n)$ и ее сходимость или сходимость ряда в правой части при $n \to +\infty$ — достаточное условие для существования предела $\lim_{n\to\infty} y_2(s+n) \stackrel{\text{df}}{=} w(s)$, периодичного $w(s) \equiv w(s+1)$. Устремляя в последнем равенстве $n \to \infty$, получаем формулу

$$w(s) = y_2(s) + \sum_{j=0}^{+\infty} e^{-l(s+j)} \int\limits_{s+j}^{+\infty} e^{lu} g\left(u, y_2(u), y_2(u+1), y_2'(u+1)\right) du,$$

из которой следует непрерывная дифференцируемость функции $w(s)$ и оценка $y_2(s) = = w(s) + O\left(e^{-\lambda s}\right),\ s \to +\infty$, или

$$y_1(t) = y_2\left(-\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) = w\left(-\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + O\Big(t^{\frac{\lambda}{\ln q^{-1}}}\Big), \quad t \to 0+,$$

т. е. асимптотическая формула (2).

Примем теперь равенство

$$y_2(s) = w(s) - \sum_{j=0}^{+\infty} e^{-l(s+j)} \int\limits_{s+j}^{+\infty} e^{lu} g\left(u, y_2(u), y_2(u+1), y_2'(u+1)\right) du \tag{4}$$

как начальный пункт дальнейших рассуждений, иными словами, как интегральное уравнение относительно неизвестной функции $y_2(s)$, где $w(s)$ — непрерывно дифференцируемая периодическая функция с периодом 1.

Для некоторой постоянной $M_1 \stackrel{\text{df}}{=} \max\left\{\sup_{s\in\mathrm{R}} |w(s)|, \sup_{s\in\mathrm{R}} |w'(s)|\right\}$, в дальнейшем все M_i — неотрицательные числа, определим пространство функций

$$H \stackrel{\text{df}}{=} \left\{ y(s) \middle|\, y(s) \in C^1\left[s_0, +\infty\right), \max\left\{\sup_{s\ge s_0} |y(s)|, \sup_{s\ge s_0} \left|y'(s)\right|\right\} \le M_1 + 1 \right\},$$

и для $y_2(s) \in H$ — оператор

$$Ty_2(s) \overset{\text{df}}{=} w(s) - \sum_{j=0}^{+\infty} e^{-l(s+j)} \int_{s+j}^{+\infty} e^{lu} g\left(u, y_2(u), y_2(u+1), y_2'(u+1)\right) du.$$

Оценим суперпозицию

$$|Ty_2(s)| \leq |w(s)| + \sum_{j=0}^{+\infty} e^{-(\operatorname{Re} l)(s+j)} \int_{s+j}^{+\infty} e^{(\operatorname{Re} l)u} \left| g\left(u, y_2(u), y_2(u+1), y_2'(u+1)\right)\right| du \leq$$

$$\leq M_1 + \sum_{j=0}^{+\infty} e^{-(\operatorname{Re} l)(s+j)} \int_{s+j}^{+\infty} e^{(\operatorname{Re} l)u} e^{-\lambda u} \gamma(a,b,c,q,M_1+1) 3(M_1+1) du \leq$$

$$\leq M_1 + e^{-\lambda s_0} \frac{1}{|\operatorname{Re} l|} \gamma(a,b,c,q,M_1+1) 3(M_1+1) \frac{1}{1-e^{-\lambda}}.$$

Из последнего неравенства получаем абсолютную и равномерную сходимость ряда на полуоси $s \geq s_0$, т. е. непрерывность функции $Ty_2(s)$, и если s_0 достаточно велико, то $|Ty_2(s)| \leq M_1 + 1$. Теперь оценим производную

$$\frac{d}{ds} Ty_2(s) = w'(s) + l \sum_{j=0}^{+\infty} e^{-l(s+j)} \int_{s+j}^{+\infty} e^{lu} g\left(u, y_2(u), y_2(u+1), y_2'(u+1)\right) du +$$

$$+ \sum_{j=0}^{+\infty} g\left(s+j, y_2(s+j), y_2(s+j+1), y_2'(s+j+1)\right),$$

$$\left|\frac{d}{ds} Ty_2(s)\right| \leq \left|w'(s)\right| + \sum_{j=0}^{+\infty} e^{-(\operatorname{Re} l)(s+j)} \int_{s+j}^{+\infty} e^{(\operatorname{Re} l)u} \left| g\left(u, y_2(u), y_2(u+1), y_2'(u+1)\right)\right| du +$$

$$+ \sum_{j=0}^{+\infty} \left| g\left(s+j, y_2(s+j), y_2(s+j+1), y_2'(s+j+1)\right)\right| \leq$$

$$\leq M_1 + e^{-\lambda s_0} \left(\frac{|l|}{|\operatorname{Re} l|} + 1\right) \gamma(a,b,c,q,M_1+1) 3(M_1+1) \frac{1}{1-e^{-\lambda}}.$$

Отсюда получаем непрерывную дифференцируемость функции $Ty_2(s)$ на полуоси $s \geq$ $\geq s_0$ и, при необходимости снова увеличивая s_0, неравенство $\left|\frac{d}{ds} Ty_2(s)\right| \leq M_1 + 1$. т. е. $Ty_2(s) \in H$.

Для $y_{2,1}(s) \in H$ и $y_{2,2}(s) \in H$ оценим разность

$$\left|Ty_{2,1}(s) - Ty_{2,2}(s)\right| \leq \sum_{j=0}^{+\infty} e^{-(\operatorname{Re} l)(s+j)} \int_{s+j}^{+\infty} e^{(\operatorname{Re} l)u} \Big| g\left(u, y_{2,1}(u), y_{2,1}(u+1), y_{2,1}'(u+1)\right) -$$

$$-\,g\left(u, y_{2,2}(u), y_{2,2}(u+1), y'_{2,2}(u+1)\right)\Big|du \le$$

$$\le \sum_{j=0}^{+\infty} e^{-(\operatorname{Re} l)(s+j)} \int\limits_{s+j}^{+\infty} e^{(\operatorname{Re} l)u} e^{-\lambda u}\gamma(a,b,c,q,M_1+1)\times$$

$$\times\, 3\max\left\{\sup_{s\ge s_0}|y_{2,1}(s)-y_{2,2}(s)|, \sup_{s\ge s_0}\left|y'_{2,1}(s)-y'_{2,2}(s)\right|\right\}du \le$$

$$\le e^{-\lambda s_0}\frac{3\gamma(a,b,c,q,M_1+1)}{|\operatorname{Re} l|\,(1-e^{-\lambda})}\times$$

$$\times\max\left\{\sup_{s\ge s_0}|y_{2,1}(s)-y_{2,2}(s)|, \sup_{s\ge s_0}\left|y'_{2,1}(s)-y'_{2,2}(s)\right|\right\}.$$

Оценим разность производных

$$\left|\frac{d}{ds}\,Ty_{2,1}(s)-\frac{d}{ds}\,Ty_{2,2}(s)\right| \le$$

$$\le |l|\sum_{j=0}^{+\infty} e^{-(\operatorname{Re} l)(s+j)}\int\limits_{s+j}^{+\infty} e^{(\operatorname{Re} l)u}\Big|g\left(u, y_{2,1}\left(u\right), y_{2,1}\left(u+1\right), y'_{2,1}\left(u+1\right)\right)-$$

$$-\,g\left(u, y_{2,2}\left(u\right), y_{2,2}\left(u+1\right), y'_{2,2}\left(u+1\right)\right)\Big|du+$$

$$+\sum_{j=0}^{+\infty}\left|g\left(s+j, y_{2,1}\left(s+j\right), y_{2,1}\left(s+j+1\right), y'_{2,1}\left(s+j+1\right)\right)-\right.$$

$$\left.-g\left(s+j, y_{2,2}\left(s+j\right), y_{2,2}\left(s+j+1\right), y'_{2,2}\left(s+j+1\right)\right)\right| \le$$

$$\le e^{-\lambda s_0}\frac{3\,|l|\,\gamma(a,b,c,q,M_1+1)}{|Rel|\,(1-e^{-\lambda})}\max\left\{\sup_{s\ge s_0}|y_{2,1}\left(s\right)-y_{2,2}\left(s\right)|, \sup_{s\ge s_0}\left|y'_{2,1}\left(s\right)-y'_{2,2}\left(s\right)\right|\right\}+$$

$$+\sum_{j=0}^{+\infty} e^{-\lambda(s+j)}\gamma\left(a,b,c,q,M_1+1\right)\times$$

$$\times\, 3\max\left\{\sup_{s\ge s_0}|y_{2,1}(s)-y_{2,2}(s)|, \sup_{s\ge s_0}\left|y'_{2,1}(s)-y'_{2,2}(s)\right|\right\} \le$$

$$\le e^{-\lambda s_0}\frac{3\gamma\left(a,b,c,q,M_1+1\right)}{1-e^{-\lambda}}\left(\frac{|l|}{|Rel|}+1\right)\times$$

$$\times\max\left\{\sup_{s\ge s_0}|y_{2,1}(s)-y_{2,2}(s)|, \sup_{s\ge s_0}\left|y'_{2,1}\left(s\right)-y'_{2,2}(s)\right|\right\}.$$

Поэтому для достаточно большого s_0 оператор T будет оператором сжатия в полном пространстве H относительно нормы

$$\left\|y_{2,1}(s) - y_{2,2}(s)\right\| = \max\left\{\sup_{s\geq s_0}\left|y_{2,1}(s) - y_{2,2}(s)\right|, \sup_{s\geq s_0}\left|y'_{2,1}(s) - y'_{2,2}(s)\right|\right\},$$

т. е. существует непрерывно дифференцируемое ограниченное вместе с первой производной решение уравнения (4).

Предположим, что существует еще одно решение этого уравнения с такими же свойствами. Тогда на пространстве

$$H_1 \stackrel{\mathrm{df}}{=} \left\{ y(s) \,|\, y(s) \in C^1\,[s_0, +\infty), \max\left\{\sup_{s\geq s_0}|y(s)|, \sup_{s\geq s_0}\left|y'(s)\right|\right\} \leq M_2 \right\},$$

где M_2 — достаточно большое число, таком, что H_1 включает оба решения, для достаточно большого s_0 можно снова доказать, что T — оператор сжатия, и поэтому решения совпадают.

Если от тождества (4) перейти к равенству (3) и продифференцировать его, то можно убедиться, что формула $x\big(e^{-s\ln q^{-1}}\big) = e^{ls}y_2(s)$ определяет решение уравнения (1).

Теорема 1 доказана.

Во второй части этой статьи сделано несколько замечаний относительно уравнения $h'(t) = ch(\theta t)$, где $c \in \mathrm{C},\ 0 < \theta < 1$ и $\theta > 1$, которое появляется в квантовой механике [8].

В работе [4] довольно исчерпывающе исследованы асимптотические свойства решений уравнения

$$y'(x) = e^{\alpha x+\beta}y(x-1),$$

где $\alpha > 0,\ \beta \in \mathrm{C}$, которое после логарифмической замены независимой переменной превращается в уравнение с линейным запаздыванием. Разработанные при этом методы применимы для широкого класса уравнений с запаздыванием, а так же используются при изучении асимптотических свойств обобщенной гамма-функции [5]. Эта статья является небольшим комментарием к пп. 5.1, 2 из [4] и § 6.9 из [5].

А именно ([4], § 5.1), необходимо исследовать асимптотическое поведение функции

$$F_0(x) = -i\frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}}e^{\frac{\lambda^2+2\lambda}{2\alpha}}\int\limits_{V-\zeta} e^{\frac{\omega^2}{2\alpha}+\frac{\lambda}{\alpha}(e^{\omega}-\omega-1)}\,d\omega, \tag{5}$$

где V состоит из отрезков $(-\pi i + \infty, -\pi i),\ (-\pi i, \pi i),\ (\pi i, \pi i + \infty),\ |\arg x| < \pi - \delta,\ \delta$ — сколь угодно малое положительной число; ζ — единственный в полосе $|\mathrm{Im}\,\zeta| < \pi,\ \mathrm{Re}\,\zeta > 0$ корень уравнения $\zeta - \alpha x - \dfrac{1}{2}\,\alpha - \beta + \ln\alpha + \alpha e^{\zeta} = 0$ при больших $|x|$,

$$\lambda = \alpha e^{\zeta} = \alpha x + \frac{1}{2}\,\alpha + \beta - \ln\alpha - \zeta.$$

Рассуждения де Брейна в нашей интерпретации следующие. Асимптотическая формула

$$\zeta = \log u - \frac{1}{\alpha}\,\frac{\log u}{u} + O\left(\frac{\log^2 u}{u^2}\right), \qquad u = x + \frac{1}{2} + \frac{\beta - \ln\alpha}{\alpha}, \quad |u| \to \infty,$$

означает, что при больших $|x|$ модуль $|\lambda|$ тоже велик и $|\arg\lambda| < \pi - \delta'$ для некоторого $\delta' > 0$. Вначале предлагается изучить интеграл (5) в окрестности седловой точки

$\omega = 0$ при $0 \leq \arg\lambda < \pi - \delta'$; вторая половина сектора исследуется аналогично. Для этого путь интегрирования заменяется кривой, на которой функция $e^\omega - \omega - 1$ как вектор комплексной плоскости имеет постоянное направление $\dfrac{1}{2}(\pi + \delta')$. Эта кривая начинается в $\left(-2\pi + \dfrac{1}{2}\pi + \dfrac{1}{2}\delta'\right)i + \infty$ и заканчивается в $\dfrac{1}{2}(\pi + \delta')\, i + \infty$. Для нее выполняется оценка $\omega^2 = O\left(e^\omega - \omega - 1\right)$. В существовании такой кривой легко убедиться с помощью двух конформных отображений. Первое из них — это суперпозиция функции $2\left(e^\omega - \omega - 1\right)$, отображающей полосу $0 < \operatorname{Im}\omega < 2\pi$ на плоскость без двух лучей $[0, +\infty)$ и $[-4\pi i, -4\pi i + \infty)$, и квадратного корня, отображающего плоскость на верхнюю полуплоскость, т. е. формально это $\sqrt{2\left(e^\omega - \omega - 1\right)} = \xi_1$. Образ начальной полосы $0 < \operatorname{Im}\omega < 2\pi$ относительно такой суперпозиции — это верхняя полуплоскость без гиперболической арки $(\operatorname{Im}\xi)(\operatorname{Re}\xi) = -2\pi,\ \operatorname{Re}\xi \leq -\sqrt{2\pi}$. Второе конформное отображение ξ_2 имеет ту же формулу, но функция $2\left(e^\omega - \omega - 1\right)$ отображает полосу $-2\pi < \operatorname{Im}\omega < 0$ на плоскость без лучей $[0, +\infty)$ и $[4\pi i, 4\pi i + \infty)$, а квадратный корень отображает плоскость на нижнюю полуплоскость. Образ полосы $-2\pi < \operatorname{Im}\omega < 0$ относительно второй суперпозиции — это нижняя полуплоскость без гиперболической арки $(\operatorname{Im}\xi)(\operatorname{Re}\xi) = 2\pi,\ \operatorname{Re}\xi \leq -\sqrt{2\pi}$. Из равенств $\sqrt{2\left(e^\omega - \omega - 1\right)} = \xi_1 = e^{\frac{\pi+\delta'}{4}i}t,\ t > 0$, и $\sqrt{2\left(e^\omega - \omega - 1\right)} = \xi_2 = e^{\frac{\pi+\delta'}{4}i}t,\ t < 0$, получаем две ветви нужной кривой. В окрестности точки $\omega = 0$ разлагаем в степенной ряд произведение

$$e^{\frac{(\omega(\xi))^2}{2\alpha}}\omega'(\xi) = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 + \ldots, \quad a_0 = 1.$$

Применяя метод Лапласа для оценки интегралов, вычисляем асимптотическую формулу в секторе $0 \leq \arg\lambda < \pi - \delta',\ |\lambda| \to \infty$:

$$F_0(x) = e^{\frac{\lambda^2 + 2\lambda}{2\alpha}} \left\{ \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_{2k} \frac{(2k)!}{k!} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^k \lambda^{-k-\frac{1}{2}} + O\left(|\lambda|^{-n-\frac{3}{2}}\right) \right\}.$$

В приведенных выше рассуждениях седловая точка $\omega = 0$ была граничной точкой для областей определения функций $\xi_{1,2}$. Для лучшего понимая разработанных де Брейном методов уместно предложить еще один способ построения указанной кривой.

В окрестности нуля разложим в степенной ряд произведение

$$2\left(e^\omega - \omega - 1\right) = \omega^2\left(1 + 2\frac{\omega}{3!} + 2\frac{\omega^2}{4!} + 2\frac{\omega^3}{5!} + \ldots\right).$$

Функция $f(\omega) \overset{\mathrm{df}}{=} \omega\sqrt{1 + 2\dfrac{\omega}{3!} + 2\dfrac{\omega^2}{4!} + 2\dfrac{\omega^3}{5!} + \ldots}$ определена в окрестности нуля, дифференцируема и равна нулю в нуле, ее производная $f'(0) = 1$. Поэтому в окрестности нуля существует обратная функция $g(z)$ такая, что $g(0) = 0,\ g'(0) = 1$ и $z = f(g(z))$. Отсюда имеем

$$\frac{z^2}{2} = e^{g(z)} - g(z) - 1.$$

Полагая $\dfrac{1}{2}(\pi + \delta') \overset{\mathrm{df}}{=} v,\ z = te^{i\frac{v}{2}}$, для достаточно малых $|t| \leq \varepsilon$ получаем равенство

$$\frac{t^2}{2}e^{iv} = e^{g(te^{i\frac{v}{2}})} - g\big(te^{i\frac{v}{2}}\big) - 1.$$

Производная имеет вид

$$\frac{d}{dt}\,g\big(te^{i\frac{v}{2}}\big) = g'\big(te^{i\frac{v}{2}}\big)e^{i\frac{v}{2}}\Big|_{t=0} = e^{i\frac{v}{2}}.$$

Предположим, что существует функция $\omega = \omega(r)$, для которой выполняется тождество

$$e^{\omega(r)} - \omega(r) - 1 = re^{iv}.$$

Дифференцируя его, получаем

$$\omega'(r) = \frac{e^{iv}}{e^{\omega(r)} - 1}$$

или, полагая $\operatorname{Re}\omega(r) = x(r),\ \operatorname{Im}\omega(r) = y(r)$,

$$\begin{cases} x'(r) = \dfrac{e^x\cos(y-v) - \cos v}{e^{2x} - 2e^x\cos y + 1} = \dfrac{e^x\cos(y-v) - \cos v}{|e^\omega - 1|^2}, \\ y'(r) = \dfrac{-e^x\sin(y-v) - \sin v}{e^{2x} - 2e^x\cos y + 1} = \dfrac{-e^x\sin(y-v) - \sin v}{|e^\omega - 1|^2}. \end{cases} \tag{6}$$

Обозначим $B_\mu(z_0) \stackrel{\text{df}}{=} \{z||z_0 - z| < \mu\}$ и построим множества

$$S_1 \stackrel{\text{df}}{=} \{\omega|\,|\operatorname{Re}\omega| \le l, |\operatorname{Im}\omega| \le 2\pi\} \setminus \Big(B_\mu(-2\pi i)\bigcup B_\mu(0)\bigcup B_\mu(2\pi i)\Big),$$

$$S_2 \stackrel{\text{df}}{=} \{\omega|\,|\operatorname{Re}\omega| \le l + \mu/4, |\operatorname{Im}\omega| \le 2\pi + \mu/4\} \setminus \Big(B_{\mu/2}(-2\pi i)\bigcup B_{\mu/2}(0)\bigcup B_{\mu/2}(2\pi i)\Big),$$

$S_2 \supset S_1$. Если точка $\omega_0 = x_0 + iy_0 \in S_1$, то множество имеет вид

$$H(\omega_0) \stackrel{\text{df}}{=} \{\omega = x + iy||x - x_0| \le \mu/8, |y - y_0| \le \mu/8\} \subset S_2.$$

На компакте S_2 выполняется оценка $|e^\omega - 1|^2 \ge \eta > 0$. Поэтому на S_2 выполняются неравенства

$$\frac{|e^x\cos(y-v) - \cos v|}{|e^\omega - 1|^2} \le \frac{M}{\eta} \qquad \text{и} \qquad \frac{|-e^x\sin(y-v) - \sin v|}{|e^\omega - 1|^2} \le \frac{M}{\eta},$$

M — постоянная. На множестве $H(\omega_0)$ правые части системы (6) имеют отличный от нуля знаменатель, следовательно, они непрерывно дифференцируемы по обеим переменным. Отсюда и из [6, с. 142, 143] следует существование единственного решения системы (6) с начальными условиями $x(r_0) = x_0,\ y(r_0) = y_0$ на отрезке $r_0 - h \le r \le r_0 + h$, где $h = \dfrac{\mu\eta}{8M} > 0$. Так как h не зависит от конкретного квадрата $H(\omega_0)$, то продолжать вправо решение $x(r),\ y(r)$ можно до выхода траектории за пределы множества S_1 или до бесконечности, если такого выхода не происходит. Система (6) эквивалентна равенству $e^{\omega(r)} - \omega(r) - re^{iv} \equiv \text{const}$, поэтому если в начальный момент r_0 выполняется равенство $e^{\omega(r_0)} - \omega(r_0) - r_0e^{iv} = 1$, то оно будет выполняться на всем отрезке существования решения начальной задачи $e^{\omega(r)} - \omega(r) - 1 = re^{iv}$.

Иными словами, $\omega(r)$ — корень уравнения

$$e^{\omega} - \omega - 1 = re^{iv}. \tag{7}$$

Из принципа аргумента следует, что уравнение (7) при $r \geq 0$ в полосе $|\mathrm{Im}\,\omega| < 2\pi$ имеет два корня с учетом кратности. Из соответствующего рисунка так же получаем, что траектория решения $\omega(r)$ не может пересекаться с горизонтальными отрезками границы множества S_1. Если радиус μ достаточно мал, то траектория не может пересекаться с границами кругов $B_\mu(-2\pi i)$ и $B_\mu(2\pi i)$, иначе это означало бы существование корня ω_1 уравнения (7) при некотором $r = r_1 \geq r_0$ в малой окрестности точек $-2\pi i$ или $2\pi i$, где $e^{\omega_1} - \omega_1 - 1 \approx 2\pi i$ или $-2\pi i$ соответственно. Но точки $2\pi i$ и $-2\pi i$ не принадлежат лучу re^{iv}, $r \geq 0$, поэтому ни при каких r уравнение (7) не может иметь корней в достаточно малых окрестностях точек $-2\pi i$ и $2\pi i$. Относительно точки $\omega = 0$ можно сказать следующее: при $r \geq r_0$ получаем $\left|e^{\omega(r)} - \omega(r) - 1\right| = r \geq r_0$, и следовательно, точка $\omega(r)$ не может попасть в достаточно малую окрестность начала координат, где функция $e^{\omega} - \omega - 1$ принимает сколь угодно малые значения. т. е. траектория $\omega(r)$ не может пересечь границу круга $B_\mu(0)$. Но и оставаться в пределах множества S_1 траектория бесконечно не может, так как с ростом r растет модуль $\left|e^{\omega(r)} - \omega(r) - 1\right|$, и поэтому, оставаясь в полосе $|\mathrm{Im}\,\omega| < 2\pi$, вещественная часть $\mathrm{Re}\,\omega(r) = x(r) \to +\infty$ при $r \to \infty$. Последнее следует из рисунка образа границы прямоугольника $\{\omega |\, |\mathrm{Re}\,\omega| \leq l, |\mathrm{Im}\,\omega| \leq 2\pi\}$ относительно функции $e^{\omega} - \omega - 1$ или из формулы производной $x'(r)$, которая положительна при больших по модулю отрицательных значениях $x(r)$.

Начальные данные $r_0 = \dfrac{\varepsilon^2}{2}$, $\omega(r_0) = g\left(-\varepsilon e^{i\frac{v}{2}}\right)$ (нижняя полуплоскость) и $\omega(r_0) = g\left(\varepsilon e^{i\frac{v}{2}}\right)$ (верхняя полуплоскость) для системы (6) определяют две непересекающиеся траектории $\omega_1(r)$, $\omega_2(r)$ (и без самопересечений), которые в каждой точке $r \geq \varepsilon^2/2$ удовлетворяют тождествам $e^{\omega_k(r)} - \omega_k(r) - 1 = re^{iv}$, $k = 1, 2$, т. е. определяют два корня уравнения (7) в полосе $|\mathrm{Im}\,\omega| < 2\pi$. Поэтому они не могут пересекать вещественную ось и навсегда остаются в нижней и верхней полуплоскостях соответственно. Кроме этого пересечение $\omega_1(r)$ и $\omega_2(r)$ в силу того же тождества не возможно при разных r, если же предположить их пересечение при одинаковом r_2, то это противоречит единственности решения задачи Коши для нашей системы дифференциальных уравнений. Точнее, решения должны были бы совпасть на отрезке $r_2 - h \leq r \leq r_2 + h$, а это означало бы отсутствие точки первого совпадения у двух решений, вышедших из разных точек. Самопересечение не возможно в силу того же тождества, так как оно подразумевает совпадение точек $\omega_i(r_3) = \omega_i(r_4)$ при разных значениях аргумента $r_3 \neq r_4$.

Искомая кривая определяется формулой

$$\gamma(u) = \begin{cases} \omega_1\left(\dfrac{u^2}{2}\right), & u \leq -\varepsilon, \\ g\left(ue^{i\frac{v}{2}}\right), & -\varepsilon \leq u \leq \varepsilon, \\ \omega_2\left(\dfrac{u^2}{2}\right), & u \geq \varepsilon. \end{cases}$$

Согласно начальным данным двух задач Коши для $\omega_{1,2}(r)$ кривая $\gamma(u)$ непрерывна. Для нее так же выполняется тождество $\dfrac{u^2}{2}\, e^{iv} = e^{\gamma(u)} - \gamma(u) - 1$, из которого получаем равенство $\gamma'(u) = \dfrac{ue^{iv}}{e^{\gamma(u)} - 1}$. Отсюда и из непрерывности кривой следует совпадение лево- и правосторонних производных в точках $\pm\varepsilon$.

Из условий $|\mathrm{Im}\,\omega(r)| = |y(r)| < 2\pi$, $\mathrm{Re}\,\omega(r) = x(r) \to \infty$ при $r \to \infty$ и равенства $e^{\omega(r) - \ln r}\left(1 - e^{-\omega(r)}\omega(r) - e^{-\omega(r)}\right) = e^{iv}$ получаем асимптотические свойства кривой. А именно, так как $1 - e^{-\omega(r)}\omega(r) - e^{-\omega(r)} \to 1$ при $r \to \infty$, то $e^{\omega(r) - \ln r} \to e^{iv}$. Поэтому $x(r) = \ln r + o(1),\ y(r) = v + o(1)$ или $y(r) = v - 2\pi + o(1)$. Поскольку согласно принципу аргумента в полосе $|\mathrm{Im}\,\omega(r)| < \pi$ при больших r существует только один корень уравнения (7) и с учетом того, что $\omega_2(r)$ находится в верхней полуплоскости, а $\omega_1(r)$ — в нижней, получаем $y_2(r) = v + o(1),\ y_1(r) = v - 2\pi + o(1)$. На кривой имеем

$$\left|\omega_k^2(r)\right| = (\ln r + o(1))^2 + y_k^2(r) = o(r) = o\left(\left|e^{\omega_k} - \omega_k - 1\right|\right), \quad k = 1, 2.$$

Несложно проверить возможность замены в интеграле (5) пути интегрирования $V - \zeta$ кривой $\gamma(u)$:

$$F_0(x) = -\frac{i}{\sqrt{2\pi\alpha}}\, e^{\frac{\lambda^2 + 2\lambda}{2\alpha}} \int\limits_{\gamma} e^{\frac{\omega^2}{2\alpha} + \frac{\lambda}{\alpha}\,(e^{\omega} - \omega - 1)}\, d\omega = -\frac{i}{\sqrt{2\pi\alpha}}\, e^{\frac{\lambda^2 + 2\lambda}{2\alpha}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{(\gamma(u))^2}{2\alpha} + \frac{\lambda}{\alpha}\,\frac{u^2}{2}\,e^{iv}} \gamma'(u) du.$$

Перепишем интеграл

$$\int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} e^{\frac{(\gamma(u))^2}{2\alpha} + \frac{\lambda}{2\alpha}\,u^2 e^{iv}} \gamma'(u) du = \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} e^{\frac{\left(\omega_2\left(\frac{u^2}{2}\right)\right)^2}{2\alpha} + \frac{\lambda}{2\alpha}\,u^2\,e^{iv}} \frac{d}{du}\left(\omega_2\left(\frac{u^2}{2}\right)\right) du =$$

$$= \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} e^{\frac{\left(\omega_2\left(\frac{u^2}{2}\right)\right)^2}{2\alpha} + \frac{\lambda}{2\alpha}\,u^2 e^{iv}} \omega_2'\left(\frac{u^2}{2}\right) u\, du =$$

$$= \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} e^{\frac{\left(\omega_2\left(\frac{u^2}{2}\right)\right)^2}{2\alpha} + \frac{|\lambda| e^{i(\arg\lambda + v)}}{2\alpha} u^2} \frac{e^{iv}}{e^{\omega_2\left(\frac{u^2}{2}\right)} - 1} u\, du$$

и оценим его:

$$\left| \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} e^{\frac{\left(\omega_2\left(\frac{u^2}{2}\right)\right)^2}{2\alpha} + \frac{|\lambda| e^{i(\arg\lambda + v)}}{2\alpha} u^2} \frac{e^{iv} u}{e^{\omega_2\left(\frac{u^2}{2}\right)} - 1} du \right| \le$$

$$\le \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} e^{\frac{|\lambda|\cos(\arg\lambda + v)}{2\alpha} u^2} \left| e^{\frac{\left(\omega_2\left(\frac{u^2}{2}\right)\right)^2}{2\alpha}} \frac{e^{iv} u}{e^{\omega_2\left(\frac{u^2}{2}\right)} - 1} \right| du \le$$

$$\le \int_{\varepsilon}^{+\infty} e^{\frac{|\lambda|\cos v}{2\alpha} u^2} \left| e^{\frac{\left(\omega_2\left(\frac{u^2}{2}\right)\right)^2}{2\alpha}} \frac{e^{iv}}{e^{\omega_2\left(\frac{u^2}{2}\right)} - 1} \right| u du =$$

$$= \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} e^{\frac{(|\lambda|-1)\cos v}{2\alpha}\, u^2} e^{\frac{\cos v}{2\alpha}\, u^2} \left| e^{\frac{\left(\omega_2\left(\frac{u^2}{2}\right)\right)^2}{2\alpha}} \frac{e^{iv}}{e^{\omega_2\left(\frac{u^2}{2}\right)} - 1} \right| u du \le$$

$$\le e^{\frac{(|\lambda|-1)\cos v}{2\alpha}\varepsilon^2} \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} e^{\frac{\cos v}{2\alpha}\, u^2} \left| e^{\frac{\left(\omega_2\left(\frac{u^2}{2}\right)\right)^2}{2\alpha}} \frac{e^{iv}}{e^{\omega_2\left(\frac{u^2}{2}\right)} - 1} \right| u\, du.$$

Так как $\left|\omega_k^2\left(\dfrac{u^2}{2}\right)\right| = o(u^2)$ и $e^{\omega_2\left(\frac{u^2}{2}\right)} = \dfrac{u^2}{2} e^{o(1)+iy_2\left(\frac{u^2}{2}\right)}$, последний интеграл можно ограничить сверху величиной

$$e^{\frac{|\lambda|\cos v}{2\alpha}\varepsilon^2} e^{-\frac{\cos v}{2\alpha}\varepsilon^2} \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{2\alpha}\left\{\cos v + \frac{o(u^2)}{u^2}\right\}u^2} u du}{\left|\frac{u^2}{2}\, e^{o(1)+iy_2\left(\frac{u^2}{2}\right)} - 1\right|} = O\Big(e^{\frac{|\lambda|\cos v}{2\alpha}\,\varepsilon^2}\Big), \quad |\lambda| \to \infty. \tag{8}$$

Для интеграла на отрезке $(-\infty, -\varepsilon]$ справедлива такая же оценка.

Отметим, что комплексное число $-\dfrac{\lambda e^{iv}}{2\alpha}$ имеет положительную вещественную часть, а точнее $\left|\arg\left(-\dfrac{\lambda e^{iv}}{2\alpha}\right)\right| \le \dfrac{1}{2}\,(\pi - \delta') \overset{\text{df}}{=} v_1$.

Разложим в окрестности нуля в степенной ряд функцию

$$e^{\frac{(\gamma(u))^2}{2\alpha}}\, \gamma'(u) = b_0 + b_1 u + b_2 u^2 + b_3 u^3 + \ldots$$

и распишем интеграл

$$\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{\frac{(\gamma(u))^2}{2\alpha} + \frac{\lambda}{2\alpha}\, u^2 e^{iv}} \gamma'(u) du = \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{\frac{\lambda}{2\alpha}\, u^2 e^{iv}} \left(b_0 + b_1 u + b_2 u^2 + \ldots\right) du = \left\{-\frac{\lambda e^{iv}}{2\alpha} \overset{\text{df}}{=} \lambda_1\right\} =$$

$$= b_0 \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-\lambda_1 u^2} du + b_2 \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-\lambda_1 u^2} u^2 du + b_4 \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-\lambda_1 u^2} u^4 du + \ldots$$

$$\ldots + b_{2n} \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-\lambda_1 u^2} u^{2n} du + \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-\lambda_1 u^2} O\left(u^{2n+2}\right) du.$$

Оценим остаток

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} e^{-\lambda_1 u^2} u^k du\right| \le \int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} e^{-\operatorname{Re}\lambda_1 u^2} |u|^k du \le \int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} e^{-|\lambda_1|\cos v_1 u^2} |u|^k du \le$$

$$\le e^{-(|\lambda_1|-1)\cos v_1 \varepsilon^2} \int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} e^{-\cos v_1 u^2} |u|^k du = O\Big(e^{-|\lambda_1|\varepsilon^2 \cos v_1}\Big)$$

и слагаемое

$$\left|\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-\lambda_1 u^2} O\left(u^{2n+2}\right) du\right| \leq \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-\mathrm{Re}\,\lambda_1 u^2} L u^{2n+2} du =$$

$$= L\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mathrm{Re}\,\lambda_1 u^2} u^{2n+2} du \leq L\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-|\lambda_1|\cos v_1 u^2} u^{2(n+1)} du =$$

$$= L|\lambda_1|^{-n-\frac{3}{2}} (\cos v_1)^{-n-\frac{3}{2}}\, \Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right) = O\Big(|\lambda_1|^{-n-\frac{3}{2}}\Big),$$

где L — некоторая постоянная. Теперь можно записать последнюю сумму интегралов в форме

$$b_0 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda_1 u^2} du + b_2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda_1 u^2} u^2 du + b_4 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda_1 u^2} u^4 du + \ldots$$

$$\ldots + b_{2n} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda_1 u^2} u^{2n}\, du + O\left(|\lambda_1|^{-n-\frac{3}{2}}\right) =$$

$$= \{\mathrm{Re}\,\lambda_1 > 0\} = \sum_{k=0}^{n} b_{2k} \Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right) \lambda_1^{-k-\frac{1}{2}} + O\left(|\lambda_1|^{-n-\frac{3}{2}}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} b_{2k}\sqrt{\pi}\, \frac{(2k)!}{k! 2^{2k}} \lambda_1^{-k-\frac{1}{2}} + O\left(|\lambda_1|^{-n-\frac{3}{2}}\right) = \left\{\lambda_1 = -\frac{\lambda e^{iv}}{2\alpha}\right\} =$$

$$= e^{-i\frac{v}{2}} i\sqrt{\pi\alpha}\lambda^{-\frac{1}{2}} \left\{\sum_{k=0}^{n} b_{2k} \left(e^{-i\frac{v}{2}}\right)^{2k} (-1)^k \frac{(2k)!}{k! 2^{k-\frac{1}{2}}}\, \alpha^k \lambda^{-k} + O\left(|\lambda|^{-n-1}\right)\right\}.$$

Отсюда, учитывая (8), получаем формулу

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{(\gamma(u))^2}{2\alpha} + \frac{\lambda}{2\alpha} u^2 e^{iv}}\, \gamma'(u) du =$$

$$= e^{-i\frac{v}{2}} i\sqrt{2\pi\alpha}\lambda^{-\frac{1}{2}} \left\{\sum_{k=0}^{n} b_{2k} \left(e^{-i\frac{v}{2}}\right)^{2k} (-1)^k \frac{(2k)!}{k! 2^{k}} \alpha^k \lambda^{-k} + O\left(|\lambda|^{-n-1}\right)\right\}.$$

Разложим в окрестности нуля в степенной ряд произведение

$$e^{\frac{(g(z))^2}{2\alpha}} g'(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots .$$

Тогда

$$e^{\frac{(\gamma(u))^2}{2\alpha}}\gamma'(u) = e^{\frac{\left(g\left(ue^{i\frac{v}{2}}\right)\right)^2}{2\alpha}}\,\frac{d}{du}\,g\left(ue^{i\frac{v}{2}}\right) =$$

$$= a_0e^{i\frac{v}{2}} + a_1\left(e^{i\frac{v}{2}}\right)^2u + a_2\left(e^{i\frac{v}{2}}\right)^3u^2 + a_3\left(e^{i\frac{v}{2}}\right)^4u^3 + \ldots .$$

Отсюда получаем $b_m\left(e^{i\frac{v}{2}}\right)^{-m-1} = a_m,\ m \geq 0,$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{(\gamma(u))^2}{2\alpha}+\frac{\lambda}{2\alpha}\,u^2e^{iv}}\gamma'(u)\,du = i\sqrt{2\pi\alpha}\left\{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_{2k}\,\frac{(2k)!}{k!}\,\left(\frac{1}{2}\,\alpha\right)^k\lambda^{-k-\frac{1}{2}} + O\left(|\lambda|^{-n-\frac{3}{2}}\right)\right\}$$

и асимптотическую формулу для $F_0(x)$.

Из § 5.2 [4] необходимо исследовать асимптотическое поведение функции

$$G_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}}\,e^{-\frac{\lambda^2+2\lambda}{2\alpha}}\int\limits_{-\infty-\zeta}^{+\infty-\zeta} e^{-\frac{\omega^2}{2\alpha}-\frac{\lambda}{\alpha}(e^{\omega}-\omega-1)}\,d\omega, \tag{9}$$

где ζ и λ такие же, как и в определении функции $F_0(x)$. С учетом логарифмической замены независимой переменной функция $G_0(x)$ — решение уравнения $h'(t) = ch(\theta t)$, где $\theta > 1$, которое изучалось в [7].

Рассуждения де Брейна в нашем переводе следующие. Сравнивая этот и предыдущий случаи, сталкиваемся с серьезными трудностями. Если ω находится в левой полуплоскости и $|\omega|$ большой, то слагаемое с $e^{\omega} - \omega - 1$ в степени экспоненты больше не играет главную роль. Поэтому мы не можем взять путь интегрирования, который асимптотически составляет угол больше чем $\pi/4$ с отрицательной вещественной полуосью. Дело в том, что $\omega = 0$ — главная седловая точка лишь в случае, когда $|\arg\lambda| < \dfrac{3}{4}\,\pi - \delta'$, иначе седловая точка в окрестности $\omega = \lambda$ будет делать основной вклад в асимптотическое поведение.

Для наших целей поведение $G_0(x)$ для x, расположенных далеко в левой полуплоскости, не важно. Поэтому мы считаем $|\arg\lambda| < \dfrac{3}{4}\,\pi - \delta'$ и сначала исследуем случай $0 \leq \arg\lambda < \dfrac{3}{4}\,\pi - \delta'$. В качестве пути интегрирования можем теперь взять кривую, проходящую через начало координат, на которой вектор $e^{\omega}-\omega-1$ имеет постоянное направление $-\dfrac{1}{4}\,\pi$. Часть этой кривой, расположенная справа от точки $\omega = 0$, легко строится с помощью метода, использованного в § 5.1. Для части слева от точки $\omega = 0$ лучше использовать образ левой ω-полуплоскости относительно функции $\eta = e^{\omega} - \omega - 1$.

Еще раз используя обычную технику, окончательно получаем

$$G_0(x) = e^{-\frac{\lambda^2+2\lambda}{2\alpha}}\left\{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k b_{2k}\frac{(2k)!}{k!}\,\left(\frac{\alpha}{2}\right)^k\lambda^{-k-\frac{1}{2}} + O\left(|\lambda|^{-n-\frac{3}{2}}\right)\right\}$$

равномерно по $|\lambda| \to \infty,\ |\arg\lambda| < \dfrac{3}{4}\,\pi - \delta'$. Множители b_k — это коэффициенты степенного ряда функции $\exp\left(-\omega^2/2\alpha\right)\cdot d\omega/d\xi$, в частности, $b_0 = 1$. В силу определения λ асимптотическая формула функции $G_0(x)$ справедлива для $|x| \to \infty,\ |\arg x| < \dfrac{3}{4}\,\pi - \delta$.

Дальше нужная кривая, существование которой уже доказано, будет еще раз построена вторым способом.

Переопределим величину $v \stackrel{\mathrm{df}}{=} -\dfrac{1}{4}\pi + \dfrac{\delta'}{2}$ и построим для нового значения v систему (6) и новые множества

$$S_1 \stackrel{\mathrm{df}}{=} \{\omega| -l \leq Re\omega \leq 0, |\operatorname{Im}\omega| \leq h\} \setminus \left(\bigcup_{n\in \mathrm{Z}} B_\mu\left(2\pi ni\right)\right),$$

$$S_2 \stackrel{\mathrm{df}}{=} \{\omega| -l-\mu/4 \leq Re\omega \leq \mu/4, |\operatorname{Im}\omega| \leq h+\mu/4\} \setminus \left(\bigcup_{n\in \mathrm{Z}} B_{\mu/2}(2\pi ni)\right),$$

$S_2 \supset S_1$. Дословно повторяя рассуждения для функции $F_0(x)$, заключаем, что если $\omega(r_0) \in \in S_1$, то решение системы (6) с такими начальными данными можно продолжать вправо до выхода траектории за пределы множества S_1 или до бесконечности, если такого выхода не происходит. Система (6) по-прежнему эквивалентна равенству $e^{\omega(r)} - \omega(r) - re^{iv} \equiv \equiv \mathrm{const}$. Предположим $e^{\omega(r_0)} - \omega(r_0) - r_0e^{iv} = 1$. Тогда $e^{\omega(r)} - \omega(r) - 1 = re^{iv},\ r \geq r_0$. Из последнего равенства следует, что если $r_0 > 0$, то траектория $\omega(r)$ не может пересекать мнимую и вещественную оси, а так же границы кругов $B_\mu(2\pi ni),\ n \in \mathrm{Z},\ 2\pi|n| \leq h$ при достаточно малом μ, более того, траектория должна выйти на границу множества S_1. В левой полуплоскости справедлива оценка $r \geq |\omega(r)| - 2$, поэтому произвольность параметров h и l в определении множества S_1 означает, что решение $\omega(r)$ продолжается на всю полуось $[r_0, +\infty)$. Также решение не может оставаться во множестве $\{\omega| -l \leq \leq \operatorname{Re}\omega \leq 0\}$, где l — произвольное фиксированное число. Поэтому $\omega'(r) = -e^{iv}(1+o(1))$ и $\omega(r) = -re^{iv} - 1 + o(1),\ r \to \infty$.

Чтобы построить кривую в правой полуплоскости, определим множества

$$S_1 \stackrel{\mathrm{df}}{=} \{\omega|0 \leq \operatorname{Re}\omega \leq l,\ -2\pi \leq \operatorname{Im}\omega \leq 0\} \setminus \left(B_\mu(-2\pi i) \bigcup B_\mu(0)\right),$$

$$S_2 \stackrel{\mathrm{df}}{=} \{\omega| -\mu/4 \leq \operatorname{Re}\omega \leq l+\mu/4,\ -2\pi-\mu/4 \leq \operatorname{Im}\omega \leq \mu/4\} \setminus \left(B_{\mu/2}(-2\pi i) \bigcup B_{\mu/2}(0)\right),$$

$S_2 \supset S_1$. Если $\omega(r_0)$ находится внутри множества S_1 и $e^{\omega(r_0)} - \omega(r_0) - r_0e^{iv} = 1$, то, повторяя рассуждения для случая $F_0(x)$, заключаем, что траектория $\omega(r)$ выходит на границу множества S_1 в точке $\operatorname{Re}\omega(r_1) = l,\ -2\pi < \operatorname{Im}\omega(r_1) < 0$. Так как число l произвольно, то решение $\omega(r)$ продолжается вправо на всю полуось $[r_0, +\infty)$. Из тождества $e^{\omega(r)} - \omega(r) - 1 = re^{iv},\ r \geq r_0$ и свойства $\omega(r) \in \{\omega|0 < \operatorname{Re}\omega,\ -2\pi < \operatorname{Im}\omega < 0\}$ получаем $\operatorname{Re}\omega(r) \to +\infty,\ r \to \infty$. Тогда из равенства $e^{\omega(r)-\ln r}\left(1 - e^{-\omega(r)}\omega(r) - e^{-\omega(r)}\right) = e^{iv}$ следует $x(r) = \ln r + o(1),\ y(r) = v + o(1)$. Отсюда $\left|\omega^2(r)\right| = o(r)$.

Теперь снова через функцию $g\left(ue^{i\frac{v}{2}}\right),\ -\varepsilon \leq u \leq \varepsilon$ гладко соединяем левую и правую ветви искомой кривой $\gamma(u)$.

Также не сложно проверить возможность замены в интеграле (9) пути интегрирования $(-\infty - \zeta, +\infty - \zeta)$ кривой $\gamma(u)$

$$G_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}}\, e^{-\frac{\lambda^2+2\lambda}{2\alpha}} \int\limits_\gamma e^{-\frac{\omega^2}{2\alpha} - \frac{\lambda}{\alpha}\,(e^\omega - \omega - 1)} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} e^{-\frac{\lambda^2+2\lambda}{2\alpha}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\gamma(u))^2}{2\alpha} - \frac{\lambda}{\alpha}\,\frac{u^2}{2}\,e^{iv}} \gamma'(u)\,du.$$

Перепишем интеграл в виде

$$\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} e^{-\frac{(\gamma(u))^2}{2\alpha}-\frac{\lambda}{\alpha}\frac{u^2}{2}e^{iv}}\gamma'(u)du = \int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} e^{-\frac{\left(\omega_1\left(\frac{u^2}{2}\right)\right)^2}{2\alpha}-\frac{\lambda}{\alpha}\frac{u^2}{2}e^{iv}}\frac{d}{du}\left(\omega_1\left(\frac{u^2}{2}\right)\right)du =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} e^{-\frac{\left(\omega_1\left(\frac{u^2}{2}\right)\right)^2}{2\alpha}-\frac{|\lambda|e^{i(\arg\lambda+v)}}{2\alpha}u^2}\frac{e^{iv}}{e^{\omega_1\left(\frac{u^2}{2}\right)}-1}u\,du.$$

Учитывая асимптотическую формулу $\omega_1(r) = -re^{iv}-1+o(1)$ и следующую отсюда оценку $\mathrm{Re}\left\{-\left(\omega_1\left(\frac{u^2}{2}\right)\right)^2\right\} < 0$ при больших по модулю $u,$ оцениваем последний интеграл:

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} e^{-\frac{\left(\omega_1\left(\frac{u^2}{2}\right)\right)^2}{2\alpha}-\frac{|\lambda|e^{i(\arg\lambda+v)}}{2\alpha}u^2}\frac{e^{iv}}{e^{\omega_1\left(\frac{u^2}{2}\right)}-1}udu\right| \le$$

$$\le L\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} e^{-\frac{|\lambda|\cos(\arg\lambda+v)}{2\alpha}u^2}\left|\frac{e^{iv}u}{e^{\omega_1\left(\frac{u^2}{2}\right)}-1}\right|du \le$$

$$\le L\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} e^{-\frac{|\lambda|\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\delta'}{2}\right)}{2\alpha}u^2}\left|\frac{e^{iv}u}{e^{\omega_1\left(\frac{u^2}{2}\right)}-1}\right|du \le$$

$$\le Le^{-\frac{(|\lambda|-1)\cos\left(\frac{\pi-\delta'}{2}\right)}{2\alpha}\varepsilon^2}\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\left|\frac{e^{-\frac{\cos\left(\frac{\pi-\delta'}{2}\right)}{2\alpha}u^2}e^{iv}u}{e^{\omega_1\left(\frac{u^2}{2}\right)}-1}\right|du =$$

$$= O\left(e^{-\frac{|\lambda|\cos\left(\frac{\pi-\delta'}{2}\right)}{2\alpha}\varepsilon^2}\right), \quad |\lambda|\to\infty, \tag{10}$$

где L — некоторая постоянная. Для интеграла на отрезке $[\varepsilon,+\infty)$ с помощью рассуждений для функции $F_0(x)$ можно установить аналогичную экспоненциальную оценку.

Разложим в окрестности нуля в степенной ряд функцию

$$e^{-\frac{(\gamma(u))^2}{2\alpha}}\gamma'(u) = c_0 + c_1u + c_2u^2 + c_3u^3 + \ldots$$

и распишем интеграл

$$\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-\frac{(\gamma(u))^2}{2\alpha}-\frac{\lambda}{\alpha}\frac{u^2}{2}e^{iv}}\gamma'(u)du =$$

$$= \left\{\frac{\lambda e^{iv}}{2\alpha}\overset{\mathrm{df}}{=}\lambda_1\right\} = c_0\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-\lambda_1u^2}du + c_2\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-\lambda_1u^2}u^2du+$$

$$+ c_4 \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-\lambda_1 u^2} u^4 du + \ldots + c_{2n} \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-\lambda_1 u^2} u^{2n} du + \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-\lambda_1 u^2} O\big(u^{2n+2}\big) du.$$

Оценим остаток

$$\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} e^{-\lambda_1 u^2} u^k du = O\left(e^{-|\lambda_1|\varepsilon^2 \cos\left(\frac{\pi-\delta'}{2}\right)}\right)$$

и слагаемое

$$\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-\lambda_1 u^2} O\left(u^{2n+2}\right) du = O\Big(|\lambda_1|^{-n-\frac{3}{2}}\Big).$$

Теперь последнюю сумму интегралов можно записать в следующей форме:

$$c_0 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda_1 u^2} du + c_2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda_1 u^2} u^2 du + c_4 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda_1 u^2} u^4 du + \ldots + c_{2n} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda_1 u^2} u^{2n} du +$$

$$+ O\Big(|\lambda_1|^{-n-\frac{3}{2}}\Big) = \{\operatorname{Re}\lambda_1 > 0\} = \sum_{k=0}^{n} c_{2k} \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) \lambda_1^{-k-\frac{1}{2}} + O\Big(|\lambda_1|^{-n-\frac{3}{2}}\Big) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} c_{2k} \sqrt{\pi} \frac{(2k)!}{k! 2^{2k}} \lambda_1^{-k-\frac{1}{2}} + O\Big(\,|\lambda_1|^{-n-\frac{3}{2}}\,\Big) = \left\{\lambda_1 = \frac{\lambda e^{iv}}{2\alpha}\right\} =$$

$$= \sqrt{2\pi\alpha}\lambda^{-\frac{1}{2}} \left\{\sum_{k=0}^{n} c_{2k} \big(e^{-i\frac{v}{2}}\big)^{2k+1} \frac{(2k)!}{k! 2^k} \alpha^k \lambda^{-k} + O\big(|\lambda|^{-n-1}\big)\right\}.$$

Отсюда, учитывая (10), получаем формулу

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\gamma(u))^2}{2\alpha} - \frac{\lambda}{\alpha}\frac{u^2}{2} e^{iv}} \gamma'(u)\, du = \sqrt{2\pi\alpha}\lambda^{-\frac{1}{2}} \left\{\sum_{k=0}^{n} c_{2k} \left(e^{-i\frac{v}{2}}\right)^{2k+1} \frac{(2k)!}{k! 2^k} \alpha^k \lambda^{-k} + O\big(|\lambda|^{-n-1}\big)\right\}.$$

Разложим в окрестности нуля в степенной ряд произведение

$$e^{-\frac{(g(z))^2}{2\alpha}} g'(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \ldots .$$

Тогда имеем

$$e^{-\frac{(\gamma(u))^2}{2\alpha}} \gamma'(u) = e^{-\frac{\left(g\left(ue^{i\frac{v}{2}}\right)\right)^2}{2\alpha}} \frac{d}{du} g\big(ue^{i\frac{v}{2}}\big) =$$

$$= b_0 e^{i\frac{v}{2}} + b_1 \big(e^{i\frac{v}{2}}\big)^2 u + b_2 \big(e^{i\frac{v}{2}}\big)^3 u^2 + b_3 \big(e^{i\frac{v}{2}}\big)^4 u^3 + \ldots .$$

Отсюда получаем $c_m\left(e^{i\frac{v}{2}}\right)^{-m-1} = b_m,\ m \geq 0,$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\gamma(u))^2}{2\alpha} - \frac{\lambda}{\alpha}\frac{u^2}{2}e^{iv}}\gamma'(u)du = \sqrt{2\pi\alpha}\left\{\sum_{k=0}^{n} b_{2k}\frac{(2k)!}{k!}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^k \lambda^{-k-\frac{1}{2}} + O\left(|\lambda|^{-n-\frac{3}{2}}\right)\right\}$$

и асимптотическую формулу

$$G_0(x) = e^{-\frac{\lambda^2+2\lambda}{2\alpha}}\left\{\sum_{k=0}^{n} b_{2k}\frac{(2k)!}{k!}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^k \lambda^{-k-\frac{1}{2}} + O\left(|\lambda|^{-n-\frac{3}{2}}\right)\right\}.$$

Литература

1. *Полищук В. М., Шарковский А. Н.* Представление решений линейных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа // Дифференц. уравнения. – 1973. – **9**, № 9. – С. 1627 – 1645.
2. *de Bruijn N. G.* The difference-differential equation $F'(x) = e^{\alpha x+\beta}F(x-1)$. I, II // Proc. Koninklijke Nederlandse Akad. Wetensch.: Ser. A: Math. Sci. – 1953. – **15**, № 5. – P. 449 – 458; 459 – 464.
3. *Пелюх Г. П.* Об асимптотических свойствах решений систем нелинейных дифференциально-функциональных уравнений // Дифференц. уравнения. – 2003. – **38**, № 1. – С. 1 – 5.
4. *де Брейн Н. Г.* Асимптотические методы в анализе. – М.: Мир, 1961. – 247 с.
5. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1950. – 473 с.
6. *Heard M. L.* A family of solutions of the initial value problem for the equation $x'(t) = ax(\lambda t),\ \lambda > 1$ // Aequationes Math. – 1973. – **9**, № 2-3. – P. 273 – 280.
7. *Spiridonov V.* Universal superpositions of coherent states and self-similar potentials // Phys. Rev. A. – 1995. – **52**. – P. 1909 – 1935.

Получено 14.03.2018,
после доработки — 04.08.2018