УДК 517.9

О ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ИМПУЛЬСНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ*

В. Н. Колесниченко, В. И. Слынько

Институт механики НАН Украины им. С. П. Тимошенко
ул. Нестерова, 3, Киев, 03057, Украина
e-mail: v.m.kolisnychenko@gmail.com
vitstab@ukr.net

Impulsive mechanical systems with delay are considered. We establish sufficient conditions for asymptotic stability by the linear approximation of the equilibrium positions of the system with periodic parameters. It is also assumed that the delay value is equal to the period of the system. The conditions of parametric stability of the lower equilibrium position of a mathematical pendulum taking into account the impulsive perturbations and delay are derived.

Розглянуто механічні системи з імпульсною дією та запізненням. Встановлено достатні умови асимптотичної стійкості за лінійним наближенням положення рівноваги системи при умові, що параметри системи змінюються періодично. При цьому припускається, що величина запізнення рівна періоду системи. Отримано умови параметричної стійкості нижнього положення рівноваги математичного маятника з урахуванням імпульсного збурення та запізнення.

Введение. Исследование устойчивости управляемых механических систем приводит к необходимости учета запаздывания в обратной связи и параметрических возмущений. Если при этом механическая система подвергается импульсным возмущениям в фиксированные моменты времени, то математической моделью движения такой системы являются дифференциальные уравнения с импульсным воздействием и запаздыванием. При этом периодические изменения параметров системы (параметрические возмущения) могут быть причиной потери устойчивости положения равновесия механической системы, поэтому важно установить условия устойчивости импульсной системы с запаздыванием. Примерами механических систем, где возникает необходимость одновременного учета параметрических возмущений, импульсного воздействия и запаздывания в функциях обратной связи, являются модели шагающих и прыгающих роботов [1].

Значительный вклад в развитие теории устойчивости дифференциальных уравнений с импульсным воздействием принадлежит киевской математической школе под руководством академика А. М. Самойленко. В монографии [2] изложены основы теории устойчивости линейных систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием, включая теорию Флоке, а также теоремы прямого метода Ляпунова. Различные вопросы теории устойчивости решений систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием рассматривались в работах [3 – 5]. Теоремы об устойчивости линейных периодических систем и проблема обобщения теории Флоке – Ляпунова для функционально-дифференциальных уравнений изложены в монографии [6].

* Выполнена при частичной поддержке Министерства образования и науки Украины, проект № 0116U004691.

В работе [7] для линейной системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием и запаздыванием предложена конструкция кусочно-дифференцируемой по времени функции Ляпунова и установлены достаточные условия асимптотической устойчивости на основе теорем прямого метода Ляпунова – Разумихина. Дальнейшее развитие идеи о кусочно-дифференцируемой по времени функции Ляпунова проведено в работе [8]. В работах [9, 10] получены достаточные условия асимптотической устойчивости линейной периодической импульсной системы с запаздыванием с постоянными коэффициентами. Эти условия сводятся к локализации корней некоторой трансцендентной функции в единичном круге комплексной плоскости. Однако явные условия такой локализации, аналогичные условиям Шура – Кона [11], пока неизвестны. Поэтому в этих работах исследование локализации корней проводилось численно-аналитическими методами.

В этой работе рассматривается задача об асимптотической устойчивости линейной периодической импульсной системы с запаздыванием в предположении, что величина запаздывания равна периоду системы. Для исследования устойчивости применяется отображение Пуанкаре, с помощью которого исследование устойчивости сводится к исследованию локализации корней некоторой трансцендентной характеристической функции в единичном круге комплексной плоскости. Однако, практическое применение этих условий затруднено двумя обстоятельствами. Во-первых, для вычисления характеристической функции необходимо предварительно проинтегрировать вспомогательную неавтономную линейную систему линейных дифференциальных уравнений, правая часть которой содержит скалярный комплексный параметр, и, во-вторых, решить задачу о локализации корней характеристического уравнения. Поэтому возникает необходимость нахождения возможно более грубых, но легко проверяемых достаточных условий асимптотической устойчивости линейной периодической импульсной системы с запаздыванием.

1. Постановка задачи. Можно показать, что при достаточно общих предположениях уравнения движения механической системы с конечным числом степеней свободы при действии параметрических и импульсных возмущений в окрестности положения равновесия описываются линейной системой дифференциальных уравнений с импульсным воздействием и запаздыванием

$$\begin{gathered}\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + B(t)x(t-\theta), \quad t \neq k\theta,\\ \Delta x(t) = Cx(t), \quad t = k\theta,\end{gathered} \tag{1.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n,\ A \in C(\mathbb{R}; L(\mathbb{R}^n)),\ B \in C(\mathbb{R}; L(\mathbb{R}^n))$ — θ-периодические функции, описывающие параметрические возмущения, $\Delta x(t) = x(t+0) - x(t)$, линейный оператор $C \in L(\mathbb{R}^n)$ описывает импульсные возмущения.

Обозначим через $x(t;\varphi_0),\ \varphi_0 \in C[0,\theta]$, решение линейной системы (1.1), удовлетворяющее начальному условию $x(t,\varphi_0) = \varphi_0(t)$ при всех $t \in [0,\theta]$. Как обычно, решение $x(t;\varphi_0)$ считается непрерывным слева $x(t-0;\varphi_0) = x(t;\varphi_0)$.

Рассмотрим задачу об асимптотической устойчивости линейной системы (1.1).

Определение 1.1. *Линейная система (1.1) называется асимптотически устойчивой по Ляпунову, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из неравенства $\|\varphi_0\|_{C[0,\theta]} < \delta$ следует, что $\|x(t;\varphi_0)\| < \varepsilon$ при всех $t \geq \theta$ и*

$$\lim_{t\to\infty} \|x(t;\varphi_0)\| = 0.$$

Целью настоящей работы является исследование асимптотической устойчивости линейной системы (1.1).

2. Основной результат. Наряду с системой (1.1) рассмотрим зависящее от комплексного параметра $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ линейное операторное дифференциальное уравнение

$$\frac{dW_s^t}{dt} = \left(A(t) + \lambda^{-1}B(t)\right) W_s^t, \quad W_s^s = I, \tag{2.1}$$

и линейное операторное уравнение

$$\frac{d\Omega_s^t}{dt} = A(t)\Omega_s^t, \quad \Omega_s^s = I.$$

Следующее утверждение позволяет установить необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости линейной системы (1.1).

Лемма 2.1. *Линейная система (1.1) асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда все корни характеристического уравнения*

$$\det\Big((I + C)W_0^\theta(\lambda) - \lambda E\Big) = 0 \tag{2.2}$$

удовлетворяют неравенству $|\lambda| < 1$.

Доказательство. Сначала проведем переход от задачи Коши для линейной системы (1.1) к эквивалентной ей задаче для функциональной последовательности $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$, $\varphi_k \in$ $\in C\left([0,\theta];\mathbb{R}^n\right)$:

$$\frac{d\varphi_{k+1}(t)}{dt} = A(t)\varphi_{k+1}(t) + B(t)\varphi_k(t), \quad t \in (0,\theta),$$

$$\varphi_{k+1}(0) = (I + C)\varphi_k(\theta).$$

Применяя формулу Коши, получаем

$$\varphi_{k+1}(t) = \Omega_0^t\varphi_{k+1}(0) + \int\limits_0^t \Omega_s^t B(s)\varphi_k(s)\,ds.$$

Вследствие условия $\varphi_{k+1}(0) = (I + C)\varphi_k(\theta)$ имеем

$$\varphi_{k+1}(t) = \Omega_0^t(I + C)\varphi_k(\theta) + \int\limits_0^t \Omega_s^t B(s)\varphi_k(s)\,ds := (T\varphi_k)(t).$$

Известно [12], что условие $r(T) < 1$ является необходимым и достаточным условием асимптотической устойчивости линейной системы (1.1), если спектр оператора T состоит из его собственных значений и, возможно, нуля.

Таким образом, вопрос об устойчивости линейной системы (1.1) сводится к исследованию спектра оператора T. Можно показать, что линейный оператор T переводит ограниченное множество в пространстве $C[0,\theta]$ во множество функций с равномерно ограниченной производной, откуда следует его равностепенная непрерывность. По теореме Асколи – Арцела это множество является предкомпактным в пространстве $C[0,\theta]$.

Таким образом, линейный оператор T переводит ограниченное множество в предкомпактное, т. е. является вполне непрерывным. Известно [13], что их непрерывный и остаточный спектры либо пусты, либо в объединении дают одноточечное множество $\{0\}$.

Следовательно, ненулевые точки спектра оператора T являются его собственными значениями

$$(T - \lambda I)\varphi = 0. \tag{2.3}$$

Уравнение (2.3) эквивалентно интегральному уравнению

$$\Omega_0^t(I + C)\varphi(\theta) + \int_0^t \Omega_s^t B(s)\varphi(s)\,ds - \lambda\varphi(t) = 0. \tag{2.4}$$

Из этого уравнения следует, что $\varphi \in C^1(0, \theta)$, поэтому

$$A(t)\Omega_0^t(I + C)\varphi(\theta) + A(t)\int_0^t \Omega_s^t B(s)\varphi(s)\,ds + B(t)\varphi(t) - \lambda\frac{d\varphi(t)}{dt} = 0.$$

Следовательно, при $\lambda \neq 0$

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = (A(t) + \lambda^{-1}B(t))\varphi(t) \tag{2.5}$$

и $\varphi(t) = W_\theta^t(\lambda)\varphi(\theta)$. Поскольку уравнение (2.5) получено дифференцированием уравнения (2.4), то множество решений уравнения (2.5) шире, чем множество решений уравнения (2.4). Чтобы выделить из множества решений уравнения (2.5) решения уравнения (2.4), подставим решение уравнения (2.5) в (2.4):

$$\left(\Omega_0^t(I + C) + \int_0^t \Omega_s^t B(s)W_\theta^s(\lambda)\,ds - \lambda W_\theta^t(\lambda)\right)\varphi(\theta) = 0.$$

Поскольку оператор Ω_0^t невырожденный, то

$$\left(I + C + \int_0^t \Omega_s^0 B(s)W_\theta^s(\lambda)\,ds - \lambda\Omega_t^0 W_\theta^t(\lambda)\right)\varphi(\theta) = 0.$$

Обозначим

$$R(t) = \int_0^t \Omega_s^0 B(s)W_\theta^s(\lambda)\,ds - \lambda\Omega_t^0 W_\theta^t(\lambda)$$

и, продифференцировав функцию $R(t)$, получим

$$\frac{dR(t)}{dt} = \Omega_t^0 B(t)W_\theta^t(\lambda) - \lambda\,\frac{d\Omega_t^0}{dt}\,W_\theta^t(\lambda) - \lambda\Omega_t^0\frac{dW_\theta^t(\lambda)}{dt}.$$

С учетом того, что

$$\frac{d\Omega_t^0}{dt} = -\Omega_0^t A(t), \qquad \frac{dW_\theta^t(\lambda)}{dt} = \left(A(t) + \lambda^{-1}B(t)\right)W_\theta^t(\lambda),$$

будем иметь

$$\frac{dR(t)}{dt} = \Omega_t^0 B(t) W_\theta^t(\lambda) + \lambda \Omega_0^t A(t) W_\theta^t(\lambda) - \lambda \Omega_t^0 \left(A(t) + \lambda^{-1} B(t)\right) W_\theta^t(\lambda) = 0.$$

Таким образом, $R(t) = R(0) = -\lambda W_\theta^0(\lambda)$, откуда, с учетом невырожденности оператора $W_\theta^0(\lambda)$, находим

$$\Big((I + C) W_0^\theta(\lambda) - \lambda E\Big) \varphi(\theta) = 0. \tag{2.6}$$

Система линейных неоднородных уравнений (2.6) имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда число $\lambda \in \mathbb{C}$ удовлетворяет характеристическому уравнению (2.2). Следовательно, спектр оператора T состоит из корней характеристического уравнения (2.2) и, возможно, нуля.

Лемма 2.1 доказана.

Отметим, что непосредственное применение леммы 3.1 для исследования устойчивости системы (1.1) крайне затруднительно даже в случае, когда операторы $A(t)$ и $B(t)$ не зависят явно от t, поскольку характеристическое уравнение (2.2) является трансцендентным уравнением, проблема локализации корней для которого представляет собой трудную самостоятельную задачу. В общем случае, ситуация осложняется необходимостью вычисления оператора монодромии $W_0^\theta(\lambda)$. Однако утверждение леммы 2.1 позволяет сформулировать более грубое достаточное условие асимптотической устойчивости, которое будет легко проверяемым.

Рассмотрим однопараметрическое семейство линейных систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

$$\begin{gathered} \frac{dy(t)}{dt} = (A(t) + zB(t))y(t), \quad t \neq k\theta, \\ \Delta y(t) = Cy(t), \quad t = k\theta, \end{gathered} \tag{2.7}$$

где $y \in \mathbb{C}^n,\ z \in \mathbb{C},\ |z| < 1$ — комплексный параметр.

Лемма 2.2. *Предположим, что все линейные системы, принадлежащие семейству (2.7), асимптотически устойчивы.*

Тогда линейная периодическая система дифференциальных уравнений с запаздыванием и импульсным воздействием (1.1) асимптотически устойчива.

Доказательство. Предположим, от противного, что уравнение (2.2) имеет корень $\lambda_0 \in \mathbb{C},\ |\lambda_0| \geq 1$. Тогда λ_0 — мультипликатор (собственное значение) оператора монодромии системы (2.7) при $z = \lambda_0^{-1}$, что противоречит асимптотической устойчивости системы (2.7). Полученное противоречие доказывает лемму 3.2.

Лемма 3.2 сводит задачу об устойчивости линейной периодической системы с запаздыванием и импульсным воздействием к исследованию устойчивости семейства линейных импульсных систем (без запаздывания). Последняя задача аналогична задаче о робастной устойчивости, методы решения которой разработаны в [14 – 16].

Теорема 2.1. *Предположим, что линейная периодическая система дифференциальных уравнений с импульсным воздействием и запаздыванием (1.1) удовлетворяет условию*

$$\left\|(I+C)\Omega_0^\theta\right\| \exp\left(\int\limits_0^\theta \|\Omega_\tau^0 B(\tau)\Omega_0^\tau\|\, d\tau\right) < 1. \tag{2.8}$$

Тогда линейная система (1.1) асимптотически устойчива.

Доказательство. Используя формулу Коши, решение $y(t,z),\ y(0,z)=y_0$, линейной системы (2.7) представляем в интегральном виде

$$y(t,z) = \Omega_0^t y_0 + z\int\limits_0^t \Omega_s^t B(s) y(s,z)\, ds, \quad t\in[0,\theta]. \tag{2.9}$$

Отсюда следует

$$\Omega_t^0 y(t,z) = y_0 + z\int\limits_0^t \Omega_s^0 B(s)\Omega_0^s\Omega_s^0 y(s,z)\, ds, \quad t\in[0,\theta].$$

Переходя к оценке по норме, получаем

$$\left\|\Omega_t^0 y(t,z)\right\| \le \|y_0\| + \int\limits_0^t \left\|\Omega_s^0 B(s)\Omega_0^s\right\| \left\|\Omega_s^0 y(s,z)\right\| ds, \quad t\in[0,\theta].$$

Применяя лемму об интегральном неравенстве Гронуолла – Беллмана, имеем

$$\left\|\Omega_t^0 y(t,z)\right\| \le \|y_0\| \exp\left(\int\limits_0^t \|\Omega_s^0 B(s)\Omega_0^s\|\, ds\right), \quad t\in[0,\theta].$$

Далее,

$$y(\theta+,z) = (I+C)y(\theta,z) = (I+C)\Omega_0^\theta y_0 + z(I+C)\int\limits_0^\theta \Omega_s^\theta B(s) y(s)\, ds =$$

$$= (I+C)\Omega_0^\theta\left(y_0 + z\int\limits_0^\theta \Omega_s^0 B(s)\Omega_0^s\Omega_s^0 y(s)\, ds\right).$$

Следовательно,

$$\|y(\theta+,z)\| \le \left\|(I+C)\Omega_0^\theta\right\| \left(\|y_0\| + \int\limits_0^\theta \|\Omega_s^0 B(s)\Omega_0^s\|\|\Omega_s^0 y(s)\|\, ds\right) \le$$

$$\le \left\|(I+C)\Omega_0^\theta\right\| \left(1 + \int\limits_0^\theta \left\|\Omega_s^0 B(s)\Omega_0^s\right\| \exp\left(\int\limits_0^s \left\|\Omega_\tau^0 B(\tau)\Omega_0^\tau\right\|\, d\tau\right) ds\right)\|y_0\| =$$

$$= \left\|(I+C)\Omega_0^\theta\right\| \exp\left(\int_0^\theta \left\|\Omega_\tau^0 B(\tau)\Omega_0^\tau\right\|\, d\tau\right)\|y_0\|.$$

Отсюда следует асимптотическая устойчивость всех систем семейства (2.7) при $|z| \le 1$.

Теорема 2.1 доказана.

Приведем некоторые следствия доказанной теоремы в частных случаях.

1. Скалярное уравнение. Для скалярного уравнения

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x(t) + b(t)x(t-\theta), \quad t \ne k\theta,$$

$$\Delta x(t) = cx(t), \quad t = k\theta$$

достаточные условия асимптотической устойчивости имеют вид

$$\frac{1}{\theta}\int_0^\theta (a(s) + |b(s)|)\, ds + \ln|1+c| < 0.$$

Если $a(s) = a,\ b(s) = b$ — постоянные и $c = 0$, то приходим к известным условиям устойчивости дифференциального уравнения с запаздыванием не зависимо от величины запаздывания $a + |b| < 0$ [6].

2. Оператор $A(t)$ постоянный. Если $A(t) = A_0$, то $\Omega_0^t = e^{A_0 t}$, и условие асимптотической устойчивости системы (1.1) принимает вид

$$\left\|(I+C)e^{A\theta}\right\| \exp\left(\int_0^\theta \left\|e^{-A\tau}B(\tau)e^{A\tau}\right\|\, d\tau\right) < 1.$$

3. Оператор $A(t)$ кососимметричный. Условия асимптотической устойчивости системы (1.1) принимают особенно простой вид в случае, когда оператор $A(t)$ кососимметричный, т. е. $A^T(t) = -A(t)$:

$$\|I+C\| \exp\left(\int_0^\theta \|B(\tau)\|\, d\tau\right) < 1.$$

3. Динамическая устойчивость математического маятника при действии импульсных и параметрических возмущений. Рассмотрим колебания математического маятника, подверженного в фиксированные моменты времени $t = k\theta$ импульсному воздействию с импульсом $\mathbf{p}$ под действием непотенциальных сил $\mathbf{F}$.

Уравнение движения маятника в форме дифференциального уравнения Лагранжа второго рода имеет вид уравнений

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi}\right) - \frac{\partial L}{\partial\varphi} = Q_\varphi, \quad t \ne k\theta,$$

и условий сопряжения (условия Эрдмана – Вейерштрасса), которые выполняются в моменты импульсного воздействия $t = k\theta$:

$$\left.\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi}\right|_{t=k\theta+0} - \left.\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi}\right|_{t=k\theta} = p_\varphi,$$

где $L = \dfrac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} + mgl(1-\cos\varphi)$ — функция Лагранжа, Q_φ — обобщенная непотенциальная сила, соответствующая обобщенной координате φ, p_φ — обобщенный импульс силы, соответствующий обобщенной координате φ и действующий в фиксированные моменты времени $t = k\theta$,

$$Q_\varphi = \mathbf{F}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = l(-F_x \sin\varphi(t) + F_y\cos\varphi(t)), \qquad p_\varphi = \mathbf{p}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = l(-p_x \sin\varphi(t) + p_y\cos\varphi(t)).$$

Следовательно, уравнения движения можно представить в виде системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

$$\ddot{\varphi}(t) + \frac{g}{l}\sin\varphi(t) = \frac{1}{ml}\left(-F_x\sin\varphi(t) + F_y\cos\varphi(t)\right), \quad t \neq k\theta,$$

$$\Delta\varphi(t) = 0, \quad t = k\theta,$$

$$\Delta\dot{\varphi}(t) = \frac{1}{ml}(-p_x\sin\varphi(t) + p_y\cos\varphi(t)), \quad t = k\theta.$$

Предположим, что приложенный импульс постоянен по величине и направлению $p_x = -p$, $p_y = 0$ и, кроме диссипативных сил, на маятник действует управляющая запаздывающая переменная позиционная сила, т. е.

$$F_x = 2\mu l\sin\varphi\dot{\varphi}(t) + b(t)\sin\varphi(t-\theta)\cos\varphi(t),$$

$$F_y = -2\mu l\cos\varphi\dot{\varphi}(t) - b(t)\sin\varphi(t-\theta)\sin\varphi(t),$$

где $b(t)$ — кусочно-непрерывная θ-периодическая функция.

Тогда уравнения движения маятника принимают вид

$$\ddot{\varphi}(t) + \frac{2\mu}{m}\dot{\varphi}(t) + \frac{g}{l}\sin\varphi(t) = \frac{b(t)}{ml}\sin\varphi(t-\theta), \quad t \neq k\theta,$$

$$\Delta\varphi(t) = 0, \quad t = k\theta,$$

$$\Delta\dot{\varphi}(t) = \frac{p}{ml}\sin\varphi(t), \quad t = k\theta.$$

Обозначим $\omega^2 = \dfrac{g}{l}$ и введем безразмерное время $\tau = \omega t$ и безразмерные параметры

$$\overline{\mu} = \frac{\mu}{m\omega}, \qquad \overline{b}(\tau) = \frac{b(\tau/\omega)}{ml\omega^2}, \qquad \overline{p} = \frac{p}{ml\omega}, \qquad \overline{\theta} = \omega\theta.$$

В безразмерных переменных система уравнений движения имеет вид

$$\varphi''(\tau) + 2\overline{\mu}\varphi'(\tau) + \sin\varphi(\tau) = \overline{b}(\tau)\sin\varphi(\tau - \overline{\theta}), \quad \tau \neq k\overline{\theta},$$

$$\Delta\varphi(\tau) = 0, \quad \tau = k\overline{\theta},$$

$$\Delta\varphi'(\tau) = \overline{p}\sin\varphi(\tau), \quad \tau = k\overline{\theta}.$$

Очевидно, что эта система имеет два положения равновесия $\varphi_1^* = 0$ (нижнее) и $\varphi_2^* = \pi$ (верхнее).

Рассмотрим вопрос об устойчивости нижнего положения равновесия. Линеаризованную систему уравнений возмущенного движения в окрестности нижнего положения равновесия можно представить в виде линейной периодической системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

$$\frac{dx(\tau)}{d\tau} = Ax(\tau) + \overline{b}(\tau)Bx(\tau - \overline{\theta}), \quad \tau \neq k\overline{\theta},$$

$$\Delta x(\tau) = \overline{p}Cx(\tau), \quad \tau = k\overline{\theta},$$

где $x \in \mathbb{R}^2$, матрицы $A,\ B$ и C имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2\overline{\mu} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно вычислить

$$e^{A\tau} = e^{-\overline{\mu}\tau} \begin{pmatrix} a_{11}(\tau) & a_{12}(\tau) \\ a_{21}(\tau) & a_{22}(\tau) \end{pmatrix},$$

где

$$a_{11}(\tau) = \cos(\Omega\tau) + \frac{\overline{\mu}}{\Omega}\sin(\Omega\tau), \quad a_{12}(\tau) = -a_{21}(\tau) = \frac{\sin(\Omega\tau)}{\Omega},$$

$$a_{22}(\tau) = \cos(\Omega\tau) - \frac{\overline{\mu}}{\Omega}\sin(\Omega\tau),$$

$\Omega = \sqrt{1-\overline{\mu}^2}$ (здесь предполагается, что $\overline{\mu} \in (0,1)$);

$$\Phi = (I + \overline{p}C)e^{A\overline{\theta}} = e^{-\overline{\mu}\overline{\theta}} \begin{pmatrix} a_{11}(\overline{\theta}) & a_{12}(\overline{\theta}) \\ \overline{p}a_{11}(\overline{\theta}) - a_{12}(\overline{\theta}) & a_{22}(\overline{\theta}) + \overline{p}a_{12}(\overline{\theta}) \end{pmatrix},$$

$$K(\tau) = \overline{b}(\tau)e^{-A\tau}Be^{A\tau} = \overline{b}(\tau) \begin{pmatrix} a_{12}(-\tau)a_{21}(\tau) & a_{12}(-\tau)a_{22}(\tau) \\ a_{22}(-\tau)a_{21}(\tau) & a_{22}(-\tau)a_{22}(\tau) \end{pmatrix}.$$

Несложно показать, что

$$\|K(\tau)\| = |\overline{b}(\tau)|\sqrt{(a_{12}^2(-\tau) + a_{22}^2(-\tau))(a_{21}^2(\tau) + a_{22}^2(\tau))} =$$

$$= |\overline{b}(\tau)| \left(1 + \frac{4\overline{\mu}^2}{\Omega^4}\sin^4(\Omega\tau)\right)^{1/2},$$

$$\|\Phi\| = e^{-\overline{\mu}\overline{\theta}}\sqrt{\frac{s + \sqrt{s^2-4}}{2}},$$

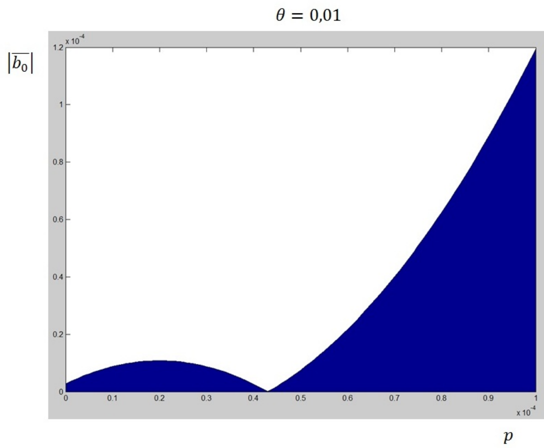

Рис. 1

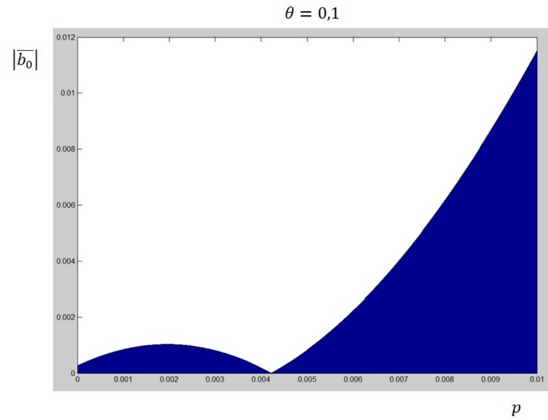

Рис. 2

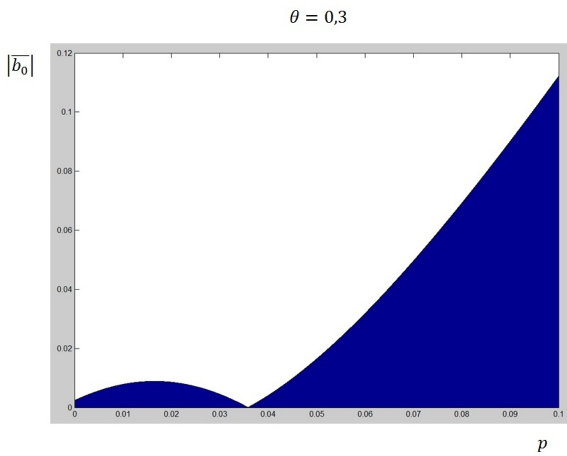

Рис. 3

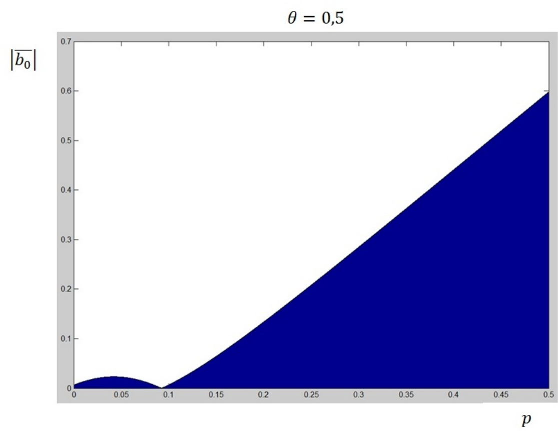

Рис. 4

$$s = a_{11}^2(\overline{\theta}) + a_{12}^2(\overline{\theta}) + (\overline{p}a_{11}(\overline{\theta}) - a_{12}(\overline{\theta}))^2 + (a_{22}(\overline{\theta}) + \overline{p}a_{12}(\overline{\theta}))^2 =$$

$$= 2\left(\cos^2(\Omega\overline{\theta}) + \frac{1+\overline{\mu}^2}{\Omega^2}\sin^2(\Omega\overline{\theta})\right) - \frac{4\overline{\mu}}{\Omega^2}\,\sin^2(\Omega\overline{\theta})\overline{p} +$$

$$+\left(\cos^2(\Omega\overline{\theta}) + \frac{1+\overline{\mu}^2}{\Omega^2}\sin^2(\Omega\overline{\theta}) + \frac{2\overline{\mu}}{\Omega}\,\sin(\Omega\overline{\theta})\cos(\Omega\overline{\theta})\right)\overline{p}^2.$$

Следовательно, достаточные условия асимптотической устойчивости нижнего положения равновесия маятника принимают вид

$$\sqrt{\frac{s+\sqrt{s^2-4}}{2}}\exp\left(\int\limits_0^{\overline{\theta}} |\overline{b}(\tau)|\left(1+\frac{4\overline{\mu}^2}{\Omega^4}\,\sin^4(\Omega\tau)\right)^{1/2} d\tau - \overline{\mu}\overline{\theta}\right) < 1.$$

Приведем численные результаты исследования асимптотической устойчивости нижнего положения маятника.

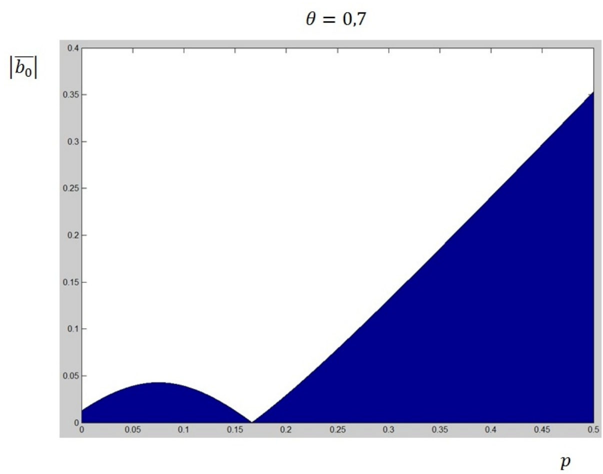

Рис. 5

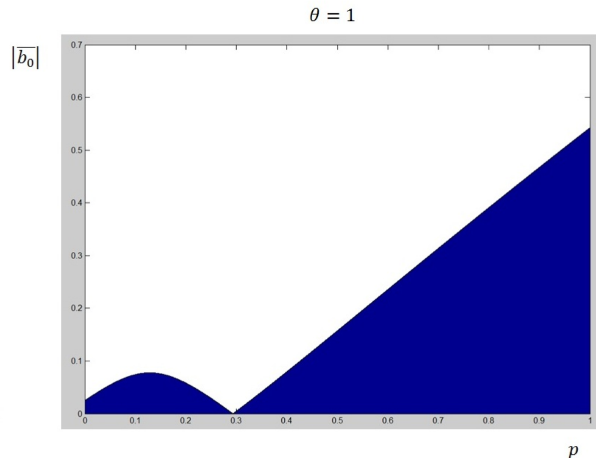

Рис. 6

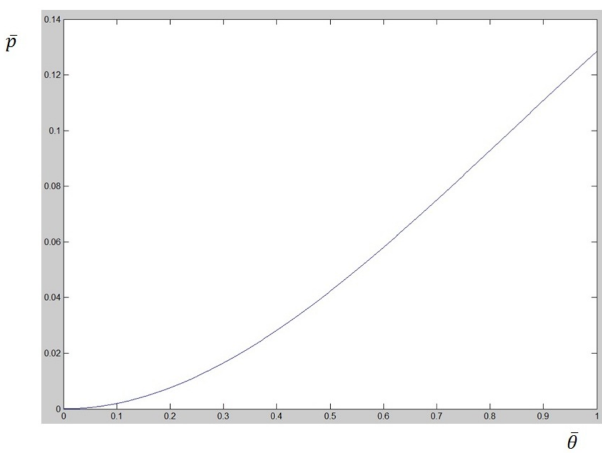

Рис. 7

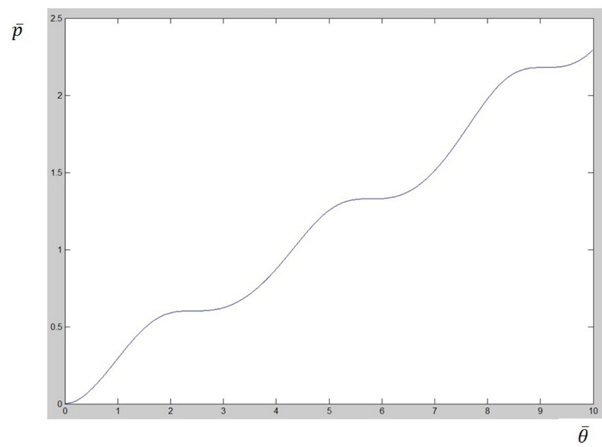

Рис. 8

Пусть $\overline{\mu} = 0{,}1,\ \overline{b}(\tau) = \overline{b}_0 \sin \dfrac{4\pi\tau}{\overline{\theta}}$. На рис. 1 – 6 изображены области асимптотической устойчивости в пространстве параметров $(|\overline{b}_0|, \overline{p})$ при различных значениях $\overline{\theta}$. На рис. 7 приведен график зависимости $\overline{p}_1 = \overline{p}_1(\overline{\theta})$, где $\overline{p}_1$ — абсцисса максимума на графике зависимости $(|\overline{b}_0|, \overline{p})$, а на рис. 8 — график зависимости $\overline{p}_2 = \overline{p}_2(\overline{\theta})$, где $\overline{p}_2$ — абсцисса минимума на графике зависимости $(|\overline{b}_0|, \overline{p})$.

4. Обсуждение результатов. Предложенный подход к исследованию устойчивости весьма прост и эффективен. Он позволяет получить условия асимптотической устойчивости при параметрических возмущениях механических систем с импульсным воздействием. Особенно эффективны эти условия в ряде частных случаев, рассмотренных в п. 2. В общем случае для применения этих условий необходимо вычислить матрицант Ω_s^t. Другая возможность состоит в исследовании асимптотической устойчивости однопараметрического семейства линейных импульсных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В этом случае можно применять прямой метод Ляпунова, а в случае наличия малого параметра в системе — асимптотические методы Крылова – Боголюбова – Митропольского.

Литература

1. *Бордюг Б. А., Ларин В. Б., Тимошенко А. Г.* Задачи управления шагающими аппаратами. – К.: Наук. думка, 1985.
2. *Samoilenko A. M., Perestyuk N. A.* Impulsive differential equations // Singapore: World Sci., 1995.
3. *Dvirnyi A. I., Slyn'ko V. I.* Application of Lyapunov's direct method to the study of the stability of solutions to systems of impulsive differential equations // Math. Notes. – 2014. – **96**, № 1. – P. 26 – 37.
4. *Dvirnyj A. I., Slyn'ko V. I.* Investigating stability using nonlinear quasi-homogeneous approximation to differential equations with impulsive action // Sb. Math. – 2014. – **205**, № 6. – P. 862 – 891.
5. *Ignat'ev A. O., Ignat'ev O. A., Soliman A. A.* Asymptotic stability and instability of the solutions of systems with impulse action // Math. Notes. – 2006. – **80**, № 4. – P. 491 – 499.
6. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1984.
7. *Слынько В. И.* Об условиях устойчивости движения линейных импульсных систем с запаздыванием // Прикл. механика. – 2005. – **41**, № 6. – С. 130 – 139.
8. *Иванов И. Л.* Регулирование энергосистем при импульсных возмущениях // Электрон. моделирование. – 2014. – **36**, № 5. – С. 17 – 26.
9. *Иванов И. Л., Слынько В. И.* Критерий устойчивости автономных линейных систем с запаздыванием и периодическим импульсным воздействием // Прикл. механика. – 2013. – **49**, № 6. – С. 120 – 131.
10. *Ivanov I. L., Slyn'ko V. I.* Stability criterion of linear systems with delay and two-periodic impulse excitation // Autom. Remote Control. – 2012. – **73**, № 9. – P. 1456 – 1468.
11. *Джури Э.* Инноры и устойчивость динамических систем. – М.: Наука, 1979. – 304 с.
12. *Daletskii Yu. L., Krein M. G.* Stability of solutions of differential equations in Banach space. – Amer. Math. Soc., 1974.
13. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория. – New-York; London: Intersci. Publ., 1958.
14. *Liu. B., Liu X., Liao X.* Robust stability of uncertain impulsive dynamical systems // J. Math. Anal. Appl. – 2004. – **290**. – P. 519 – 533.
15. *Slyn'ko V. I., Denisenko V. S.* Robust stability of systems of linear differential equations with periodic impulsive influence // Autom. Remote Control. – 2012. – **73**, № 6. – P. 1005 – 1015.
16. *Denisenko V. S., Slyn'ko V. I.* Interval stability of linear impulsive systems // J. Comput. Syst. Sci. Int. – 2015. – **54**, № 1. – P. 1 – 12.

Получено 23.10.2017,
после доработки — 29.10.2018