УДК 517.9

ВІЗУАЛІЗАЦІЯ НАЙПРОСТІШИХ СЦЕНАРІЇВ ІДЕАЛЬНОЇ ТУРБУЛЕНТНОСТІ

А. А. Акбергенов, О. Ю. Романенко

Ін-т математики НАН України
вул. Терещенківська, 3, Київ, 01004, Україна
e-mail: abdivali.akbergenov@gmail.com,
eromanenko@bigmir.net

We give a brief description and computer visualization of different scenarios for ideal turbulence, which is a species of spatio-temporal chaos in idealized models of mathematical physics.

Наведено короткий опис та комп'ютерну візуалізацію різних сценаріїв ідеальної турбулентності — різновидності просторово-часового хаосу в ідеалізованих моделях математичної фізики.

1. Стисло про ідеальну турбулентність. Назва статті містить термін "турбулентність", який, взагалі кажучи, допускає різні тлумачення. Тут турбулентність розуміємо у найширшому сенсі: як просторово-часовий хаос у детермінованих системах будь-якої природи. Більшість таких систем описується нелінійними диференціальними рівняннями. Коли мова йде про рівняння з частинними похідними, то "точками" фазового простору є функції (просторових змінних), і тоді говорити слід не тільки про часову динаміку станів системи, як у випадку звичайних диференціальних рівнянь, а й про еволюцію з часом внутрішньої, просторової, структури самих станів.

Дослідження в цьому напрямку, що проводилися в Інституті математики НАН України, привели до оформлення *концепції ідеальної турбулентності* — математичного явища, яке характерне для ряду нескінченновимірних динамічних систем на просторах гладких функцій і полягає в тому, що *атрактор системи лежить не в фазовому просторі, а в більш широкому функціональному просторі, що містить фрактальні або навіть випадкові функції* (при цьому атрактор може бути зовсім простим: складатися з циклів і нерухомих точок). Сьогодні поняття "ідеальна турбулентність" починає входити в термінологію теорії хаосу, зокрема, його включено в Енциклопедію нелінійної науки [1], видану в США у 2005 р. Точні аналітичні результати показали, що ідеальна турбулентність спостерігається вже в найпростіших нелінійних крайових задачах для гіперболічних рівнянь, у тому числі для рівнянь переносу та хвильового (див. [2 – 4] та наведені там посилання). З фізичної точки зору такого роду крайові задачі описують ідеалізовані системи без внутрішнього опору — звідси й назва "*ідеальна* турбулентність" — і є спрощеними моделями еволюційних систем, що вивчаються в електродинаміці, акустиці, радіофізиці та навіть у медицині. Перехід до хаотичної динаміки завжди пов'язаний з формуванням каскадів просторових структур, мінімальний масштаб яких в природних системах зумовлюється внутрішнім опором. Ідеальні системи не перешкоджають утворенню структур аж до як завгодно малих масштабів, що, власне, і призводить до формування в границі (при нескінченно великому часі) фрактальних структур або й випадкових структур: коли гранична поведінка детермінованої задачі описується випадковими процесами. Типову поведінку розв'язків крайових

© А. А. Акбергенов, О. Ю. Романенко, 2019

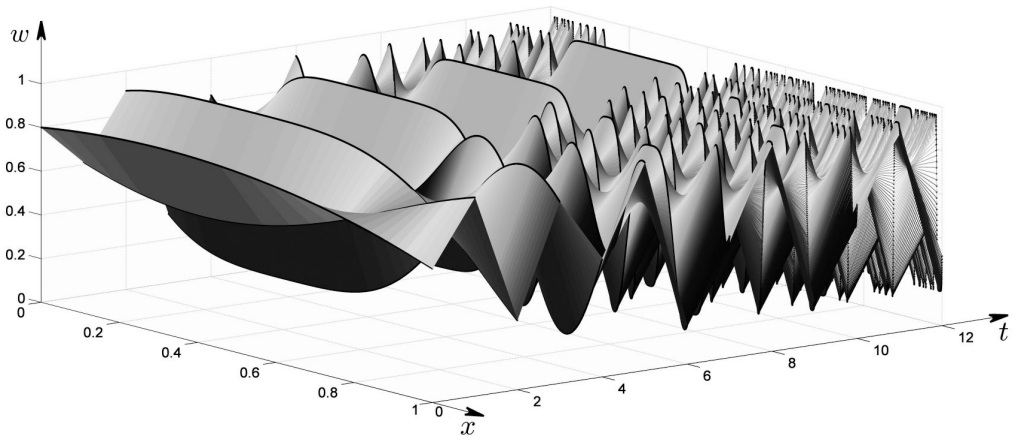


Рис. 1. Каскад градієнтних катастроф. Типовий розв'язок крайової задачі $\partial w/\partial t = \partial w/\partial x,\ w(x,1) = \lambda w(x,0)(1-w(x,0)),\ \lambda > 3{,}58$.

задач із ідеальною турбулентністю продемонстровано на рис. 1. Крайові задачі з ідеальною турбулентністю можуть розглядатися як базові при вивченні хаосу в більш реалістичних системах (звичайно, в певних просторово-часових межах, які визначаються величиною їх внутрішнього опору), зокрема, можуть скласти основу теорії збурень для крайових задач, що описують системи з невеликим внутрішнім опором.

Наведене визначення ідеальної турбулентності має лише попередній характер і потребує конкретизації: що розуміється під атрактором, як визначаються простори фрактальних і випадкових функцій, якими є метрики в цих просторах? Якщо не поглиблюватися в подробиці, то концепція ідеальної турбулентності характеризується таким чином. Просторово-часова еволюція початкових станів крайової задачі — гладких або кусково-гладких функцій — супроводжується наростаючим ускладненням їхньої просторової структури, і внаслідок цього граничний стан уже неможливо описати в термінах гладких або хоча б неперервних функцій. Тому для побудови атрактора задачі необхідно перейти до ширшого функціонального простору. Вельми придатними виявилися простір фрактальних функцій і простір випадкових функцій, кожний зі спеціальною метрикою (яка допускає вкладення вихідного фазового простору). Тут слід уточнити, що під фрактальними розуміються напівнеперервні зверху функції з нескінченним числом розривів (їхні графіки являють собою замкнені підмножини евклідового простору, які в багатьох випадках є локально самоподібними й фрактальними). Встановлено, що певні крайові задачі мають атрактор в одному з цих розширених просторів, або навіть в обох, і відповідно, "точки" такого атрактора є фрактальними або випадковими функціями. Це й призводить до каскадного ускладнення розв'язків зі зростанням часу та формування у них низки властивостей, типових для турбулентності.

Мета даної статті — наочно, за допомогою комп'ютерної графіки, на простому прикладі й обмежуючись мінімумом теоретичних міркувань продемонструвати описану вище схему розвитку ідеальної турбулентності та пояснити використані при цьому математичні механізми хаотизації.

2. Теоретичні відомості. В концепції ідеальної турбулентності особливе місце посідають нелінійні крайові задачі, просторово-часова динаміка яких керується одновимірним відображенням (див, зокрема, [5]). Розглянемо найпростішу таку задачу:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad x \in [0,1], \quad t \in \mathbb{R}^+, \tag{1}$$

$$w|_{x=1} = f(w)|_{x=0}, \quad f \in C^1(I,I), \quad I \text{ — замкнений інтервал.} \tag{2}$$

Загальний розв'язок рівняння (1) визначається формулою

$$w(x,t) = u(x+t), \quad u \text{ — довільна } C^1\text{-функція.} \tag{3}$$

Підставляючи (3) в (2), одержуємо для u різницеве рівняння (з неперервним аргументом)

$$u(\tau+1) = f(u(\tau)), \quad \tau \in \mathbb{R}^+. \tag{4}$$

Окрім того, з (3) виводимо, що будь-яка початкова умова

$$w(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0,1], \quad \text{з} \quad C^1\text{-функцією} \quad \varphi\colon [0,1] \to I \tag{5}$$

індукує для різницевого рівняння (4) початкову умову

$$u(\tau) = \varphi(\tau), \quad \tau \in [0,1). \tag{6}$$

Таким чином, для розв'язку $w_\varphi(x,t)$, що відповідає умові (5), отримуємо формулу

$$w_\varphi(x,t) = u_\varphi(x+t), \tag{7}$$

де u_φ — розв'язок рівняння (4), що відповідає умові (6). C^1-гладким розв'язок $w_\varphi(x,t)$ буде лише тоді, коли виконуються *умови гладкого узгодження*

$$\varphi(1) = f(\varphi(0)), \qquad \varphi'(1) = f'(\varphi(0))\varphi'(0). \tag{8}$$

Перше із співвідношень (8) забезпечує лише неперервність розв'язку, його виконання зазвичай передбачається при постановці задачі. Недотримання ж другого із співвідношень (8) часто допускається. При цьому відбувається порушення гладкості розв'язку на характеристиках $x+t=n,\ n=0,1,2,\ldots$.

Те, якою буде поведінка розв'язків задачі (1), (2) при великих значеннях t, визначається атрактором динамічної системи зсувів $S^t\colon \varphi(x) \mapsto w_\varphi(x,t)$, яку задача індукує на просторі початкових гладких функцій $\varphi\colon [0,1] \to I$. Згідно з (4) маємо

$$u_\varphi(\tau) = f^n(\varphi(\tau-n)), \quad n \le \tau < n+1, \quad n = 0,1,2,\ldots, \tag{9}$$

де f^n — n-та ітерація функції f (тобто $f^n(z) = f\left(f^{n-1}(z)\right),\ f^0(z) = z$). Тому S^t можна записати у вигляді

$$S^t\colon \varphi(x) \mapsto f^{[x+t]}(\varphi(\{x+t\})), \tag{10}$$

де $[\cdot]$ і $\{\cdot\}$ — ціла та дробова частини числа, зокрема, $S^n\colon \varphi(x) \mapsto f^n(\varphi(x)),\ n=0,1,2,\ldots$.

Таким чином, для задачі (1), (2) будова атрактора визначається насамкінець асимптотичною динамікою одновимірного відображення f, і це істотно спрощує дослідження. Зазначимо, що розглядувана задача не є винятковою, існує багато інших класів одно- та багатовимірних крайових задач, які також зводяться до різницевих рівнянь із неперервним аргументом (див, наприклад, [3]).

Нехай у крайовій задачі (1), (2) має місце ідеальна турбулентність. На питанні, чому і як це відбувається, зупинимося дещо пізніше, а зараз будемо міркувати чисто формально (і з певною часткою вільності). Введемо такі позначення:

C^1 — фазовий простір динамічної системи (10), що складається з C^1-гладких функцій $\varphi\colon [0,1] \to I,\ S^t[\varphi]$ — траєкторія цієї системи, породжувана початковим станом $\varphi \in C^1$;

C^Δ, $C^\#$ — розширені простори, одержані поповненням простору C^1 фрактальними та, відповідно, випадковими функціями (в яких саме метриках, зараз не важливо);

$\mathcal{A}^\Delta$, $\mathcal{A}^\#$ — атрактори динамічної системи (10) у просторах C^Δ та $C^\#$ (точні визначення, що розуміються під атракторами, також залишаємо поза увагою, зазначимо тільки, що $\mathcal{A}^\Delta$ існує завжди, а існування $\mathcal{A}^\#$ залежить від f);

$\omega^\Delta[\varphi]$, $\omega^\#[\varphi]$ — ω-граничні множини траєкторії $S^t[\varphi]$ в просторах C^Δ і $C^\#$.

Згідно з визначенням наявність ідеальної турбулентності означає, що атрактор динамічної системи (10) не міститься повністю (або навіть не існує) у фазовому просторі C^1, але система має атрактор у ширшому функціональному просторі C^Δ та, можливо, і в просторі $C^\#$. Наявність турбулентної динаміки в окремої траєкторії $S^t[\varphi]$, а отже, і у розв'язку $w_\varphi(x,t)$, можемо формалізувати таким чином:

$$\omega^\Delta[\varphi] \cap \left(C^\Delta \setminus C^1\right) \neq \varnothing, \qquad \omega^\#[\varphi] \cap \left(C^\# \setminus C^1\right) \neq \varnothing. \tag{11}$$

Ці співвідношення говорять про ускладнення в багато разів геометрії розв'язку $w_\varphi(x,t)$ при зростанні часу (наприклад, як на рис. 1) і продукують такі сценарії ідеальної турбулентності. З першого співвідношення випливає, що

$(*)$ $\omega^\Delta[\varphi]$ *містить фрактальну функцію; при цьому її графік має фрактальну розмірність* $r \geq 1$, *а саме, гіпотетично здійснимі такі якісно відмінні ситуації:* $r = 1,\ 1 < r < 2,\ r = 2$.

Також слід виокремити сценарій, що описується другим співвідношенням, коли задача допускає існування атрактора $\mathcal{A}^\#$ і

$(**)$ $\omega^\#[\varphi]$ *містить випадкову функцію.*

Якщо для деякого $\varphi \in C^1$ має місце хоча б одне із співвідношень (11), то скажемо, що *початковий стан генерує ідеальну турбулентність*. Говорити про *ідеальну турбулентність у крайовій задачі в цілому* доцільно тільки тоді, коли таких початкових станів багато (в тому чи іншому сенсі). Реалізація цієї вимоги забезпечується тим, щоб саме атрактори $\mathcal{A}^\Delta$ та $\mathcal{A}^\#$ (а не просто ω-граничні множини окремих траєкторій) містили фрактальні або, відповідно, випадкові функції[1]. Тобто, повинні виконуватися співвідношення $\mathcal{A}^\Delta \cap \left(C^\Delta \setminus C^1\right) \neq \varnothing$, $\mathcal{A}^\# \cap \left(C^\# \setminus C^1\right) \neq \varnothing$.

Основним фактором ідеальної турбулентності є складна топологічна структура множини, утвореної нестійкими точками відображення f. Ця множина зазвичай позначається $\mathcal{D}(f)$ і носить назву *роздільника* відображення[2]. В околі точок з $\mathcal{D}(f)$ має місце розбігання близьких траєкторій: для $z \in \mathcal{D}(f)$ існує $d(z) > 0$ таке, що при будь-якому $\varepsilon > 0$ знайдуться $z_* \in (z-\varepsilon, z+\varepsilon)$ і $m > 0$ з властивістю $|f^m(z) - f^m(z_*)| > d(z)$. Коли $\mathcal{D}(f)$ містить підмножину позитивної міри, на якій $\inf_z d(z) > 0$, тоді відображення f

[1] Адже кожен елемент атрактора притягує "визначальну більшість" траєкторій, а те, що реально стоїть за "визначальною більшістю" залежить від конкретної задачі. В нашому випадку цей термін природно розуміти як множину другої категорії Бера, а коли йдеться про випадкові функції, потрібно ще додатково залучати поняття несингулярних функцій.

[2] Така назва пояснюється тим, що в більшості випадків точки з $\mathcal{D}(f)$ розділяють басейни притягувальних циклів відображення f.

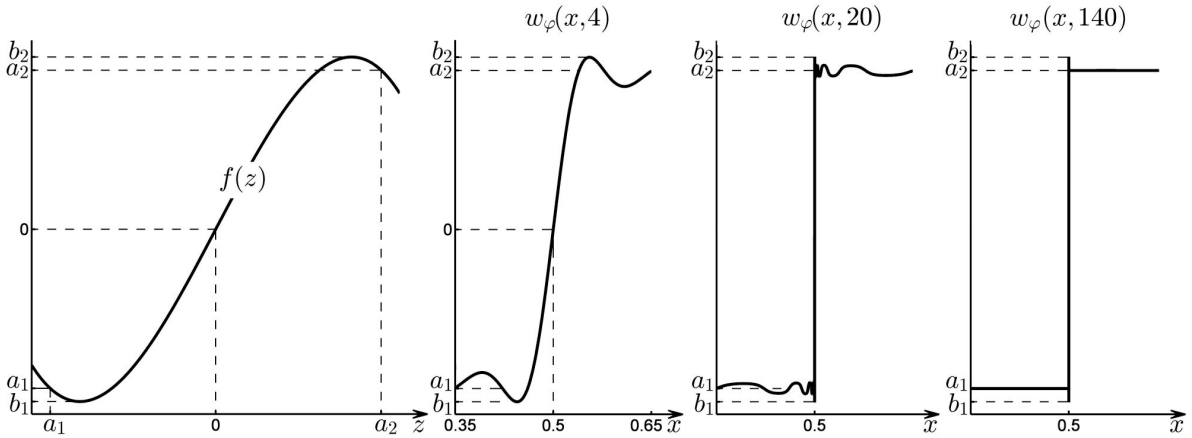


Рис. 2. Градієнтна катастрофа і явище Гібса. $f(z) = -z^3 + 1{,}98z$, $\varphi(x) = 2x - 1$, $x \in [0, 0{,}75]$ і $\varphi(x) = -1{,}92x + 1{,}94$, $x \in (0{,}75, 1]$.

є *чутливо залежним від початкових даних*: як завгодно малі збурення початкових станів призводять до значних і непередбачуваних відхилень кінцевих станів.

Яким чином це відбивається на розв'язках крайової задачі (1), (2), стає зрозумілим із формули $w_\varphi(x,t) = f^{[x+t]}(\varphi(\{x+t\}))$. Нехай для спрощення викладок $z_0 \in \mathcal{D}(f)$ — нерухома точка. Якщо $\varphi(x_0) = z_0$ і $\dot\varphi(x_0) \neq 0$, то, хоч би яким малим був окіл V_n точки (x,t), на характеристиці $x + t = x_0 + n$ маємо $\operatorname{diam} w_\varphi(V_n) > d(z_0)$, починаючи з деякого n. Це означає, що з розв'язком $w_\varphi(x,t)$ відбувається *градієнтна катастрофа*: коливання розв'язку в околі точок, що лежать на характеристиці $x + t = x_0 + n$, стає із зростанням n майже рівним $d(z_0)$, а його графік — все ближчим до вертикального відрізка довжини $\approx d(z_0)$. Аналогічна ситуація має місце для кожної сім'ї характеристик $x + t = \widetilde{x} + n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, якщо тільки $\widetilde{x}$ належить множині

$$\mathcal{D}(f, \varphi) = \varphi^{-1}(\mathcal{D}(f)). \tag{12}$$

Саме тому функції з $\omega^{\Delta}[\varphi]$, що характеризують поведінку розв'язку $w_\varphi(x,t)$ при великих t, "втрачають" неперервність і є багатозначними на $\mathcal{D}(f,\varphi)$. Наближення розв'язків до відповідних розривних багатозначних функцій часто супроводжується в околі точок розриву "викидами", які зі зростанням часу стабілізуються. Амплітуда усталених "викидів" визначається відображенням f і не залежить від початкового стану φ. Звичайно, тоді відповідні граничні функції також мають "викиди" в точках розриву (багатозначності). Такий тип наближення неперервних функцій до розривних носить назву *явища Гібса* і у випадку задачі (1), (2) обумовлений від'ємністю мультиплікатора притягувального циклу відображення f. Сказане ілюструє рис. 2, на якому зображено найпростішу ситуацію, коли початковий стан лінійний (кусково) і відображення $f(z)$ має лише нерухомі точки, а саме, притягувальні точки $z = a_1$ і $z = a_2$ (з мультиплікаторами, меншими від нуля) та відштовхувальну точку $z = 0$. Як бачимо, в процесі еволюції навіть лінійний початковий стан досить швидко стає майже розривним. Хоча взятий початковий стан не задовольняє другу з умов гладкого узгодження, він демонструє динаміку, типову для будь-якого початкового стану $\varphi(x)$ (незалежно від виконання умов узгодження), аби тільки інтервал $\varphi([0,1])$ накривав точку $z = 0$.

Акуратний виклад описаних вище математичних конструкцій можна знайти в [6, 7].

3. Приклад і комп'ютерна графіка. Продемонструємо розглянуті вище сценарії ідеальної турбулентності на прикладі крайової задачі (1), (2). Щоб остаточно її спростити, візьмемо за f в крайових умовах найпростішу нелінійну необоротну функцію — квадратичну, а саме, вельми популярну логістичну параболу:

$$f_\lambda\colon z \mapsto \lambda z(1-z), \quad z \in \mathbb{R}, \quad \lambda > 0 \text{ — параметр.} \tag{13}$$

Динамічні властивості відображення (13) добре вивчені і широко відомі (див., зокрема, [8]), так що будемо використовувати їх без пояснень.

Відображення f_λ має нерухомі точки $z = 0$ та $z = 1 - 1/\lambda$, які збігаються при $\lambda = 1$. Відповідно, крайова задача має не більше двох сталих розв'язків: $w(x,t) = 0$ та $w(x,t) = 1 - 1/\lambda$. При $\lambda > 4$ у відображення f_λ немає обмежених інваріантних інтервалів, а при $0 < \lambda \leq 4$ є один максимальний (за включенням) інваріантний інтервал $[0,1]$. Тому відмінні від сталих обмежені розв'язки існують тільки за умови, що $\lambda \in (0,4]$, причому такі розв'язки породжуються тільки тими початковими станами $\varphi \in C^1$, для яких $\varphi([0,1]) \subseteq [0,1]$. Надалі будемо вважати ці умови виконаними в дещо посиленому варіанті:

$$\lambda \in (0,4] \quad \text{і} \quad \varphi([0,1]) \subseteq (0,1), \quad \varphi(x) \not\equiv \mathrm{const} \quad \text{на будь-якому інтервалі} \tag{14}$$

(додаткові обмеження на φ дозволяють уникнути певних негрубих ситуацій). Проаналізуємо, якою буде поведінка розв'язків $w_\varphi(x,t)$ залежно від λ. Ми зможемо судити про наявність турбулентності не тільки в індивідуальних розв'язках, але й у крайовій задачі в цілому, оскільки умовам (14) відповідають майже всі $\varphi\colon [0,1] \to [0,1]$.

Властивості розв'язку $w_\varphi(x,t)$ при великих значеннях часу можна охарактеризувати за допомогою ω-граничної множини $\omega^\Delta[\varphi] \subset C^\Delta$; тут не зайво уточнити, що за метрику в просторі C^Δ взято відстань Хаусдорфа між графіками. В типових ситуаціях $\omega^\Delta[\varphi]$ складається з функцій $\xi_t(x),\ t \in \mathbb{R}^+$ (певні з яких співпадають), що мають такі властивості. Кожна функція $\xi_t(x)$ переводить $[0,1]$ в себе і є розривною (багатозначною) при тих x, для яких $\{x+t\} \in \mathcal{D}(f_\lambda, \varphi) := \varphi^{-1}(\mathcal{D}(f_\lambda))$, де $\{\cdot\}$ — дробова частина числа і $\mathcal{D}(f_\lambda)$ — роздільник відображення (13).

Таким чином, функція $\xi_0(x)$ розривна на множині $\mathcal{D}(f_\lambda, \varphi)$, а інші функції $\xi_t(x)$ розривні на відповідному "зсуві" множини $\mathcal{D}(f_\lambda, \varphi)$, а саме, на множині точок $x = \{\widetilde{x} - t\}$, $\widetilde{x} \in \mathcal{D}(f_\lambda, \varphi)$. Щоб з'ясувати, коли в задачі має місце турбулентність, потрібно розібратися з тополого-геометричними властивостями функцій $\xi \in \omega^\Delta[\varphi]$ при різних значеннях λ. Для відображення (13) і взагалі для квадратичних відображень ця задача значно спрощується з огляду на властивості "успадкування потужності" та "успадкування розмірності": коли $\mathcal{D}(f)$ має нескінченне число граничних точок, тоді

$$\mathrm{card}\mathcal{D}(f,\varphi) = \mathrm{card}\mathcal{D}(f), \tag{15}$$

$$\dim_{\mathrm{frac}} \mathcal{D}(f,\varphi) = \dim_{\mathrm{frac}} \mathcal{D}(f), \qquad \dim_{\mathrm{frac}}\ \mathrm{gr}\,\xi = \dim_{\mathrm{frac}} \mathcal{D}(f,\varphi) + 1, \tag{16}$$

$\dim_{\mathrm{frac}}$ — фрактальна розмірність, $\quad \mathrm{gr}\,\xi$ — графік функції $\quad \xi \in \omega^\Delta[\varphi]$.

Ці властивості мають місце для будь-якої функції $\varphi \in C^1$, що задовольняє умови (14) (див., зокрема, [7]), і саме такі функції ми розглядаємо.

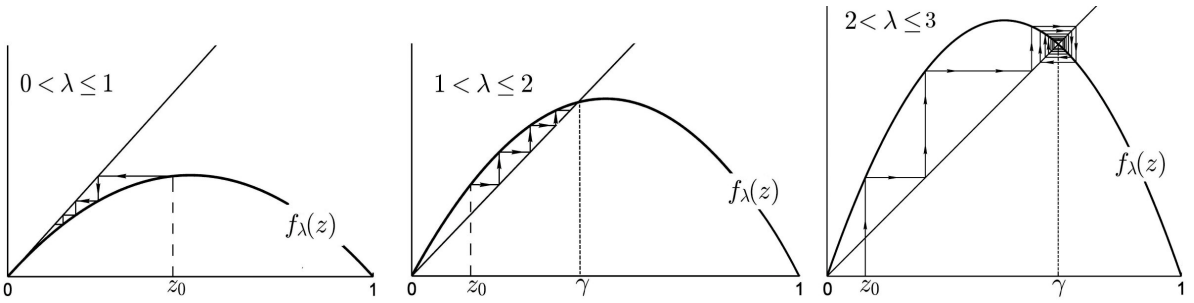


Рис. 3. Сходи Ламерея (ітераційна діаграма) при $0 < \lambda \le 3$.

Як бачимо, у даному контексті ключова роль належить роздільнику $\mathcal{D}(f_\lambda)$. Варто нагадати, що його структура визначається циклами відображення f_λ. Біфуркації циклів при зростанні λ відбуваються згідно з *упорядкуванням Шарковського*

$$\underbrace{1 \prec 2 \prec 2^2 \prec 2^3 \prec \cdots}_{\text{фактор-блок}} \prec \ldots$$

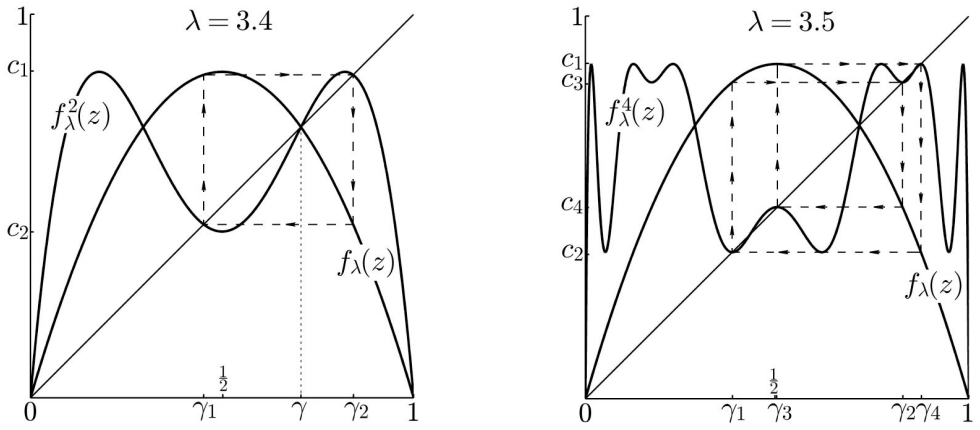
$$\ldots \prec \underbrace{\cdots \prec 7\cdot 2^2 \prec 5\cdot 2^2 \prec 3\cdot 2^2}_{\text{базис-блок}\times 2^2} \prec \underbrace{\ldots 7\cdot 2 \prec 5\cdot 2 \prec 3\cdot 2}_{\text{базис-блок}\times 2} \prec \underbrace{\cdots \prec 7 \prec 5 \prec 3}_{\text{базис-блок}} \qquad (17)$$

(через $\prec$ позначено відношення змушення для циклів неперервних відображень: наявність циклу з періодом p спричиняє наявність циклу з будь-яким періодом $p' \prec p$). При цьому f_λ, як і всі квадратичні відображення, або має один притягувальний цикл, або взагалі не має притягувальних циклів.

Виходячи зі структури $\mathcal{D}(f_\lambda)$ при різних значеннях λ, ми виокремимо типові для крайових задач сценарії ідеальної турбулентності і за допомогою комп'ютерної графіки проілюструємо їхній перебіг на прикладі розв'язку, що відповідає початковому стану $\varphi(x) = ax^2 + bx + c$, де числові значення коефіцієнтів обрані залежно від значення параметра λ таким чином, щоб виконувалися умови гладкого узгодження (і, отже, розв'язок $w_\varphi(x,t)$ був C^1-гладким). Задля уникнення плутанини між областями, в яких змінюються x — просторова змінна крайової задачі, і z — незалежна змінна в (13), будемо у другому випадку позначати інтервал $[0,1]$ через I.

1. Труднощі можуть з'явитися тільки при $\lambda > 3$, оскільки в протилежному випадку динаміка відображення f_λ подібна до лінійної: f_λ має одну притягувальну нерухому точку $z = \gamma$, де $\gamma = 0$ при $0 < \lambda \le 1$ і $\gamma = 1 - 1/\lambda$ при $1 < \lambda \le 3$; у першому випадку ця точка притягує весь інтервал I, а в другому — внутрішність інтервалу I (рис. 3). Тому роздільник $\mathcal{D}(f_\lambda)$ або порожній, або складається з двох точок: відштовхувальної нерухомої точки $z = 0$ та її прообразу $z = 1$, і отже, в будь-якому випадку множини $\mathcal{D}(f_\lambda, \varphi)$ будуть порожніми і, відповідно, розв'язки $w_\varphi(x,t)$ будуть зі зростанням t рівномірно прямувати до стаціонарного розв'язку $w(x,t) = \gamma$. В термінах ω-граничних множин це означає, що всі множини $\omega^\Delta[\varphi]$ збігаються між собою і складаються з однієї функції $\xi_\circ(x) = \gamma$. Отже, атрактор задачі є теж зовсім простим — це точка $\xi_\circ$. При $0 < \lambda \le 3$ маємо той винятковий випадок, коли атрактор крайової задачі лежить в її рідному фазовому просторі і про ідеальну турбулентність говорити не доводиться.

2. При переході параметра λ через значення, що дорівнює 3, відбувається біфуркація подвоєння періоду: нерухома точка $z = \gamma$ стає відштовхувальною і від неї народжується



а) *б)*

Рис. 4. $\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m\}$ — притягувальний цикл; $c_n = f_\lambda^n(1/2),\ m, n = 0, 1, \ldots$.

притягувальний цикл періоду 2. Цей цикл залишається притягувальним доти, доки $\lambda \le 1 + \sqrt{6}$, і притягує всі точки з I окрім точок роздільника $\mathcal{D}(f_\lambda)$, який порівняно з попереднім випадком "збільшується" на прообрази точки $z = \gamma$, тобто $\mathcal{D}(f_\lambda) = \bigcup_{n\ge 0} f_\lambda^{-n}(\gamma) \cup \{0\} \cup \{1\}$. Тепер $\mathcal{D}(f_\lambda)$ являє собою зліченну замкнену множину з двома граничними точками $z = 0$ та $z = 1$. Тому множини $\mathcal{D}(f_\lambda, \varphi)$ будуть непорожніми і скінченними, внаслідок чого множини $\omega^\Delta[\varphi]$ складатимуться з (напівнеперервних зверху) функцій зі скінченним числом розривів. Звідси висновок: *при* $3 < \lambda \le 1 + \sqrt{6}$ *атрактор крайової задачі знаходиться поза фазовим простором, але ідеальної турбулентності в задачі немає.* Візьмемо, наприклад, $\lambda = 3{,}4$. Вигляд f_λ в цьому випадку подано на рис. 4а. Відповідний перебіг еволюції розв'язків $w_\varphi(x, t)$ продемонстровано на рис. 5, де для конкретного початкового стану $\varphi(x)$ зображено одну з функцій, що входять в ω-граничну множину $\omega^\Delta[\varphi]$. Ситуація тут така: для будь-якого $t_\circ$ послідовність $w_\varphi(x, t_\circ + 2k)$ прямує при $k \to \infty$ до напівнеперервної зверху функції $\xi_{t_\circ}(x)$, яка має розрив у точці $x_* \approx 0{,}5626625$, що визнається умовою $\varphi(\{x_* - t_\circ\}) = \gamma$; до того ж спостерігається явище Гібса. Зазначимо, що явище Гібса має місце при кожному λ з інтервалу $\left(1 + \sqrt{5}, 1 + \sqrt{6}\right]$ і відсутнє, коли $3 < \lambda \le 1 + \sqrt{5}$ (притягувальний цикл відображення f_λ в першому випадку має від'ємний мультиплікатор, а в другому — додатний).

3. З подальшим зростанням λ відбувається послідовне подвоєння періодів притягувальних циклів, яке триває аж до $\lambda^* = \lim_{i\to\infty} \lambda_i \approx 3{,}57$, де λ_i — біфуркаційне значення, при якому з циклу періоду 2^{i-1} виникає цикл періоду 2^i (зокрема, $\lambda_0 = 1,\ \lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 1 + \sqrt{6}$). Якщо $1 + \sqrt{6} < \lambda < \lambda^*$, то f_λ має цикли тільки з періодами $1, 2, 2^2, \ldots, 2^m$, де $m = m(\lambda) \ge 2$ і $m(\lambda) \to \infty$ при $\lambda \to \lambda^*$. Цикл періоду 2^m — єдиний притягувальний цикл, інші цикли — відштовхувальні. Роздільник $\mathcal{D}(f_\lambda)$ знову складається з прообразів відштовхувальних циклів і, отже, є зліченною замкненою множиною, але тепер зі значно більшою кількістю граничних точок, якими є прообрази циклів з періодами $< 2^{m-1}$. Таким чином, починаючи з $\lambda = 1 + \sqrt{6}$, "працює " співвідношення (15), з якого випливає, що всі множини $\mathcal{D}(f_\lambda, \varphi)$ також будуть зліченними і, відповідно, множини $\omega^\Delta[\varphi]$ складатимуться з функцій зі зліченним числом розривів. Типовий приклад маємо при $\lambda = 3{,}5$, коли період притягувального циклу дорівнює 4 (рис. 4б). Співвідносна динаміка розв'язку $w_\varphi(x, t)$ подана на рис. 6. Цей випадок аналогічний до попереднього. Для будь-якого $t_\circ$

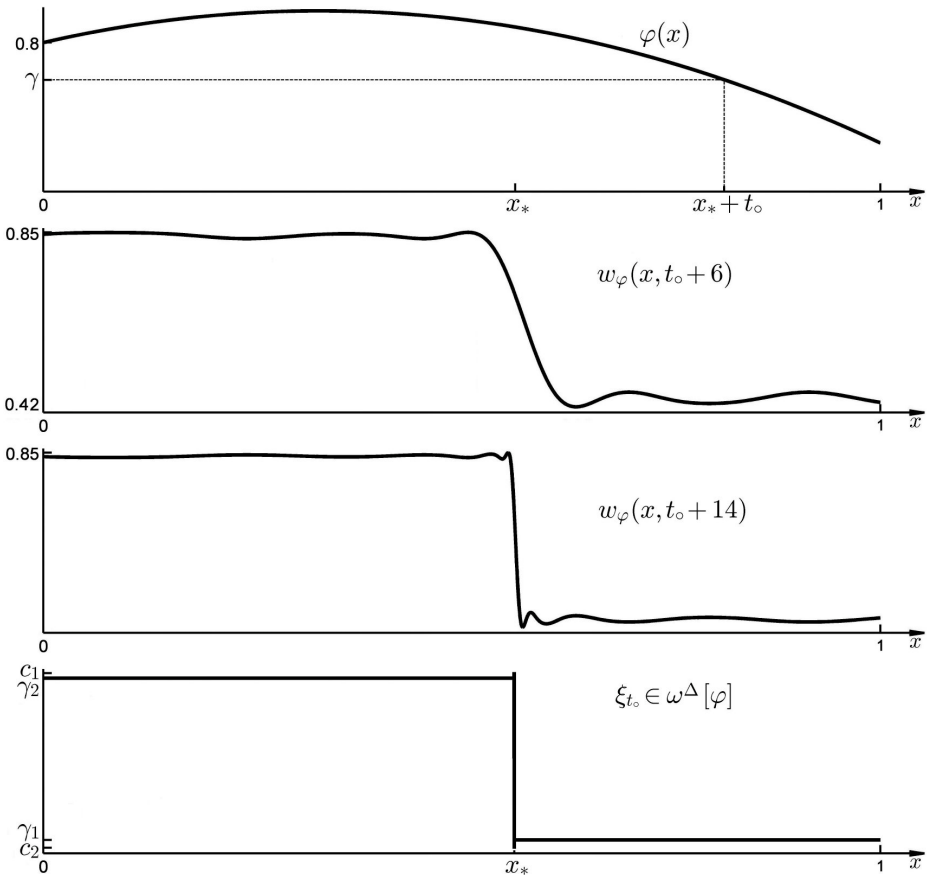


Рис. 5. Асимптотична динаміка розв'язків при $\lambda = 3,4$. Послідовність $w_\varphi(x, t_\circ + 2k)$ збігається при $k \to \infty$ до напівнеперервної зверху функції $\xi_{t_\circ}(x)$ зі скінченним числом розривів. При цьому має місце явище Гібса $\big(\varphi(x) = ax^2 + bx + c,\ a = -0{,}7483,\ b = 0{,}4923,\ c = 0{,}8;\ t_\circ = 0{,}25;\ x_* = 0{,}5626625\big)$.

послідовність $w_\varphi(x, t_\circ + 4k)$ прямує при $k \to \infty$ до певної напівнеперервної зверху функції $\xi_{t_\circ}(x)$, але з тією відмінністю, що тепер $\xi_{t_\circ}(x)$ має зліченне число розривів, проте набір амплітуд розривів залишається скінченним. Розриви відбуваються при тих x, для яких $\varphi(\{x + t_\circ\})$ є прообразом циклу періоду 2, і скупчуються біля точки $x_* \approx 0{,}5529829$, для якої $\varphi(\{x + t_\circ\}) = \gamma$. Саме функції $\xi_t(x)$, $t \in [0, 4)$, і утворюють ω-граничну множину $\omega^\Delta[\varphi]$. Явище Гібса також відбувається, але на малюнку його можна відтворити тільки при достатньому збільшенні масштабування.

При $\lambda = \lambda^*$ всі цикли відображення f_λ відштовхувальні, а їхні періоди пробігають всі ступені двійки $1, 2, 2^2, 2^3, \ldots$. Роздільник $\mathcal{D}(f_\lambda)$, який знову складається з прообразів відштовхувальних циклів, є зліченною, але вже незамкненою множиною, а всі точки з $I \setminus \mathcal{D}(f_\lambda)$ притягуються до канторової множини, утвореної граничними точками роздільника. В цьому випадку при фіксованих t збіжними виявляються послідовності $w_\varphi\left(x, t + 2^k\right)$, $k = 0, 1, \ldots$. Відповідні граничні функції $\xi_t(x)$ складають ω-граничну множину $\omega^\Delta[\varphi]$ і мають зліченне число розривів, проте тепер вони влаштовані складніше: по-перше, для кожної функції $\xi_{t_\circ}(x)$ точки скупчення розривів — це ті x, для яких $\varphi(\{x + t_\circ\})$ є прообразом щойно згаданої канторової множини, і, по-друге, набір амплітуд розривів є нескінченним, а самі амплітуди спадають до нуля (зі швидкістю, що визначається константою Фейгенбаума $\alpha \approx 2{,}5029$). Ілюстрацію наведено на рис. 7.

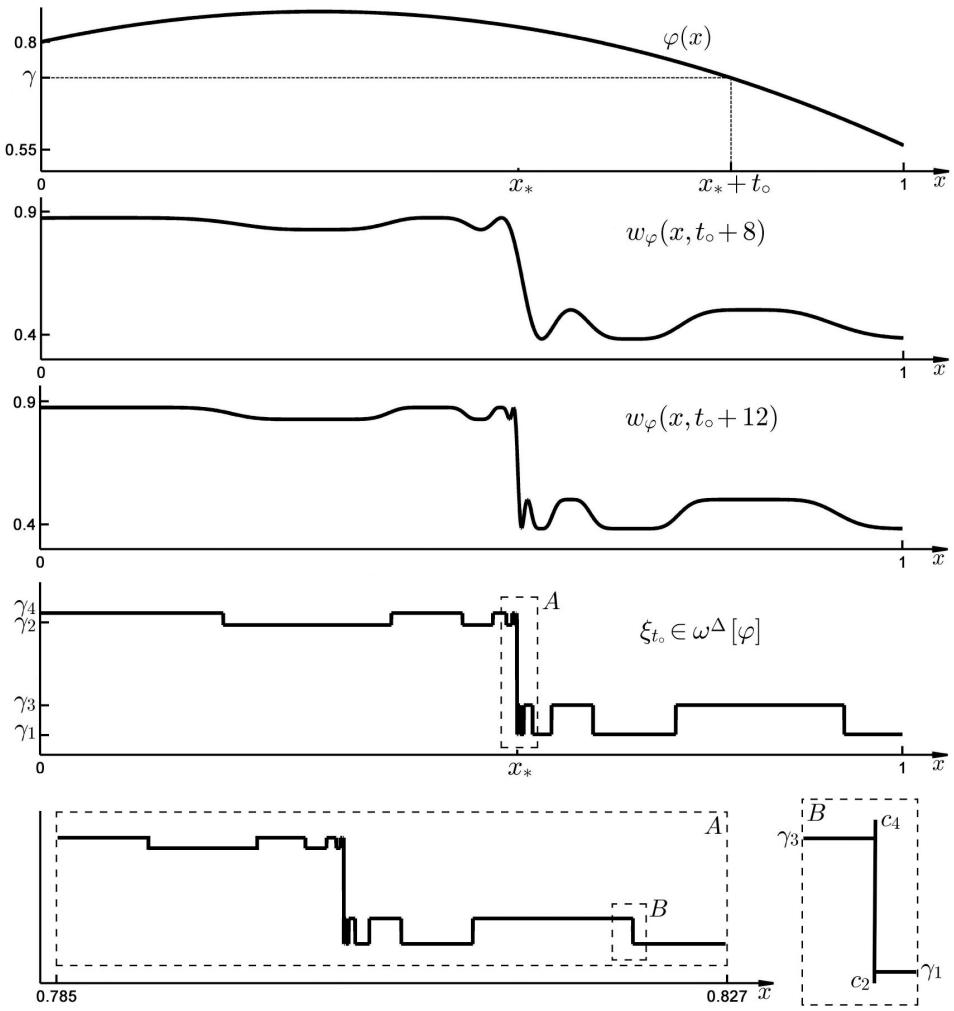


Рис. 6. Слабка турбулентність при $\lambda = 3{,}5$. Послідовність $w_\varphi(x, t_\circ + 4k)$ збігається при $k \to \infty$ до напівнеперервної зверху функції $\xi_{t_\circ}(x)$ зі зліченним числом розривів, при цьому має місце явище Гібса $\big(\varphi(x) = ax^2 + bx + c,\ a = -0{,}6764,\ b = 0{,}4364,\ c = 0{,}8;\ t_\circ = 0{,}25;\ x_* = 0{,}5529829\big)$.

Рис. 7. Слабка турбулентність при $\lambda = \lambda^* \approx 3{,}57$. Послідовність $w_\varphi\left(x, t_\circ + 2^k\right)$ збігається при $k \to \infty$ до напівнеперервної зверху функції $\xi_{t_\circ}(x)$ зі зліченним числом розривів $\big(\varphi(x) = ax^2 + bx + c,\ a = -0{,}6295,\ b = 0{,}4007,\ c = 0{,}8;\ t_\circ = 0{,}2\big)$.

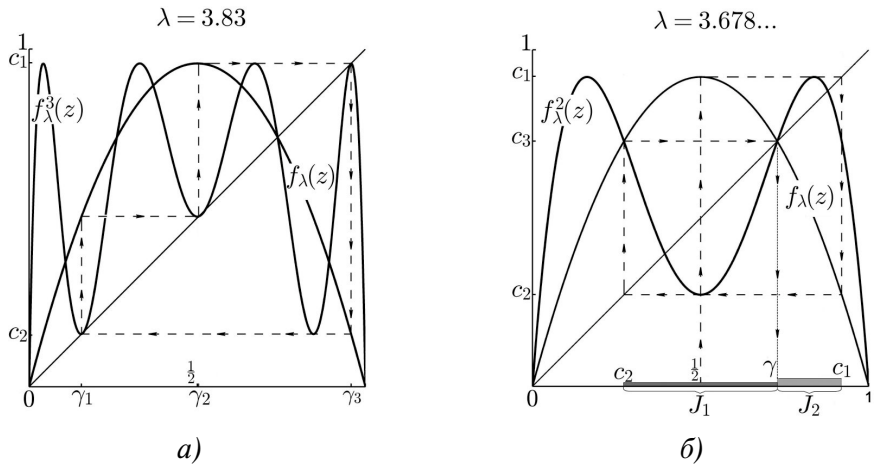


Рис. 8. $\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ — притягувальний цикл, $\{J_1, J_2\}$ — "поглинальний" цикл інтервалів, $c_n = f_\lambda^n(1/2)$.

Функції зі зліченним числом розривів належать до фрактальних, звідки випливає, що і при $1 + \sqrt{6} < \lambda < \lambda^*$, і при $\lambda = \lambda^*$ в задачі має місце ідеальна турбулентність. Щоб зрозуміти, наскільки розвиненою вона є, з'ясуємо, яку фрактальну розмірність мають графіки функцій $\xi \in \omega^\Delta[\varphi]$. Для цього використовуються співвідношення (16), з яких випливає, що в обох випадках $\dim_{\rm frac} \mathcal{D}(\varphi, f_\lambda) = 0$, і отже, $\dim_{\rm frac} {\rm gr}\, \xi = 1$. Така хаотизація дістала назву *слабкої ідеальної турбулентності*. В результаті констатуємо, що *при* $1 + \sqrt{6} < \lambda \le \lambda^*$ *крайова задача демонструє слабку турбулентність.*

4. Якщо продовжувати збільшувати λ, то з'являтимуться все нові й нові цикли, і отже (завдяки (17)) при $\lambda > \lambda^*$ у f_λ будуть цикли з періодами, відмінними від ступеня двійки, а тому будуть і цикли як завгодно великого періоду. Внаслідок цього роздільник $\mathcal{D}(f_\lambda)$ істотно "збільшується": до множини прообразів відштовхувальних циклів "додаються" її граничні точки, і тепер $\mathcal{D}(f_\lambda)$ стає незліченною множиною. З (15) випливає, що множини $\mathcal{D}(f_\lambda, \varphi)$ також будуть незліченними і, відповідно, ω-граничні множини $\omega^\Delta[\varphi]$ складатимуться з фрактальних функцій з незліченним числом розривів.

Отже, при $\lambda > \lambda^*$ в крайовій задачі знову маємо ідеальну турбулентність, але при цьому для всіх φ та $\xi \in \omega^\Delta[\varphi]$, як побачимо далі, $\dim_{\rm frac} {\rm gr}\, \xi > 1$. Таку хаотизацію названо *сильною ідеальною турбулентністю* і вона більш розвинута за слабку. Розглянемо дві типові ситуації.

4a. На інтервалі $(\lambda^*, 4]$ існує відкрита щільна множина Λ_a значень параметра, при яких f_λ має (притому єдиний) притягувальний цикл. При кожному $\lambda \in \Lambda_a$ період цього циклу відрізняється від ступеня двійки, а сам цикл притягує всі точки з I за винятком роздільника $\mathcal{D}(f_\lambda)$, який є, як свідчить теорія, канторовою множиною позитивної фрактальної розмірності $r = r(\lambda) < 1$. З цього, зважаючи на (16), виводимо: $\dim_{\rm frac} {\rm gr}\, \xi = r + 1$ для $\xi \in \omega^\Delta[\varphi]$. Отже, *при* $\lambda \in \Lambda_a$ *крайова задача демонструє сильну турбулентність.* Для прикладу візьмемо $\lambda = 3{,}83$, коли f_λ має притягувальний цикл періоду 3. Цю ситуацію ілюструють рис. 8а та 9. При цьому для будь-якого $t_\circ$ послідовність $w_\varphi(x, t_\circ + 3k)$ прямує при $k \to \infty$ до певної напівнеперервної зверху функції $\xi_{t_\circ}(x)$. Отже, ω-гранична множина $\omega^\Delta[\varphi]$ складається з функцій $\xi_t(x)$, $t \in [0, 3)$; кожна така функція має розриви на фрактальній множині (причому між будь-якими двома точками розриву знайдеться інтервал неперервності) і всі розриви мають одну й ту саму амплітуду. В результаті, $1 < \dim_{\rm frac} {\rm gr}\, \xi_{t_\circ} < 2$. Окрім то-

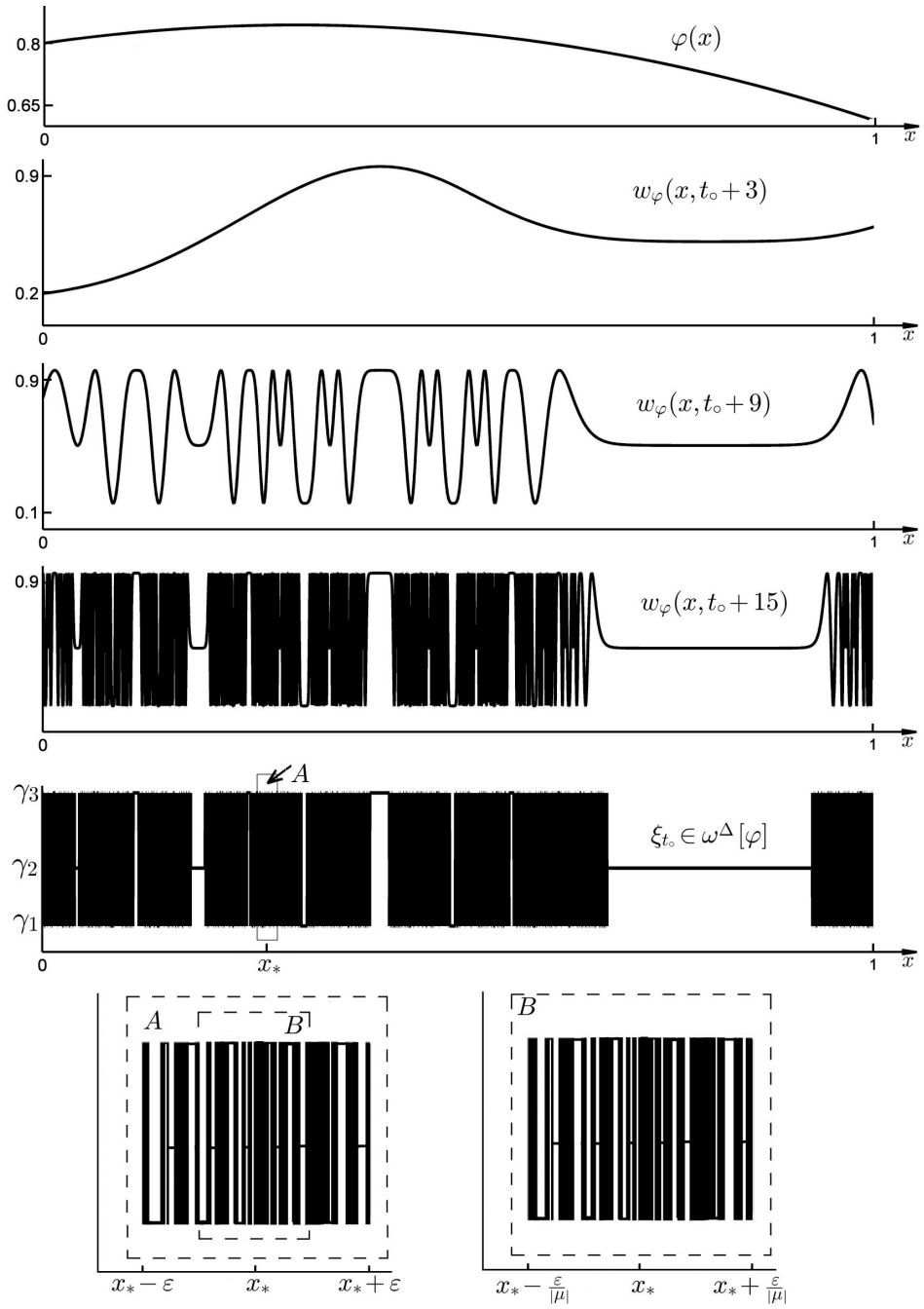


Рис. 9. Сильна турбулентність при $\lambda = 3{,}83$. Послідовність $w_\varphi(x, t_\circ + 3k)$ збігається при $k \to \infty$ до напівнеперервної зверху функції $\xi_{t_\circ}(x)$ з незліченним числом розривів, при цьому має місце явище Гібса; графік $\xi_{t_\circ}(x)$ є локально самоподібним в точках розриву і має фрактальну розмірність, більшу за 1 і меншу за 2 $\big(\varphi(x) = ax^2 + bx + c,\ a = -0{,}4756,\ b = 0{,}2884,\ c = 0{,}8;\ t_\circ = 0{,}5;\ x_* = 0{,}27267,\ \varepsilon = 0{,}00001,\ \mu = -1{,}83\big)$.

го, графік $\operatorname{gr}\xi_{t_\circ}(x)$ є локально самоподібним у точках розриву. На рис. 9 цю властивість продемонстровано на прикладі точки $x_* \approx 0{,}27267$, для якої $\varphi(\{x_* + t_\circ\}) = \gamma$. Графік функції $\xi_{t_\circ}(x)$, розташований в області B, є майже копією того ж графіку, розташованого

в області A, при цьому коефіцієнт подібності визначається мультиплікатором $\mu = -1{,}83$ точки $z = \gamma$. Якщо поглянути на область B "під лупою", збільшивши масштаб по осі x в $|\mu|$ разів, то побачимо в областях A і B дуже схожі картини. Явище Гібса також має місце, але відповідні "викиди" настільки малі, що не відображаються на рис. 9.

4b. Разом з Λ_a інтервал $(\lambda^*, 4]$ містить ніде не щільну множину Λ_b позитивної лебегової міри, що складається з тих значень параметра, при яких f_λ має (притому єдиний) "поглинальний" цикл інтервалів — скінченний набір замкнених інтервалів, які попарно не мають спільної внутрішності, циклічно переставляються під дією f_λ і є такими, що кожна точка з I за скінченне число ітерацій потрапляє в один з них. На "поглинальному" циклі інтервалів існує всюди щільна траєкторія (всі цикли є відштовхувальними). Це означає, що кожна точка $z \in I$ є нестійкою, і отже, $\mathcal{D}(f_\lambda) = I$. Тому $\dim_{\rm frac}\, \mathcal{D}(f_\lambda) = 1$, і згідно з (16) маємо $\dim_{\rm frac}\, {\rm gr}\, \xi = 2$ для $\xi \in \omega^\Delta[\varphi]$. Як бачимо, *при $\lambda \in \Lambda_b$ крайова задача знову демонструє сильну турбулентність,* але в цьому разі спостерігаємо в певному сенсі екстремальну картину, адже $\dim_{\rm frac}\, {\rm gr}\, \xi = \dim {\rm gr}\, \varphi + 1$. Дамо пояснення на прикладі, коли $\lambda = \lambda_* \approx 3{,}678$, де λ_* — дійсний корінь рівняння $f_\lambda^3(1/2) = 1 - 1/\lambda$ (тобто λ_* — це те значення параметра, при якому точка екстремуму $z = 1/2$ за три ітерації потрапляє в нерухому точку $z = \gamma$). Відображення f_{λ_*} має "поглинальний" цикл інтервалів, що складається з двох суміжних інтервалів (див рис. 8б). Відповідна еволюція розв'язків зображена на рис. 10: для будь-якого $t_\circ$ послідовність $w_\varphi(x, t_\circ + 2k)$ прямує при $k \to \infty$ до певної функції $\xi_{t_\circ}(x)$, розривної при кожному $x \in [0, 1]$. В результаті множину $\omega^\Delta[\varphi]$ складають з функції $\xi_t(x)$, $t \in [0, 2)$, для яких $\dim_{\rm frac}\, {\rm gr}\, \xi_t = 2$. З геометричної точки зору це означає, що розв'язок $w_\varphi(x, t)$ визначає на площині (y, x) гладку криву $y = w_\varphi(x, t_\circ + 2k)$, яка стає при великих k подібною до плоскої *space-filling кривої* — неперервної 2-вимірної кривої, що проходить через кожну точку деякого квадрата.

4c. Решта значень λ з інтервалу $(\lambda^*, 4]$ складають незліченну ніде не щільну множину Λ_c нульової лебегової міри. Ми не будемо докладно зупинятися на цій нетиповій ситуації. Тут мають місце випадки двох типів: або такі ж, як для $\lambda \in \Lambda_a$, або подібні до випадку $\lambda = \lambda_*$, та з тією різницею, що існують цикли періодів, відмінних від ступеня двійки, і тому роздільник є незліченною множиною. Отже, *турбулентність в крайовій задачі при $\lambda \in \Lambda_c$ знову буде сильною.*

5. Ми проілюстрували перебіг сценаріїв групи $(*)$. Тепер кілька слів про сценарій $(**)$. Типову ситуацію, коли цей сценарій відбувається, маємо при $\lambda \in \Lambda_b$. Наявність space-filling властивості, наприклад, як на рис. 10, приводить до того, що *розв'язки $w_\varphi(x, t)$ при великих t потрапляють за горизонт передбачуваності* і стає неможливим обчислити їхнє значення достовірно: наближене значення (навіть при як завгодно високій точності обчислень) може виявитися відмінним від справжнього значення на величину порядку 1. Тому природно постає питання про сценарій $(**)$, пов'язаний з імовірнісним описом розв'язків. Як показує теорія (див., наприклад, [9, 10]), цей сценарій реалізується за умови, що f_λ має гладку інваріантну міру, скажімо, μ. Тоді асимптотична динаміка розв'язку $w_\varphi(x, t)$ описується випадковими функціями з ω-граничної множини $\omega^\#[\varphi]$, а розподіли цих функцій задаються мірою μ. Такого роду хаотизацію названо *стохастичною ідеальною турбулентністю.* Добре відомо, що при кожному $\lambda \in \Lambda_b$ гладка інваріантна міра у f_λ існує (і зосереджена на "поглинальному" циклі інтервалів). Отже, *коли $\lambda \in \Lambda_b$, тоді сильна турбулентність у крайовій задачі одночасно є стохастичною*, до того ж *стохастична турбулентність не є чимось виключним, це явище фізично реалізовне* в тому сенсі, що спостерігається на множині значень параметра позитивної міри Лебега.

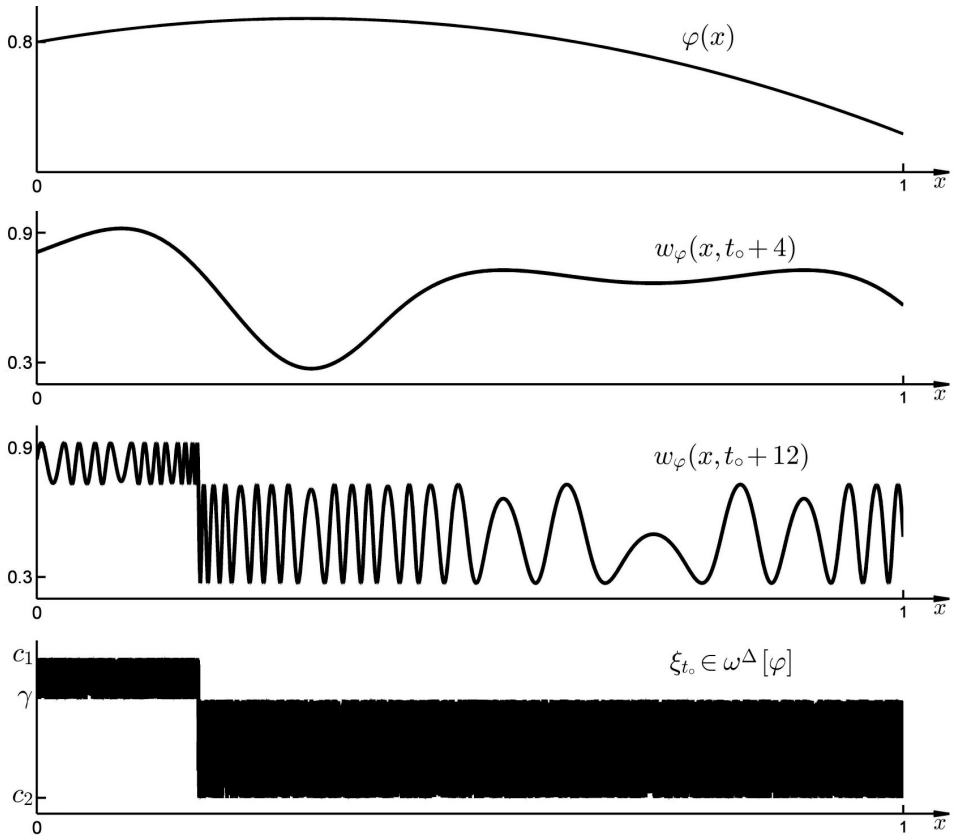


Рис. 10. Сильна турбулентність при $\lambda = \lambda_* \approx 3{,}678$. Послідовність $w_\varphi(x, t_\circ + 2k)$ збігається при $k \to \infty$ до напівнеперервної зверху функції $\xi_{t_\circ}(x)$, розривної в кожній точці; фрактальна розмірність графіка $\xi_{t_\circ}(x)$ дорівнює 2 $\big(\varphi(x) = ax^2 + bx + c,\ a = -0{,}5621,\ b = 0{,}3505,\ c = 0{,}8;\ t_\circ = 0{,}6\big)$.

4. Про атрактор. Ми простежили трансформації хаотичної динаміки розв'язків при зміні λ в інтервалі турбулентності $\big(1 + \sqrt{6}, 4\big]$. Тепер побіжно зупинимося на питанні: що являє собою атрактор задачі, наскільки складно він влаштований? Нагадаємо, що під атрактором крайової задачі розуміється глобальний атрактор динамічної системи зсувів (10) в розширених просторах C^Δ і $C^\#$. Як і раніше, для загального розуміння не обов'язково залучати точні математичні формулювання, достатньо буде спрощеного погляду, і в цьому плані аргументальною ілюстрацією буде наведена вище візуалізація різних типів перебігу ідеальної турбулентності.

Атрактор в C^Δ завжди існує; коротко кажучи, він визначається як найменша замкнена множина $\mathcal{A}^\Delta \subset C^\Delta$, що притягує (в метриці простору C^Δ) майже всі траєкторії, що починаються в фазовому просторі C^1. Динамічна система (10) задає (за неперервністю) рух на атракторі, а саме: $\xi(x) \mapsto f(\xi(x)),\ \xi \in \mathcal{A}^\Delta$.

При $\lambda \in \big(1 + \sqrt{6}, \lambda^*\big) \cup \Lambda_a$ майже всі траєкторії відображення f_λ притягуються до циклу, а при $\lambda \in \Lambda_b$ притягуються до циклу інтервалів. Ця періодичність "спадкується" динамічною системою (10). Для майже кожної траєкторії $S^t[\varphi](x)$ відповідна ω-гранична множина $\omega^\Delta[\varphi]$ складається з фрактальних функцій і є циклом. Так, якщо $\lambda = 3{,}83$, то для майже всіх $\varphi \in C^1$ множину $\omega^\Delta[\varphi]$ складають функції $\xi_t(x) = \mathrm{Lim}_{k\to\infty} w_\varphi(x, t + 3k)$, $t \in [0, 3)$, де Lim — операція граничного переходу в C^Δ. З цієї формули для $\xi_t(x)$ та з (7) і

(9) виводимо, що $f(\xi_t(x)) = \xi_{t+1(\mathrm{mod}\,3)}(x)$, тобто множина $\omega^{\Delta}[\varphi]$ є циклом періоду 3. Отже, атрактор $\mathcal{A}^{\Delta}$ складається з циклів періоду 3. При інших значеннях λ з інтервалу $\left(1+\sqrt{6},\,4\right]$ атрактор $\mathcal{A}^{\Delta}$ складається або з циклів, або з майже періодичних траєкторій. Зокрема, при $\lambda = \lambda^* \approx 3{,}57$ атрактор $\mathcal{A}^{\Delta}$ утворюють траєкторії з майже періодами $1, 2, 2^2, 2^3, \ldots$.

При $\lambda \in \Lambda_b$ крайова задача має атрактор також і в просторі $C^{\#}$, і цей атрактор $\mathcal{A}^{\#}$ також складається з циклів. Наприклад, при $\lambda = \lambda_* \approx 3{,}678$ обидва атрактори $\mathcal{A}^{\Delta}$ і $\mathcal{A}^{\#}$ утворюються циклами періоду 2.

Таким чином, *при всіх розглянутих типах хаотизації розв'язків фазова (нескінченновимірна) динаміка на атракторі є регулярною — періодичною або майже періодичною.*

Насамкінець важливо підкреслити, що розглянуті *сценарії ідеальної турбулентності є характерними для широких класів крайових задач математичної фізики.*

Література

1. *Sharkovsky A. N., Romanenko E. Yu.* Turbulence: ideal // Encyclopedia of Nonlinear Science (ed. Alwyn Scott). – New York; London: Routledge, 2005. – P. 955 – 957.
2. *Романенко Е. Ю., Шарковский А. Н.* Динамические системы и моделирование турбулентности // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 2. – С. 217 – 230.
3. *Шарковський О. М.* Динамічні системи, породжувані крайовими задачами. Ідеальна турбулентність. Комп'ютерна турбулентність // Пр. Укр. мат. конгр. Секц. Динамічні системи. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2003. – С. 125 – 129.
4. *Sharkovsky A. N.* Ideal turbulence // Nonlinear Dyn. – 2006. – **44**. – P. 15 – 27.
5. *Шарковский А. Н., Романенко Е. Ю.* Разностные уравнения и динамические системы, порождаемые некоторыми классами краевых задач // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. – 2004. – **244**. – С. 281 – 296; ***English translation:*** Proc. Steklov Inst. Math. – 2004. – **244**. – P. 264 – 279.
6. *Шарковский А. Н., Майстренко Ю. Л., Романенко Е. Ю.* Разностные уравнения и их приложения // Киев: Наук. думка, 1986. – 280 с. (***English translation:*** *Sharkovsky A. N., Maistrenko Yu. L., Romanenko E. Yu.* Difference equations and their applications // Math. Appl. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1993. – Vol. 250. – 358 p.)
7. *Романенко О. Ю.* Різницеві рівняння з неперервним аргументом // Пр. Ін-ту математики НАН України. – 2014. – **100**. – 346 с.
8. *Шарковский А. Н., Коляда С. Ф., Сивак А. Г., Федоренко В. В.* Динамика одномерных отображений. – Киев: Наук. думка, 1989. – 216 с. (***English translation:*** *Sharkovsky A. N., Kolyada S. F., Sivak A. G., Fedorenko V. V.* Dynamics of one-dimensional mappings // Math. Appl. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997. – Vol. 407. – 262 p.)
9. *Романенко О. Ю.* Явище автостохастичності в динамічних системах, породжуваних різницевими рівняннями з неперервним аргументом // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 7. – С. 954 – 975.
10. *Romanenko E. Yu.* Randomness in deterministic continuous time difference equations // J. Difference Equ. Appl. – 2010. – **16**, № 2-3. – P. 243 – 268.

Одержано 17.12.2018