УДК 517.927

ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗКІВ БАГАТОТОЧКОВИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ У ПРОСТОРАХ СОБОЛЄВА

О. М. Атласюк

Ін-т математики НАН України
вул. Терещенківська, 3, Київ, 01004, Україна
e-mail: atlasiuk@imath.kiev.ua
hatlasiuk@gmail.com

We consider the most general class of multipoint boundary-value problems for systems of linear ordinary differential equations of the first order whose solutions belong to the given Sobolev space W_p^n, $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$. Sufficient constructive conditions under which the solutions of these problems are continuous with respect to the parameter ε for $\varepsilon = 0$ in the space W_p^n are established.

Розглянуто найбільш широкий клас багатоточкових крайових задач для систем лінійних звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язки яких належать заданому простору Соболєва W_p^n, $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$. Встановлено конструктивні достатні умови, за яких розв'язки цих задач неперервні за параметром ε при $\varepsilon = 0$ у просторі W_p^n.

1. Вступ. Дослідження властивостей розв'язків систем звичайних диференціальних рівнянь є суттєвою частиною багатьох задач аналізу та його застосувань (див., наприклад, [1] та наведену там бібліографію). Для лінійних крайових задач умови фредгольмовості з нульовим індексом та неперервної залежності розв'язків за параметром встановлені І. Т. Кігурадзе [2, 3]. Отримані ним результати набули подальшого розвитку в роботах [4 – 6]. Ці дослідження було поширено на більш загальні класи крайових умов, пов'язаних із різними функціональними банаховими просторами [7 – 11]. Метою даної роботи є детальний аналіз розв'язків багатоточкових фредгольмових крайових задач, що спирається на результати робіт [8, 11]. У випадку $1 \leq p < \infty$ одержані автором результати узагальнюють теореми роботи [12]. Випадок $p = \infty$ має особливості і раніше не вивчався.

2. Постановка задачі. Нехай задано скінченний інтервал $[a, b] \subset \mathbb{R}$ та параметри

$$1 \leq p \leq \infty, \quad r \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad \{m, k, n\} \subset \mathbb{N}.$$

Довільним чином виберемо $r \geq 1$ точок $\{t_1, \ldots, t_r\} \subset [a, b]$.

Позначимо через $W_p^n := W_p^n([a, b]; \mathbb{C})$ комплексний простір Соболєва і покладемо $W_p^0 := L_p$. Також позначимо простори Соболєва вектор-функцій $\left(W_p^n\right)^m := W_p^n\left([a, b]; \mathbb{C}^m\right)$ і матриць-функцій $\left(W_p^n\right)^{m \times m} := W_p^n\left([a, b]; \mathbb{C}^{m \times m}\right)$, елементи яких належать функціональному простору W_p^n. Норми у цих просторах позначимо через $\|\cdot\|_{n,p}$, вони є сумами відповідних норм у W_p^n всіх елементів векторно- або матричнозначної функції. З контексту завжди зрозуміло, про норму в якому саме просторі (скалярних, вектор- чи матриць-функцій) йде мова. Якщо $m = 1$, то всі ці простори збігаються. Як відомо, простори W_p^n є банаховими; вони сепарабельні тоді і лише тоді, коли $p < \infty$.

Для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 > 0$, розглянемо багатоточкову крайову задачу

$$L(\varepsilon)y(t, \varepsilon) := y'(t, \varepsilon) + A(t, \varepsilon)y(t, \varepsilon) = f(t, \varepsilon), \quad t \in (a, b). \tag{1}$$

Тут при кожному фіксованому значенні параметра ε матриці-функції $A(\cdot,\varepsilon)$ належать простору $\left(W_p^{n-1}\right)^{m\times m}$, вектор-функції $f(\cdot,\varepsilon)$ — простору $\left(W_p^{n-1}\right)^{m}$ та вектор $c(\varepsilon)$ — простору $\mathbb{C}^m$.

Пов'яжемо з системою (1) багатоточкову фредгольмову крайову умову

$$B(\varepsilon)y(\cdot,\varepsilon)=\sum_{j=0}^{r}\sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)}\sum_{l=0}^{n}\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon),\varepsilon)=q(\varepsilon), \tag{2}$$

де вектори $q(\varepsilon)$ належать простору $\mathbb{C}^m$, а матриці $\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)$ — простору $\mathbb{C}^{m\times m}$.

Вектори і вектор-функції вважаємо записаними у вигляді стовпців. Під розв'язком крайової задачі (1), (2) розуміємо вектор-функцію $y(\cdot)\in\left(W_p^{n}\right)^{m}$, яка задовольняє рівняння (1) майже скрізь (при $n\geq 2$ скрізь) на (a,b), та рівність (2), яка задає m скалярних крайових умов. Використання у крайовій умові (2) повторної суми за індексами j і k зумовлено подальшими припущеннями щодо поведінки точок $t_{j,k}(\varepsilon)$ при $\varepsilon\to 0+$ в залежності від значень параметра j.

У граничному випадку при $\varepsilon=0$ розглядаємо крайову задачу

$$L(0)y(t,0)=f(t,0),\quad t\in(a,b), \tag{3}$$

$$B(0)y(\cdot,0)=\sum_{j=1}^{r}\sum_{l=0}^{n}\beta_{j}^{(l)}y^{(l)}(t_j,0)=q(0), \tag{4}$$

де матриці $\beta_{j}^{(l)}\in\mathbb{C}^{m\times m}$, точки $t_j\in[a,b]$ та вектор $q(0)\in\mathbb{C}^m$ є заданими.

З огляду на неперервне вкладення

$$\left(W_p^{n}\right)^{m}\hookrightarrow\left(C^{n-1}\right)^{m} \tag{5}$$

ліва частина крайової умови (2) має сенс для всіх розв'язків рівняння (1). Для кожного $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0)$ лінійне відображення $y\mapsto B(\varepsilon)y$, де $y\in\left(W_p^{n}\right)^{m}$, є лінійним неперервним оператором

$$B(\varepsilon)\colon\left(W_p^{n}\right)^{m}\to\mathbb{C}^m. \tag{6}$$

Крайовій задачі (1), (2) для кожного $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0)$ відповідає лінійний оператор

$$(L(\varepsilon),B(\varepsilon))\colon\left(W_p^{n}\right)^{m}\to\left(W_p^{n-1}\right)^{m}\times\mathbb{C}^m. \tag{7}$$

Це обмежений фредгольмовий оператор з індексом нуль [13] (теорема 1).

Зауважимо, що крайові умови (2), (4) охоплюють як класичні багатоточкові задачі, так і некласичні, що містять похідні шуканих функцій порядку s, де $1\leq s\leq n$.

Основний результат даної статті полягає у встановленні явних достатніх умов, за яких розв'язок $y=y(\cdot,\varepsilon)$ багатоточкової крайової задачі (1), (2) неперервний за параметром ε у просторі Соболєва W_p^n, $1\leq p\leq\infty$, тобто коли розв'язок $y(\cdot,\varepsilon)$ є єдиним і задовольняє граничне співвідношення

$$\left\|y(\cdot,\varepsilon)-y(\cdot,0)\right\|_{n,p}\to 0\quad\text{при}\quad\varepsilon\to 0+\,. \tag{8}$$

3. Основні результати. Сформулюємо основні результати статті. Їх доведення наведено в пп. 4, 5. Розглянемо граничні умови при $\varepsilon \to 0+$:

(I) $A(\cdot, \varepsilon) \to A(\cdot, 0)$ у просторі $\left(W_p^{n-1}\right)^{m\times m}$;

(II) $B(\varepsilon)y \to B(0)y$ в $\mathbb{C}^m$ для кожного $y \in \left(W_p^n\right)^m$.

Надалі вважатимемо, що виконується така умова.

Умова (0). *Однорідна гранична крайова задача*

$$L(0)y(t,0) = 0, \quad t \in (a,b), \qquad B(0)y(\cdot,0) = 0$$

має лише тривіальний розв'язок.

Звідси випливає, що при $\varepsilon = 0$ фредгольмовий оператор (7) є ізоморфізмом, тобто

$$(L(0), B(0))\colon \left(W_p^n\right)^m \leftrightarrow \left(W_p^{n-1}\right)^m \times \mathbb{C}^m.$$

Тому крайова задача (3), (4) має єдиний розв'язок $y(t,0) \in \left(W_p^n\right)^m$ для довільно вибраних правих частин $f(t,0) \in \left(W_p^{n-1}\right)^m$ і $q(0) \in \mathbb{C}^m$.

Сформулюємо граничні теореми для розв'язків багатоточкової крайової задачі (1), (2) у випадку $p = \infty$.

Розглянемо припущення при $\varepsilon \to 0+$:

(α) $t_{j,k}(\varepsilon) \to t_j$ для всіх $j \in \{1, \ldots, r\}$ та $k \in \{1, \ldots, \omega_j(\varepsilon)\}$;

(β) $\sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) \to \beta_j^{(l)}$ для всіх $j \in \{1, \ldots, r\}$ та $l \in \{0, \ldots, n\}$;

(γ) $\sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \left\|\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\right\| |t_{j,k}(\varepsilon) - t_j| \to 0$ для всіх $j \in \{1, \ldots, r\}$, $k \in \{1, \ldots, \omega_j(\varepsilon)\}$ та $l \in \{0, \ldots, n\}$;

(δ) $\sum_{k=1}^{\omega_0(\varepsilon)} \left\|\beta_{0,k}^{(l)}(\varepsilon)\right\| \to 0$ для всіх $k \in \{1, \ldots, \omega_0(\varepsilon)\}$ та $l \in \{0, \ldots, n\}$.

Зауважимо, що для крайової задачі (1), (2) не припускається, що коефіцієнти $A(\cdot, \varepsilon)$, $\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)$ чи точки $t_{j,k}(\varepsilon)$ мають певну регулярність за параметром ε при $\varepsilon > 0$. Будемо вимагати, щоб для кожного фіксованого $j \in \{1, \ldots, r\}$ всі точки $t_{j,k}(\varepsilon)$ мали спільну границю при $\varepsilon \to 0+$, проте для точок нульової серії $t_{0,k}(\varepsilon)$ така вимога не висуватиметься.

В умовах (γ) та (δ) вираз $\|\cdot\|$ є нормою комплексної числової матриці; ця норма дорівнює сумі модулів усіх елементів матриці. Припущення (β) і (γ) допускають, що коефіцієнти $\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)$ можуть необмежено зростати при $\varepsilon \to 0+$, але не надто швидко. З умови (δ) випливає, що не потрібно вимагати збіжність точок $t_{0,j}(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0+$ на відміну від умови (α).

Теорема 1. *Нехай крайова задача* (1), (2) *при* $p = \infty$ *задовольняє припущення* (α), (β), (γ), (δ). *Тоді вона задовольняє граничну умову* (II).

Якщо, крім того, виконані умови (0) *і* (I), *то для достатньо малих* ε *її розв'язок існує, єдиний та задовольняє граничне співвідношення* (8).

Сформулюємо граничні теореми для розв'язків багатоточкової крайової задачі (1), (2) у випадку $1 \leq p < \infty$.

Розглянемо припущення при $\varepsilon \to 0+$:

(γ_p) $\sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \left\|\beta_{j,k}^{(n)}(\varepsilon)\right\| |t_{j,k}(\varepsilon) - t_j|^{1/q} = O(1)$ для всіх $j \in \{1, \ldots, r\}$ та $k \in \{1, \ldots, \omega_j(\varepsilon)\}$, де $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$;

(γ') $\sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \left\| \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) \right\| |t_{j,k}(\varepsilon) - t_j| \to 0$ для всіх $j \in \{1, \ldots, r\}$, $k \in \{1, \ldots, \omega_j(\varepsilon)\}$ та $l \in \{0, \ldots, n-1\}$.

Якщо в припущенні (γ_p) $p = 1$, то $\dfrac{1}{q} = 0$.

Зазначимо, що системи умов (α), (β), (γ), (δ) та (α), (β), (γ_p), (γ'), (δ) не гарантують рівномірну збіжність неперервних операторів $B(\varepsilon)$ із $\left(W_p^n\right)^m$ до $B(0)$ в $\mathbb{C}^m$ при $\varepsilon \to 0+$. Тому теорема 1 не випливає із загальних фактів теорії лінійних операторів.

Теорема 2. *Нехай крайова задача* (1), (2) *при* $1 \le p < \infty$ *задовольняє припущення* (α), (β), (γ_p), (γ'), (δ). *Тоді вона задовольняє граничну умову* (II).

Якщо, крім того, виконані умови (0) *і* (I), *то для достатньо малих* ε *її розв'язок існує, єдиний та задовольняє граничне співвідношення* (8).

Зауважимо, що в роботах Т. І. Кодлюк і В. А. Михайлеця [12, 14] досліджено багатоточкові крайові задачі для систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку в просторах Соболєва W_p^n, де $1 \le p < \infty$, але в цих роботах точки відрізка $[a, b]$, які фігурують у крайовій умові, є фіксованими і не залежать від параметра. У роботі Є. В. Гнип і Т. І. Кодлюк [15] досліджено некласичні багатоточкові крайові задачі для систем звичайних диференціальних рівнянь у просторах Соболєва W_p^n, де $1 \le p < \infty$, проте в цій роботі кількість точок у кожній серії не залежить від параметра ε.

4. Доведення теореми 1. Запишемо оператор (6) у вигляді скінченної суми $r+1$ доданків, розділених за серіями:

$$B(\varepsilon)y(\cdot,\varepsilon) = B_0(\varepsilon)y(\cdot,\varepsilon) + B_1(\varepsilon)y(\cdot,\varepsilon) + \ldots + B_r(\varepsilon)y(\cdot,\varepsilon), \tag{9}$$

де

$$B_0(\varepsilon)y(t_{0,k}(\varepsilon),\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\omega_0(\varepsilon)} \sum_{l=0}^{n} \beta_{0,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{0,k}(\varepsilon)),$$

$$B_1(\varepsilon)y(t_{1,k}(\varepsilon),\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\omega_1(\varepsilon)} \sum_{l=0}^{n} \beta_{1,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{1,k}(\varepsilon)),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$B_r(\varepsilon)y(t_{r,k}(\varepsilon),\varepsilon) = \sum_{k=r}^{\omega_r(\varepsilon)} \sum_{l=0}^{n} \beta_{r,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{r,k}(\varepsilon)). \tag{10}$$

Тоді співвідношення

$$B_0(\varepsilon) \xrightarrow{s} 0, \tag{11}$$

$$B_j(\varepsilon) \xrightarrow{s} B_j(0), \quad j \in \{1, \ldots r\}, \tag{12}$$

гарантують виконання граничної умови (II).

Покажемо спочатку сильну збіжність операторів $B_0(\varepsilon)$ до нуля, тобто виконання співвідношення (11). Враховуючи умову (δ), отримуємо

$$\sum_{k=1}^{\omega_0(\varepsilon)} \left\| \beta_{0,k}^{(l)}(\varepsilon) \right\| \left\| y^{(l)}(t_{0,k}(\varepsilon)) \right\| \le \sum_{k=1}^{\omega_0(\varepsilon)} \left\| \beta_{0,k}^{(l)}(\varepsilon) \right\| \|y\|_{n,\infty} \to 0$$

для всіх допустимих значень індексів k і l. Ці та всі інші границі у доведенні розглядаємо за умови, що $\varepsilon \to 0+$.

Для довільної вектор-функції $y \in (W_\infty^n)^m$ і достатньо малого $\varepsilon > 0$ маємо

$$\|B_j(\varepsilon)y - B_j(0)y\| = \left\| \sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \sum_{l=0}^{n} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - \sum_{l=0}^{n} \beta_j^{(l)} y^{(l)}(t_j) \right\| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{\omega_0(\varepsilon)} \sum_{l=0}^{n} \left\| \beta_{0,k}^{(l)}(\varepsilon) \right\| \left\| y^{(l)}(t_{0,k}(\varepsilon)) \right\| +$$

$$+ \sum_{l=0}^{n} \left\| \sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - \beta_j^{(l)} y^{(l)}(t_j) \right\|. \tag{13}$$

Дослідимо другий доданок у правій частині формули (13). Для довільних $j \in \{1, \ldots, r\}$ та $l \in \{0, \ldots, n\}$ маємо

$$\left\| \sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - \beta_j^{(l)} y^{(l)}(t_j) \right\| =$$

$$= \left\| \sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - \sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_j) + \sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_j) - \beta_j^{(l)} y^{(l)}(t_j) \right\| \le$$

$$\le \left\| \sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) \left(y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - y^{(l)}(t_j) \right) \right\| + \left\| \left(\sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) - \beta_j^{(l)} \right) y^{(l)}(t_j) \right\| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \left\| \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) \right\| \left\| y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - y^{(l)}(t_j) \right\| + \left\| \sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) - \beta_j^{(l)} \right\| \|y\|_{n,\infty}. \tag{14}$$

Тоді на підставі умови (β) справджується збіжність

$$\left\| \sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) - \beta_j^{(l)} \right\| \|y\|_{n,\infty} \to 0. \tag{15}$$

Зауважимо, що у просторі W_∞^n для довільних $\{t_1, t_2\} \subset [a,b]$ та $y \in (W_\infty^n)^m$ виконується нерівність

$$\left| y^{(n-1)}(t_1) - y^{(n-1)}(t_2) \right| = \left| \int_{t_1}^{t_2} y^{(n)}(s) ds \right| \le$$

$$\le \int_{t_1}^{t_2} \left| y^{(n)}(s) \right| ds = |t_2 - t_1| \operatorname*{ess\,sup}_{a \le t_1 < t_2 \le b} \left| y^{(n)} \right|. \tag{16}$$

Крім того, похідні функцій до порядку $(n-2)$ існують та є ліпшіцевими, а похідна порядку n існує майже скрізь та є істотно обмеженою. З наведених міркувань та з умови (16) випливає, що похідна порядку $(n-1)$ також є ліпшіцевою.

Тому має місце таке співвідношення:

$$\sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \left\|\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\right\| \left\|y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - y^{(l)}(t_j)\right\| \to 0. \tag{17}$$

Справді, якщо $0 \le l \le n,$ то це є прямим наслідком умови (γ) і того факту, що вектор-функція y належить простору $(W_\infty^n)^m$ з відповідно визначеною нормою

$$\sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \left\|\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\right\| \left\|y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - y^{(l)}(t_j)\right\| = \left\|y^{(n)}\right\|_\infty \sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \left\|\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\right\| |t_{j,k}(\varepsilon) - t_j| \le$$

$$\le \|y\|_{n,\infty} \sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \left\|\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\right\| |t_{j,k}(\varepsilon) - t_j| \to 0.$$

Із формул (14), (15), (17) безпосередньо випливає збіжність

$$\left\|\sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - \beta_j^{(l)} y^{(l)}(t_j)\right\| \to 0. \tag{18}$$

Встановлена збіжність (18) обумовлює виконання умов (12). Тому, враховуючи формули (11) і (12), робимо висновок, що $\|B(\varepsilon)y - B(0)y\| \to 0.$ Нагадаємо, що вектор-функція $y \in (W_\infty^n)^m$ є довільною. Отже, гранична умова (II) справджується.

Перше твердження теореми 1 доведено. Друге твердження випливає з доведеного вище і теореми 1 [11].

5. Доведення теореми 2. Як і раніше, будемо вважати, що оператор (6) записаний у вигляді (9), де скінченна сума $r+1$ доданків розділена за серіями (10).

Згідно з теоремою Банаха – Штейнгауза достатньо показати, що норма оператора $B(\varepsilon):$ $\left(W_p^n\right)^m \to \mathbb{C}^m$ є обмеженою при $0 < \varepsilon \ll 1$, а також, що $B(\varepsilon)y \to B(0)y$ в $\mathbb{C}^m$ при $\varepsilon \to 0+$ для кожної вектор-функції $y,$ яка належить щільній множині $(C^\infty)^m := C^\infty([a,b],\mathbb{C}^m)$ у просторі $\left(W_p^n\right)^m.$

Доведемо спочатку рівномірну по ε обмеженість норми оператора

$$B(\varepsilon) = \sum_{j=0}^{r} B_j(\varepsilon).$$

Виберемо довільну вектор-функцію $y \in \left(W_p^n\right)^m$ і достатньо малий параметр $\varepsilon > 0.$ Згідно з крайовою умовою (2) маємо нерівність

$$\|B_j(\varepsilon)y - B_j(0)y\| = \left\| \sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \sum_{l=0}^{n} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - \sum_{l=0}^{n} \beta_j^{(l)} y^{(l)}(t_j) \right\| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\omega_0(\varepsilon)} \sum_{l=0}^{n} \left\| \beta_{0,k}^{(l)}(\varepsilon) \right\| \left\| y^{(l)}(t_{0,k}(\varepsilon)) \right\| +$$

$$+ \sum_{l=0}^{n} \left\| \sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - \beta_j^{(l)} y^{(l)}(t_j) \right\|. \tag{19}$$

Покажемо обмеженість норми оператора, що відповідає нульовій серії. Використовуючи неперервність вкладення (5), одержуємо нерівність

$$\sum_{k=1}^{\omega_0(\varepsilon)} \left\| \beta_{0,k}^{(l)}(\varepsilon) \right\| \left\| y^{(l)}(t_{0,k}(\varepsilon)) \right\| \leq c_0 \sum_{k=1}^{\omega_0(\varepsilon)} \left\| \beta_{0,k}^{(l)}(\varepsilon) \right\| \|y\|_{n,p} \tag{20}$$

для всіх допустимих значень індексів $l \in \{0, \ldots, n\}$ і $k \in \{1, \ldots, \omega_0(\varepsilon)\}$, де c_0 — норма оператора вкладення (5). Ці та всі інші границі у доведенні розглядаємо за умови, що $\varepsilon \to 0+$.

Крім того, для будь-яких $l \in \{0, \ldots, n\}$ і $j \in \{1, \ldots, r\}$ маємо

$$\left\| \sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - \beta_j^{(l)} y^{(l)}(t_j) \right\| =$$

$$= \left\| \sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - \sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_j) + \sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) y^{(l)}(t_j) - \beta_j^{(l)} y^{(l)}(t_j) \right\| \leq$$

$$\leq \left\| \sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) \left(y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - y^{(l)}(t_j) \right) \right\| + \left\| \left(\sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) - \beta_j^{(l)} \right) y^{(l)}(t_j) \right\| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \left\| \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) \right\| \left\| y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - y^{(l)}(t_j) \right\| + \left\| \sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) - \beta_j^{(l)} \right\| \|y\|_{n,p}. \tag{21}$$

Тут для $l = n$ і кожного $k \in \{1, \ldots, \omega_j(\varepsilon)\}$ виконується нерівність

$$\sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \left\| \beta_{j,k}^{(n)}(\varepsilon) \right\| \left\| y^{(n)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - y^{(n)}(t_j) \right\| \leq \sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \left\| \beta_{j,k}^{(n)}(\varepsilon) \right\| c_1 \|y\|_{n,p} |t_{j,k}(\varepsilon) - t_j|^{1/q}, \tag{22}$$

де c_1 — норма неперервного оператора вкладення простору Соболєва W_p^n в комплексний простір Гельдера $C^{n-1,1/q}([a,b])$ (див., наприклад, [16], теорема 4.6.1 (e)). Якщо $1/q = 0$, то останній простір є C^{n-1} і нерівність (22) правильна при $c_1 := 2c_0$.

Крім того, для кожного $l \in \mathbb{Z}$, де $0 \le l \le n-1$, за теоремою Лагранжа маємо

$$\sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \left\|\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\right\| \left\|y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - y^{(l)}(t_j)\right\| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \left\|\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\right\| \max_{a\le t\le b} \left\|y^{(l+1)}(t)\right\| |t_{j,k}(\varepsilon) - t_j| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \left\|\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\right\| c_0 \|y\|_{n,p} \, |t_{j,k}(\varepsilon) - t_j| \, . \tag{23}$$

Із нерівностей (19) – (23) та умов (β), (γ_p), (γ'), (δ) випливає

$$\|B(\varepsilon)y - B(0)y\| \le c\|y\|_{n,p},$$

де число $c > 0$ не залежить від $y \in \left(W_p^n\right)^m$ і достатньо малого $\varepsilon > 0$. Отже, норма оператора $B(\varepsilon)$ обмежена при $0 < \varepsilon \ll 1$.

Обґрунтуємо сильну збіжність оператора $B(\varepsilon)$ до $B(0)$. Враховуючи умову (δ) і нерівність (20), маємо

$$\sum_{k=1}^{\omega_0(\varepsilon)} \left\|\beta_{0,k}^{(l)}(\varepsilon)\right\| \left\|y^{(l)}(t_{0,k}(\varepsilon))\right\| \to 0. \tag{24}$$

Крім того, за умовою (β)

$$c_0 \left\| \sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) - \beta_j^{(l)} \right\| \|y\|_{n,p} \to 0. \tag{25}$$

Якщо y належить $(C^\infty)^m$, то

$$\sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \left\|\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\right\| \left\|y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon)) - y^{(l)}(t_j)\right\| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \left\|\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\right\| \max_{a\le t\le b} \left\|y^{(l+1)}(t)\right\| |t_{j,k}(\varepsilon) - t_j| \to 0 \tag{26}$$

для всіх $l \in \{0, \ldots, n\}$ з урахуванням умов (α) і (β). Отже, з формул (19), (24) – (26) маємо збіжність $B(\varepsilon)y \to B(0)y$ в $\mathbb{C}^m$ при $\varepsilon \to 0+$ для кожного $y \in (C^\infty)^m$.

Перше твердження теореми 2 доведено. Друге твердження випливає з доведеного вище та теореми 1 [17].

Література

1. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. – Utrecht, Boston: VSP, 2004. – xiv+317 p.

2. *Кигурадзе И. Т.* Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. – Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1975. – 352 с.
3. *Кигурадзе И. Т.* Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // ВИНИТИ. – 1987. – **30**. – С. 3 – 103.
4. *Кодлюк Т. И., Михайлец В. А., Рева Н. В.* Предельные теоремы для одномерных краевых задач // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 1. – С. 70 – 81.
5. *Mikhailets V. A., Chekhanova G. A.* Limit theorem for general one-dimensional boundary-value problems // J. Math. Sci. – 2015. – **204**, № 3. – P. 333 – 342.
6. *Михайлец В. А., Пелехата О. Б., Рева Н. В.* Предельные теоремы для решений краевых задач // Укр. мат. журн. – 2018. – **70**, № 2. – С. 216 – 223.
7. *Гнып Е. В., Кодлюк Т. И., Михайлец В. А.* Фредгольмовые краевые задачи с параметром на пространствах Соболева // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 5. – С. 584 – 591.
8. *Kodlyuk T. I., Mikhailets V. A.* Solutions of one-dimensional boundary-value problems with a parameter in Sobolev spaces // J. Math. Sci. – 2013. – **190**, № 4. – P. 589 – 599.
9. *Hnyp Y. V., Mikhailets V. A., Murach A. A.* Parameter-dependent one-dimensional boundary-value problems in Sobolev spaces // Electron. J. Differ. Equ. – 2017. – № 81. – P. 1 – 13.
10. *Mikhailets V. A., Murach A. A., Soldatov V. O.* Continuity in a parameter of solutions to generic boundary-value problems // Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. – 2016. – № 87. – P. 1 – 16.
11. *Атласюк О. М., Михайлець В. А.* Фредгольмові одновимірні крайові задачі з параметром у просторах Соболєва // Укр. мат. журн. – 2018. – **70**, № 11. – С. 1457 – 1465.
12. *Кодлюк Т. И., Михайлец В. А.* Многоточечные краевые задачи с параметром в пространствах Соболева // Доп. НАН України. – 2012. – № 11. – С. 15 – 19.
13. *Атласюк О. М., Михайлець В. А.* Фредгольмові одновимірні крайові задачі у просторах Соболєва // Укр. мат. журн. – 2018. – **70**, № 10. – С. 1324 – 1333.
14. *Кодлюк Т. И.* Предельный переход в классе многоточечных краевых задач // Аналіз і застосування: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2012. – **9**, № 2. – С. 203 – 216.
15. *Гнип Є. В., Кодлюк Т. І.* Неперервність за параметром розв'язків некласичних багатоточкових крайових задач на просторах Соболєва // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2015. – **12**, № 2. – С. 101 – 112.
16. *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. – М.: Мир, 1980. – 664 с.
17. *Гнип Є. В., Михайлець В. А., Мурач О. О.* Про критерій неперервної залежності за параметром розв'язків тотальних крайових задач щодо просторів Соболєва // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2016. – **13**, № 2. – С. 111 – 124.

Одержано 22.11.2018