УДК 517.968.2

ЛІНІЙНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ СЛАБКОСИНГУЛЯРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

О. А. Бойчук, В. А. Ферук

Ін-т математики НАН України
вул. Терещенківська, 3, Київ, 01004, Україна
e-mail: boichuk.aa@gmail.com
feruk.viktor@gmail.com

We obtain necessary and sufficient conditions for the solvability of the linear boundary-value problem for a weakly singular integral equation and find the general form of the solution of this problem.

Знайдено необхідні та достатні умови розв'язності та загальний вигляд розв'язку лінійної крайової задачі для слабкосингулярного інтегрального рівняння.

Широке практичне застосування інтегральних рівнянь та крайових задач для них сприяло розвитку теорії і виникненню великої кількості публікацій з цього питання. Зокрема, цілу низку робіт присвячено дослідженню слабкосингулярних інтегральних рівнянь, які ще мають назву рівнянь зі слабкою особливістю або рівнянь з полярним ядром, що виникають у різних галузях природознавства [1, 2]. Основи теорії таких рівнянь висвітлено, зокрема, у монографіях Е. Гурса [3], С. Г. Міхліна [4], Ф. Трикомі [5], В. І. Смірнова [6]. Вивченню диференціальних властивостей розв'язків слабкосингулярних інтегральних рівнянь та розробці наближених методів їх розв'язання присвячено роботи Г. М. Вайнікко [7], I. G. Graham [8], T. Tang [9] та ін. [10 – 14]. Дослідження питання розв'язності таких рівнянь з необмеженим ядром, а також сингулярних рівнянь з ядром типу Коші проводиться шляхом їх регуляризації, тобто зведення до рівняння Фредгольма [15]. Проте, отримання умов розв'язності та відшукання розв'язків за допомогою альтернативи Фредгольма для конкретних рівнянь наштовхується на суттєві технічні труднощі. У даній роботі, використовуючи апарат теорії псевдообернених матриць, розглянуто альтернативний підхід, що дозволяє конструктивно встановити умови існування та структуру розв'язків слабкосингулярних інтегральних рівнянь та нетерових крайових задач для них.

1. Крайова задача для інтегрального рівняння зі слабкосингулярним ядром. Розглядається лінійна неоднорідна крайова задача для інтегрального рівняння зі слабкосингулярним ядром

$$x(t) = f(t) + \int_a^b K(t,s)x(s)ds, \tag{1}$$

$$lx(\cdot) = \alpha. \tag{2}$$

Тут $K(t,s) = \dfrac{H(t,s)}{|t-s|^\gamma}$, де $H(t,s)$ обмежена в області $[a,b]\times[a,b]$, $0<\gamma<1$, $f \in L_2[a,b]$, $x \in L_2[a,b]$, l — обмежений лінійний функціонал, визначений в $L_2[a,b]$, $l = \operatorname{col}\left(l_1,\, l_2,\, \ldots,\, l_p\right)\colon L_2[a,b] \to R^p$, $l_\nu\colon L_2[a,b]\to R$, $\alpha = \operatorname{col}\left(\alpha_1,\, \alpha_2,\, \ldots,\, \alpha_p\right) \in R^p$.

2. Зведення інтегрального рівняння (1) до рівняння з ітерованим ядром. Ядро $K(t,s)$ інтегрального оператора

$$(Kw)(t) = \int\limits_a^b K(t,s)w(s)ds,$$

що фігурує у рівнянні (1), є необмеженим. Проте, рівняння (1) можна звести до певного еквівалентного рівняння із інтегральним оператором, ядро якого є сумовним із квадратом. Завдяки цьому ми можемо перейти від вивчення крайової задачі для інтегрального рівняння із необмеженим ядром (1), (2) до вивчення крайової задачі для інтегрального рівняння Фредгольма.

Для обґрунтування згаданого вище переходу наведемо деякі відомості з теорії слабкосингулярних інтегральних операторів. Відомо [3–6], що якщо дано два інтегральні оператори H_1 і H_2 зі слабкосингулярними ядрами $\dfrac{H_1(t,s)}{|t-s|^{\gamma_1}}$, $\dfrac{H_2(t,s)}{|t-s|^{\gamma_2}}$ з показниками γ_1 і γ_2 відповідно, то добуток цих операторів H_1H_2 має ядро вигляду

$$F(t,s) = \int\limits_a^b \frac{H_1(t,\xi)H_2(\xi,s)}{|t-\xi|^{\gamma_1}|\xi-s|^{\gamma_2}}\,d\xi,$$

яке буде такої ж структури і має своїм показником число не більше, ніж $\gamma_1+\gamma_2-1.$ За виконання умови

$$\gamma_1+\gamma_2-1 < \frac{1}{2} \tag{3}$$

ядро $F(t,s)$ буде сумовним з квадратом, а при

$$\gamma_1+\gamma_2-1 < 0 \tag{4}$$

ядро $F(t,s)$ буде обмеженим.

Розглянемо тепер ітеровані ядра $K_n(t,s),\ n\in\mathbb{N}$, що визначаються за допомогою рекурентної формули

$$K_{n+1}(t,s) = \int\limits_a^b K(t,\xi)K_n(\xi,s)d\xi, \quad K_1(t,s) = K(t,s). \tag{5}$$

Згідно з викладеним вище ітеровані ядра $K_n(t,s)$ мають таку ж структуру, як і слабкосингулярне ядро $K(t,s) = \dfrac{H(t,s)}{|t-s|^{\gamma}}$, але число γ замінюється при цьому числом $1-n(1-\gamma)$, яке є від'ємним при достатньо великому $n.$ Тому згідно з (3), (4) при усіх $n,$ для яких виконується умова

$$n > \frac{1}{2(1-\gamma)}, \tag{6}$$

ядра $K_n(t,s)$ будуть сумовними з квадратом, а при

$$n > \frac{1}{1-\gamma} \tag{7}$$

ядра $K_n(t,s)$ будуть обмеженими.

Покажемо тепер що, рівняння (1) можна звести до рівняння Фредгольма з ядром $K_n(t,s)$. Справді, домноживши обидві частини рівняння (1) зліва на $K(t,s)$ та проінтегрувавши ліву та праву частини отриманої рівності на відрізку $[a,b]$, матимемо

$$\int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds = \int\limits_a^b K(t,s)f(s)ds + \int\limits_a^b K_2(t,s)x(s)ds.$$

Продовживши цей процес далі, отримаємо

$$\int\limits_a^b K_2(t,s)x(s)\,ds = \int\limits_a^b K_2(t,s)f(s)\,ds + \int\limits_a^b K_3(t,s)x(s)\,ds,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\int\limits_a^b K_{n-1}(t,s)x(s)\,ds = \int\limits_a^b K_{n-1}(t,s)f(s)\,ds + \int\limits_a^b K_n(t,s)x(s)\,ds.$$

Додавши почленно всі отримані рівняння з рівнянням (1), бачимо що, функція $x(t)$ є розв'язком рівняння

$$x(t) = f_n(t) + \int\limits_a^b K_n(t,s)x(s)ds, \tag{8}$$

$$f_n(t) = f(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \int\limits_a^b K_k(t,s)f(s)ds.$$

Отже [3 – 6], згідно з умовою (6) в результаті скінченної кількості кроків ми приходимо до рівняння (8) із сумовним із квадратом ядром. Очевидно, що довільний розв'язок рівняння (1) є розв'язком рівняння (8). Обернене твердження, взагалі кажучи, не вірне. Однак, можна вибрати число n так, щоб виконувалася умова (7), а отже, і умова (6), і щоб довільний розв'язок рівняння (8) був розв'язком рівняння (1), тобто щоб рівняння (1) та (8) були еквівалентні [4, с. 98]. Надалі будемо вважати, що число n вибрано саме таким чином. Зафіксувавши n, ми можемо перейти від вивчення крайової задачі для інтегрального рівняння із необмеженим ядром (1), (2) до вивчення крайової задачі для інтегрального рівняння Фредгольма (8), (2).

Зауваження. Якщо рівняння (8) при деякому фіксованому n, для якого виконується умова (6), має лише єдиний розв'язок, то рівняння (1) та (8) будуть еквівалентними. Зокрема, рівняння (1) та (8) будуть еквівалентними, якщо у рівнянні (1) замість оператора Фредгольма фігуруватиме оператор Вольтерра [3, с. 36].

3. Критерій розв'язності крайової задачі (1), (2). Застосуємо для дослідження задачі (8), (2) підхід, описаний у [16, 17]. Задачу (8), (2) можна звести до зліченновимірної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Нехай $\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ — повна ортонормальна система функцій в $L_2[a,b]$. Введемо у розгляд величини

$$x_i = \int\limits_a^b x(t)\varphi_i(t)\,dt, \qquad a_{ij} = \int\limits_a^b\int\limits_a^b K_n(t,s)\varphi_i(t)\varphi_j(s)\,dt\,ds, \tag{9}$$

$$f_i = \int\limits_a^b f_n(t)\varphi_i(t)dt = \int\limits_a^b f(t)\varphi_i(t)\,dt + \sum_{k=1}^{n-1}\int\limits_a^b\int\limits_a^b K_k(t,s)f(s)\varphi_i(t)\,dt\,ds. \tag{10}$$

Застосовуючи вирази (9), (10) до задачі (8), (2), отримаємо зліченновимірну систему алгебраїчних рівнянь

$$x_i - \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j = f_i, \quad i = \overline{1,\infty}, \tag{11}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} l_\nu\varphi_j(\cdot)x_j = \alpha_\nu, \quad \nu = \overline{1,p}, \tag{12}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < +\infty.$$

Запишемо систему (11), (12) у вигляді операторного рівняння в просторі ℓ_2:

$$Uz = \begin{bmatrix}\Lambda \\ W\end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} g \\ \alpha\end{bmatrix} = q, \tag{13}$$

де

$$z = \operatorname{col}\big(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_i,\ \ldots\big), \qquad g = \operatorname{col}\big(f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_i,\ \ldots\big), \tag{14}$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & \ldots & -a_{1i} & \ldots \\ -a_{21} & 1-a_{22} & \ldots & -a_{2i} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -a_{i1} & -a_{i2} & \ldots & 1-a_{ii} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}, \quad W = l\Phi(\cdot), \tag{15}$$

$$\Phi(t) = \big(\varphi_1(t),\ \varphi_2(t),\ \ldots,\ \varphi_i(t),\ \ldots\big).$$

Оператор $\Lambda\colon \ell_2 \to \ell_2$, який фігурує у лівій частині операторного рівняння (13), має вигляд $\Lambda = I - A$, де $I\colon \ell_2 \to \ell_2$ — одиничний, $A\colon \ell_2 \to \ell_2$ — цілком неперервний оператори. Отже, згідно з класифікацією С. Г. Крейна оператор $\Lambda\colon \ell_2 \to \ell_2$ є фредгольмовим оператором $(\dim\ker\Lambda = \dim\ker\Lambda^* < \infty)$, а оператор $U\colon \ell_2 \to \ell_2 \times \mathbb{R}^p$ — нетеровим $(\dim\ker U < \infty,\ \dim\ker U^* < \infty)$.

Таким чином, для рівняння (13) справедлива така теорема [18].

Теорема 1. *Однорідне рівняння* (13) $(q = 0)$ *має* d_2*-параметричну сім'ю розв'язків* $z \in \ell_2$

$$z = P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c_{d_2} \quad \forall c_{d_2} \in \mathbb{R}^{d_2}.$$

Неоднорідне рівняння (13) *є розв'язним тоді і тільки тоді, коли виконуються* $r + d_1$ *лінійно незалежних умов*

$$P_{\Lambda_r^*} g = 0,$$

$$P_{Q_{d_1}^*}\big(\alpha - W\Lambda^+ g\big) = 0$$

і має d_2*-параметричну сім'ю розв'язків* $z \in \ell_2$ *вигляду*

$$z = P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c_{d_2} + P_{\Lambda_r} Q^+ (\alpha - W\Lambda^+ g) + \Lambda^+ g \quad \forall c_{d_2} \in \mathbb{R}^{d_2}.$$

Тут $Q = WP_{\Lambda_r}$, P_{Λ_r} $\left(P_{\Lambda_r^*}\right)$ — матриця, яка складається із повної системи r лінійно незалежних стовпчиків (рядків) матриці-проектора P_Λ (P_{Λ^*}), де P_Λ (P_{Λ^*}) — проектор на ядро (коядро) матриці Λ, $P_{Q_{d_2}}$ $\left(P_{Q_{d_1}^*}\right)$ — матриця, яка складається із повної системи d_2 (d_1) лінійно незалежних стовпчиків (рядків) матриці-проектора P_Q (P_{Q^*}), де P_Q (P_{Q^*}) — проектор на ядро (коядро) матриці Q, Λ^+ (Q^+) — псевдообернена (за Муром – Пенроузом) до Λ (Q) матриця.

Якщо рівняння (13) має розв'язок, то згідно з теоремою Ріса – Фішера існує елемент $x \in L_2[a,b]$ такий, що x_i, $i = \overline{1,\infty}$, які визначаються із системи (11), (12), є його коефіцієнтами Фур'є, тобто має місце зображення

$$x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \varphi_i(t) = \Phi(t) z. \tag{16}$$

Елемент $x(t)$, який визначається співвідношенням (16), і є шуканим розв'язком крайової задачі (8), (2), а отже, і вихідної задачі (1), (2).

Згідно з [16, 18], справедливий такий результат.

Теорема 2. *Однорідна крайова задача* (1), (2) $(f(t) = 0,\ \alpha = 0)$ *має розв'язок* $x \in L_2[a,b]$

$$x(t) = \Phi(t) P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c_{d_2} \quad \forall c_{d_2} \in \mathbb{R}^{d_2}.$$

Неоднорідна крайова задача (1), (2) *є розв'язною тоді і тільки тоді, коли виконується* r *лінійно незалежних умов*

$$P_{\Lambda_r^*} g = 0 \tag{17}$$

та d_1 *лінійно незалежних умов*

$$P_{Q_{d_1}^*}\big(\alpha - W\Lambda^+ g\big) = 0 \tag{18}$$

і має d_2*-параметричну сім'ю розв'язків* $x \in L_2[a,b]$*:*

$$x(t) = \Phi(t)\Big(P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c_{d_2} + P_{\Lambda_r} Q^+ \big(\alpha - W\Lambda^+ g\big) + \Lambda^+ g\Big) \quad \forall c_{d_2} \in \mathbb{R}^{d_2}. \tag{19}$$

4. Приклад. Проілюструємо наведені вище теоретичні викладки на конкретному прикладі. Розглянемо крайову задачу для інтегрального рівняння Вольтерра із слабкосингулярним ядром

$$x(t) = (t+1)(3 - 4\sqrt{t+1}) + \int\limits_{-1}^{t} \frac{x(s)ds}{\sqrt{t-s}}, \quad t \in [-1,1], \tag{20}$$

$$\int\limits_{-1}^{1} tx(t)\,dt = 2. \tag{21}$$

У цьому випадку $K(t,s) = \dfrac{1}{\sqrt{t-s}}$, тобто $\gamma = \dfrac{1}{2}$ і згідно з умовою (6) усі повторні ядра, починаючи з $K_2(t,s)$, будуть сумовними з квадратом. Отже, відповідно до зауваження із п. 2 ми можемо перейти від вивчення крайової задачі для інтегрального рівняння із необмеженим ядром (20), (21) до вивчення еквівалентної крайової задачі для інтегрального рівняння із сумовним із квадратом ядром $K_2(t,s)$, що завдяки співвідношенню (5) має вигляд [5, с. 58]

$$K_2(t,s) = \int\limits_{s}^{t} \frac{d\xi}{\sqrt{(t-\xi)(\xi-s)}} = \pi.$$

Справді, домноживши обидві частини рівняння (20) зліва на $K(t,s)$, проінтегрувавши ліву та праву частини отриманої рівності на відрізку $[-1,1]$ та додавши почленно отримане рівняння з рівнянням (20), матимемо

$$x(t) = \frac{3}{2}\,(t+1)(2-\pi-\pi t) + \pi\int\limits_{-1}^{t} x(s)\,ds, \quad t \in [-1,1], \tag{22}$$

$$\int\limits_{-1}^{1} tx(t)\,dt = 2. \tag{23}$$

Задачу (22), (23) можна звести до зліченновимірної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Уведемо до розгляду функції $\varphi_i(t) = \sqrt{\dfrac{2i-1}{2}}P_{i-1}(t)$, де $P_i(t)$ — многочлени Лежандра. Система $\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ є повною ортонормальною системою функцій в $L_2[-1,1]$. Обчислимо величини a_{ij}, f_i. Згідно з (9), (10), використавши властивості многочленів Лежандра [19, с. 142], отримаємо

$$a_{ij} = \pi\int\limits_{-1}^{1} \varphi_i(t)\int\limits_{-1}^{t} \varphi_j(s)\,ds\,dt$$

$$= \frac{\pi}{2}\,\sqrt{(2i-1)(2j-1)}\int\limits_{-1}^{1} P_{i-1}(t)\int\limits_{-1}^{t} P_{j-1}(s)\,ds\,dt =$$

$$= \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2i-1}{2j-1}}\int\limits_{-1}^{1} P_{i-1}(t)\left(P_j(t)-P_{j-2}(t)\right)\,dt =$$

$$= \begin{cases} \pi, & i=j=1, \\ \dfrac{\pi}{\sqrt{(2i+1)(2i-1)}}, & j=i-1, \\ -\dfrac{\pi}{\sqrt{(2i+1)(2i-1)}}, & j=i+1, \\ 0, & i=j>1,\ j=i\pm k,\ k>1, \end{cases}$$

$$f_i = \frac{3}{2}\int\limits_{-1}^{1}(t+1)(2-\pi-\pi t)\varphi_i(t)\,dt =$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{\frac{2i-1}{2}}\int\limits_{-1}^{1}(t+1)(2-\pi-\pi t)P_{i-1}(t)dt$$

$$= \begin{cases} \sqrt{2}(3-2\pi), & i=1, \\ \sqrt{6}(1-\pi), & i=2, \\ -\dfrac{\sqrt{10}}{5}\pi, & i=3, \\ 0, & i>3. \end{cases}$$

Операторне рівняння (13) з урахуванням позначень (14), (15) набуде вигляду

$$Uz = \begin{bmatrix}\Lambda \\ W\end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} g \\ \alpha \end{bmatrix} = q,$$

де

$$z = \operatorname{col}\left(x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_i, \quad \ldots\right), \qquad x_i = \sqrt{\frac{2i-1}{2}}\int\limits_{-1}^{1} x(t)P_{i-1}(t)dt,$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1-\pi & \dfrac{\pi}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ -\dfrac{\pi}{\sqrt{3}} & 1 & \dfrac{\pi}{\sqrt{15}} & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & -\dfrac{\pi}{\sqrt{15}} & 1 & \dfrac{\pi}{\sqrt{35}} & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & -\dfrac{\pi}{\sqrt{35}} & 1 & \dfrac{\pi}{\sqrt{63}} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}, \qquad g = -\frac{\sqrt{10}}{5}\begin{pmatrix} \sqrt{5}(2\pi-3) \\ \sqrt{15}(\pi-1) \\ \pi \\ 0 \\ \ldots \end{pmatrix},$$

$$W = \left(0, \quad \frac{\sqrt{6}}{3}, \quad 0, \quad \ldots, \quad 0, \quad \ldots\right), \qquad \alpha = 2.$$

Рівняння (22) є рівнянням з виродженим ядром із поліноміальною правою частиною. Отже [3 – 6], його розв'язок є поліномом степеня не вище 2 і ми можемо при побудові операторного рівняння (13) обмежитися функціями $\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^3$. У цьому випадку

$$\det\Lambda = \frac{1}{15}\left(15 - 15\pi + 6\pi^2 - \pi^3\right) = \beta \approx -0{,}26$$

і тридіагональна матриця Λ є невиродженою, тому

$$\Lambda^+ = \Lambda^{-1} = \frac{1}{15\beta}\begin{pmatrix} 15+\pi^2 & -5\sqrt{3}\pi & \sqrt{5}\pi^2 \\ 5\sqrt{3}\pi & 15(1-\pi) & \sqrt{15}\left(\pi^2-\pi\right) \\ \sqrt{5}\pi^2 & -\sqrt{15}\left(\pi^2-\pi\right) & 5\left(3-3\pi+\pi^2\right) \end{pmatrix}$$

і

$$P_\Lambda = P_{\Lambda^*} = O_{3\times 3}, \quad Q = O_{1\times 3}, \quad Q^+ = O_{3\times 1}, \quad P_{Q_{d_2}} = I_3, \quad P_{Q_{d_1}^*} = 1, \quad d_1 = 1, \quad d_2 = 3,$$

де $O_{3\times3}$, $O_{1\times3}$ та $O_{3\times1}$ — нульові матриці розміру 3×3, 1×3 та 3×1 відповідно, I_3 — одинична матриця розміру 3.

Перевіримо виконання наведених у теоремі 2 умов розв'язності крайової задачі (20), (21). Умова (17), очевидно, виконується завдяки $P_{\Lambda^*} = 0$. Перевіримо виконання умови (18):

$$P_{Q_{d_1}^*}\left(\alpha - W\Lambda^+ g\right) = 2 + \frac{2}{15\beta}\left(5\pi(2\pi-3) + 15(1-\pi)(\pi-1) + \left(\pi^2-\pi\right)\pi\right) =$$

$$= 2 + \frac{2}{15\beta}\left(\pi^3 - 6\pi^2 + 15\pi - 15\right) = 0.$$

Умова (18) також виконується і згідно з теоремою 2 крайова задача (20), (21) має єдиний розв'язок $x \in L_2[-1,1]$, який у нашому випадку має вигляд

$$x(t) = \Phi(t)\Lambda^{-1}g = \frac{\sqrt{10}}{300\beta}\left(2\sqrt{2},\ 2\sqrt{6}t,\ \sqrt{10}(3t^2-1)\right)\begin{pmatrix} 45\sqrt{5}\beta \\ 15\sqrt{15}\beta \\ 0 \end{pmatrix} = 3(t+1). \qquad (24)$$

Отже, ми встановили, що нетерова крайова задача для інтегрального рівняння із необмеженим ядром (20), (21) є однозначно розв'язною та побудували її розв'язок (24).

Література

1. *Auer P. L., Gardner C. S.* Note on singular integral equations of the Kirkwood – Riseman type // J. Chem. Phys. – 1955. – **23**. – P. 1545 – 1546.
2. *Constanda C., Potapenko S.* Integral methods in science and engineering: techniques and applications. – Boston: Birkhäuser, 2008. – 298 p.
3. *Гурса Э.* Курс математического анализа. – М.: ГТТИ, 1934. – т. III, ч. 2. – 318 с.
4. *Михлин С. Г.* Лекции по линейным интегральным уравнениям. – М.: ГИФМЛ, 1959. – 234 с.
5. *Трикоми Ф.* Интегральные уравнения. – М.: Изд-во иностр. лит., 1960. – 300 с.
6. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. – М.: Наука, 1974. – т. IV, ч. 1. – 336 с.

7. *Vainikko G., Pedas A.* The properties of solutions of weakly singular integral equations // ANZIAM J. – 1981. – **22**. – P. 419 – 430.
8. *Graham I. G.* Galerkin methods for second kind integral equations with singularities // Math. Comp. – 1982. – **39**, № 160. – P. 519 – 533.
9. *Huang C., Tang T., Zhang Z.* Supergeometric convergence of spectral collocation methods for weakly singular Volterra and Fredholm integral equations with smooth solutions // J. Comput. Math. – 2011. – **29**, № 6. – P. 698 – 719.
10. *Richter G. R.* On weakly singular fredholm integral equations with displacement Kernels // J. Math. Anal. Appl. – 1976. – **55**, № 1. – P. 32 – 42.
11. *Galperin E. A., Kansa E. J., Makroglou A., Nelson S. A.* Variable transformations in the numerical solution of second kind Volterra integral equations with continuous and weakly singular kernels; extensions to Fredholm integral equations // J. Comput. Appl. Math. – 2000. – **115**, № 1-2. – P. 193 – 211.
12. *Cao Y., Huang M., Liu L., Xu Y.* Hybrid collocation methods for Fredholm integral equations with weakly singular kernels // Appl. Numer. Math. – 2007. – **57**, № 5-7. – P. 549 – 561.
13. *Amosov A., Ahues M., Largillier A.* Superconvergence of some projection approximations for weakly singular integral equations using general grids // SIAM J. Numer. Anal. – 2009. – **47**, № 1. – P. 646 – 674.
14. *Gonzalez O., Li J.* A convergence theorem for a class of Nystrom methods for weakly singular integral equations on surfaces in $\mathbb{R}^3$ // Math. Comp. – 2015. – **84**, № 292. – P. 675 – 714.
15. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. 3-е изд. – М.: Наука, 1968. – 513 с.
16. *Козлова Н. О., Ферук В. А.* Нетерові крайові задачі для інтегральних рівнянь // Нелін. коливання. – 2016. – **19**, № 1. – С. 58 – 66; ***English translation:*** J. Math. Sci. – 2017. – **222**, № 3. – P. 266 – 275.
17. *Бойчук О. А., Козлова Н. О., Ферук В. А.* Слабкозбурені інтегральні рівняння // Нелін. коливання. – 2016. – **19**, № 2. – С. 151 – 160; ***English translation:*** J. Math. Sci. – 2017. – **223**, № 3. – P. 199 – 209.
18. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. – Berlin; Boston: de Gruyter, 2004. – 317 p.; 2nd ed., 2016. – 314 p.
19. *Смайт В.* Электростатика и электродинамика. – М.: Изд-во иностр. лит., 1954. – 604 с.

Одержано 17.09.2018