УДК 517.9

СОЦІУМ, МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ КОНФЛІКТУ

Т. В. Каратаєва

Ін-т математики НАН України
вул. Терещенківська, 3, Київ, 01004, Україна
e-mail: karat@imath.kiev.ua

В. Д. Кошманенко

Ін-т математики НАН України
вул. Терещенківська, 3, Київ, 01004, Україна;
Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова
вул. Пирогова, 9, Київ, 01030, Україна
e-mail: koshman63@gmail.com

A mathematical model of society is constructed in the form of a multi-component dynamical system generated by the conflict interaction between individuals. The individual behavior depends on the initial value of the social energy and two strategic parameters: the activity of conflict interaction and connections with a local environment. We prove the theorem on a complete victory of the strongest individual for a class of models of society where the possibility of strategic choice is absent. In such a case, the principle "winner takes all" is realized. For another class of models where one can change the strategic parameter of conflict activity, we find the sufficient conditions providing social energy growth from any small initial value. In particular, we show the existence of a survival strategy and even a winner strategy for each individual. Examples of computer simulations are given.

Побудовано та досліджено математичну модель соціуму у вигляді багатокомпонентної динамічної системи, генератор якої відповідає конфліктній взаємодії між індивідами. Поведінка індивідів залежить від величини початкової соціальної енергії та двох стратегічних параметрів — активності конфліктної взаємодії та зв'язків із локальним оточенням. Для класу моделей соціуму, в яких можливість вибору стратегій відсутня, доведено теорему про повну перемогу найсильнішого. У цьому випадку виконується принцип "переможець отримує все". Для класу моделей, у якому стратегічний параметр активності конфліктної взаємодії можна регулювати, знайдено достатні умови для зростання соціальної енергії з довільно низького початкового рівня. Зокрема показано, що існує стратегія виживання і навіть перемоги для кожного індивіда. Наведено приклади з комп'ютерними симуляціями.

1. Вступ. Побудова, дослідження та аналіз математичних моделей, які описують динаміку змагальних і конфліктних процесів у суспільстві, а також знаходження умов компромісу, об'єднання чи консенсусу, є основними напрямками сучасної прикладної науки. Наведемо лише декілька посилань (див. [1 – 13]) з великої кількості публікацій на цю тему.

Звичайно, поведінка індивіда в суспільстві значною мірою визначається прийняттям рішення (часто стихійним) щодо вибору оптимальної стратегії. При цьому використовується певна модель соціальної системи. У більшості випадків така модель є інтуїтивною. Зрозуміло, що успішний результат може забезпечити лише адекватна математична модель на основі наукового передбачення. Тому математичне моделювання є потужним інструментом для прогнозу соціальних подій та розв'язання перспективних проблем сучасного суспільства.

Математичні моделі соціальних явищ можна поділити на два класи: детерміністичні та ймовірнісні. Моделі першого типу дають передбачення про кількісне значення певних характеристик стану системи у фіксований момент часу. Другий тип моделей дає імовірнісну оцінку різних станів системи.

Більшість відомих моделей належить до першого класу і ґрунтуються на явних, часом досить складних, формулах динаміки, які призначені дати конкретний опис явищу, що досліджується (див., наприклад, [8 – 11]). Але деталізація конкретних моделей звужує можливість їх використання при змінених умовах. Тому виникає потреба у побудові загальних моделей із імовірнісною інтерпретацією.

Вибір формул і рівнянь (законів), які описують динаміку конфліктних взаємодій між індивідами, є головним пунктом при побудові моделей складних систем суспільства. Ці формули мають бути максимально простими, універсальними та одночасно адекватними реальній ситуації. Лише тоді їх використання, з одного боку, буде підтверджувати спостереження, а з другого, передбачати нові, навіть несподівані явища та ефекти.

У даній роботі ми будуємо елементарно просту математичну модель соціуму як багатокомпонентної динамічної системи на основі теорії динамічних систем конфлікту, розвинутої в роботах [7, 14 – 19]. Ця модель описує еволюцію імовірності для кожного індивіда мати певний запас соціальної енергії у конфліктному середовищі.

Ми розглядаємо декілька варіантів формули конфліктної взаємодії. У першу чергу ми досліджуємо грубий (дикий) стихійний конфлікт між окремим індивідом та суспільним конкурентним оточенням. Більш досконалий варіант моделі включає в себе стратегічні параметри сили конфліктної взаємодії та зв'язки з іншими індивідами. При цьому модель настільки ускладнюється, що виявлені ефекти неможливо охопити в одній роботі.

Тому ми обмежуємося лише деякими випадками. А саме, спочатку досліджуємо динаміку перерозподілу соціальної енергії між конфліктуючими індивідами без уведення параметрів взаємодії та зв'язків (модель стихійного соціуму). В цьому варіанті моделі, як правило, виникає єдиний переможець: той, хто був найсильнішим у початковий момент часу. Ми помічаємо, що на зростання (чи втрату) соціальної енергії впливає величина (сила) конфліктної активності індивіда. Зокрема, якщо цей параметр має нульове значення, то індивід взагалі не втрачає своєї енергії, а лише накопичує її. Параметр сили конфліктної активності є стратегічним. Можливість його вибору перетворює модель стихійного соціуму в модель керованого конфліктного процесу. Показано, що в цьому випадку індивід із незначною початковою соціальною енергією може стати переможцем, якщо обере "правильну" стратегію регулювання параметру сили конфліктної активності.

Отже, в роботі проведено аналіз поведінки переможця і на конкретних прикладах продемонстровано розв'язок проблеми вибору стратегії виживання для окремого індивіда. Доведено теорему існування рівноважних нерухомих станів, досліджено умови їх стійкості. Як наслідок, знайдено умови виживання для індивіда з довільно малою початковою соціальною енергією. Показано, що математичні питання для моделі навіть лише з трьома індивідами є нетривіальними.

2. Елементарна модель соціуму. Нехай $\mathcal{A} = \{a_i\}_{i=1}^m$, $1 < m < \infty$, позначає деяку множину подібних елементів, які відповідають конкуруючим індивідам абстрактного суспільства. Далі множину $\mathcal{A}$ називаємо соціумом, а елементи a_i індивідами; m — кількість елементів. Вона скінченна, але може бути як завгодно великою. Можна вважати, що a_i відповідає не лише окремому індивіду в суспільстві, але й деякому об'єднанню (соціальному кластеру індивідів).

Припускаємо, що соціум $\mathcal{A}$ є конфліктним у тому сенсі, що між його індивідами відбувається конкурентна взаємодія, в ході якої кожен індивід прагне зберегти та збільшити свій запас соціальної енергії за рахунок інших. Варто пояснити це більш детально.

Вважаємо, що в найпростішому випадку, який тільки й розглядається у даній роботі, кожному індивіду a_i в початковий момент поставлено у відповідність деякий соціальний (життєвий) ресурс $P_i > 0$.

Отже, в елементарній моделі соціуму з кожним індивідом a_i асоційовано залежну від часу одновимірну числову величину P_i — характеристику соціальної енергії індивіда або його статусу в соціальному оточені:

$$a_i \sim P_i(t).$$

Значення P_i є додатними та обмеженими. Далі досліджується перерозподіл соціальної енергії в моменти конфліктної взаємодії. Припускаємо, що повний запас соціальної енергії всієї системи не змінюється в часі, тобто є фіксованим: $\sum_{i=1}^{m} P_i(t) = P = \mathrm{const}$.

Нехай у кожен момент дискретного часу $t = 1, 2, \ldots,$ між індивідами a_i відбувається акт конфліктної боротьби, внаслідок якої індивідуальна соціальна енергія P_i змінюється (перерозподіляється) за певним законом. Якщо позначити через $\circledast$ фіксований закон цього перерозподілу, то виникає складна багатокомпонентна динамічна система

$$\big\{P_i(0)\big\} \xrightarrow{\circledast,t} \big\{P_i(t)\big\}, \quad t > 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

У наступних розділах ми конкретизуємо відображення $\circledast$ і детально досліджуємо поведінку $P_i(t)$, зокрема, і в залежності від специфіки індивідуальної стратегії конфліктної боротьби. А саме, ми розглядаємо такі ситуації: 1) грубий конфлікт кожного з усіма, 2) ефекти, що залежать від вибору величини (сили) конфліктної активності.

Підкреслимо, що ми розвиваємо ймовірнісний підхід і тому замість кількісних величин P_i використовуємо значення соціальної енергії, нормовані на одиницю: $p_i = P_i/P$. Рівняння динаміки виписуємо в термінах стохастичних векторів $\mathbf{p}(t) = \{p_i(t)\}_{i=1}^{m}$, тому для всіх $t \geq 0$ виконується умова $\sum_{i=1}^{m} p_i(t) = 1$.

Говоримо, що соціум $\mathcal{A}$ є *цілком конфліктним*, якщо для кожного індивіда a_i його конкуруюче оточення складається з множини всіх інших індивідів $\mathcal{A}_i^{\perp} := \{a_k\}_{k \neq i}$. Тоді виконується принцип: один проти всіх або кожен сам за себе. В такому випадку соціальна енергія оточення для a_i є сумою енергій усіх індивідів з $\mathcal{A}_i^{\perp}$. Позначимо її $R_i = \sum_{k \neq i} P_k$. Набору величин R_i відповідає стохастичний вектор $\mathbf{r} = \{r_i\}_{i=1}^{m}$ з координатами $r_i := R_i/R$, де $R = \sum_{i=1}^{m} R_i$. Очевидно, $r_i \geq 0$ та $\sum_{i=1}^{m} r_i = 1$.

Введемо закон конфліктної взаємодії між окремим індивідом a_i та оточенням $\mathcal{A}_i^{\perp}$ у цілком конфліктному соціумі. З цією метою зафіксуємо довільний стохастичний вектор $\mathbf{p} \in \mathbf{\Delta}^{m-1}$, де $\mathbf{\Delta}^{m-1}$ позначає $(m-1)$-мірний симплекс в $\mathbb{R}_+^m$. Вектор $\mathbf{p}$ задає стартовий $(t = 0)$ розподіл нормованої на одиницю соціальної енергії між m індивідами соціуму. Найпростіший варіант закону конфліктного перерозподілу соціальної енергії (закон конфліктної взаємодії) в термінах координат має вигляд (див. [7 – 14]):

$$p_i^1 = \frac{p_i(1 - r_i)}{z}, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{1}$$

де $r_i := (1-p_i)/(m-1)$, а $z = 1-\sum_{k=1}^{m} p_k r_k$ — нормувальний знаменник. Тут p_i^1 позначає координати нового стохастичного вектора $\mathbf{p}^1 \in \mathbf{\Delta}^{m-1}$, який задає розподіл соціальної енергії між індивідами a_i після першого акту конфліктної взаємодії в системі.

Ітерація в дискретному часі закону конфліктної взаємодії (1):

$$p_i^{t+1} = \frac{p_i^t(1-r_i^t)}{z^t}, \qquad r_i^t = \frac{1-p_i^t}{m-1}, \qquad p_i^{t=0} \equiv p_i, \quad t = 0, 1, \ldots \tag{2}$$

породжує деяку траєкторію в термінах стохастичних векторів

$$\mathbf{\Delta}^{m-1} \ni \mathbf{p}^t \xrightarrow{*,t} \mathbf{p}^{t+1} \in \mathbf{\Delta}^{m-1}. \tag{3}$$

Зрозуміло, що задане формулами (2) перетворення $*$ в (3) залишає симплекс $\mathbf{\Delta}^{m-1}$ інваріантним. Динамічну систему в $\mathbf{\Delta}^{m-1}$, породжену цим перетворенням, назвемо динамічною системою конфлікту.

Складніший закон взаємодії у соціумі має вигляд

$$p_i^{t+1} = \frac{p_i^t - c_i\left(\sum_{k=1}^{m} s_{ik} p_k^t\right) r_i^t}{z^t}, \qquad r_i^t = \frac{1-p_i^t}{m-1}, \quad t = 0, 1, \ldots, \tag{4}$$

і включає в себе параметри c_i сили конфліктної взаємодії та матрицю стратегічних зв'язків між індивідами $S = \{s_{ik}\}$. У даній роботі ми обмежуємося лише випадком одиничної матриці, $S = I$.

3. Існування рівноважного граничного стану . У цьому пункті показано, що в динамічної системи з найпростішою формулою конфліктної взаємодії, яка моделює еволюцію цілком конфліктного соціуму, існує рівноважний граничний стан (fixed point) при $t \to \infty$. Цьому стану відповідає індивід (єдиний переможець), який мав найбільший соціальний статус в початковий момент часу, всі інші індивіди втрачають повністю свою соціальну енергію (гинуть). Це типова ситуація, притаманна соціальним моделям, в яких панує принцип "кожен проти всіх, або сам за себе" і справджується відомий ефект "переможець забирає все". Тим більше, у примітивному (дикому) соціумі індивід з найбільшою початковою соціальної енергією (найвищим статусом) неминуче збільшує свій потенціал, знищуючи своїх опонентів у конкурентній боротьбі. Стихійна еволюція такої системи наближається до нерухомої граничної точки, яка є стійкою. Цей математичний результат має соціальну інтерпретацію про існування диктатора в закритому суспільстві.

Для встановлення описаного результату в математичній формі перепишемо першу формулу в (2), використовуючи $r_i^t = (1-p_i^t)/(m-1)$, у вигляді

$$p_i^{t+1} = p_i^t\left(1-\delta_i^t\right), \qquad \delta_i^t := \frac{L^t - p_i^t}{m-2+L^t}, \quad t = 0, 1, \ldots, \tag{5}$$

де

$$L^t := \sum_k \left(p_k^t\right)^2 \equiv \|\mathbf{p}^t\|^2.$$

Або інакше

$$p_i^{t+1} = p_i^t k_i^t, \qquad k_i^t = \frac{m-2+p_i^t}{m-2+L^t}, \quad t = 0, 1, \ldots. \tag{6}$$

Рівняння (6), (5) можна також подати у вигляді

$$p_i^{t+1} = k_i^t p_i^t = \prod_{\tau=0}^{t} k_i^\tau p_i = \prod_{\tau=0}^{t} (1-\delta_i^\tau)\, p_i.$$

Подальші твердження легко випливають із наведених формул.

Якщо у вектора $\mathbf{p} \in \mathbf{\Delta}^{m-1}$, $m > 1$, якась пара координат має однакові значення, $p_i = p_k$, то ця властивість не змінюється з часом, тобто зберігається рівність координат, $p_i^t = p_k^t$, $t = 1, 2, \ldots$. Якщо ж для якоїсь пари координат виконується нерівність $p_i < p_k$, $i \neq k$, то така ж нерівність виконується й для всіх $t \geq 1$.

Твердження 1. *Справедливі нерівності*

$$p_i^t \leq p_k^t \Longrightarrow p_i^{t+1} \leq p_k^{t+1}, \quad t = 0, 1, \ldots,$$

де $p_i^0 \equiv p_i, p_k^0 \equiv p_k$.

Як наслідок, можна стверджувати, що конфліктна взаємодія в соціумі, задана законом (1), не змінює упорядкованість індивідів a_i, визначену початковими рівнями їхніх соціальних статусів:

$$0 \leq p_{i_1} \leq p_{i_2} \leq \ldots p_{i_m} \leq 1 \Longrightarrow 0 \leq p_{i_1}^t \leq p_{i_2}^t \leq \ldots p_{i_m}^t \leq 1, \quad t = 1, 2, \ldots. \tag{7}$$

Безпосередньо з (5) видно, що знак величини $L^t - p_i^t$ визначає зростання чи спадання значення координати p_i^t на $t+1$ кроці конфліктної взаємодії.

Отже, динаміка змін координати p_i^t залежить від знака різниці $L^t - p_i^t$.

Твердження 2. *Якщо* $L^t - p_i^t < 0$, *то* p_i^t *зростає:*

$$p_i^t > L^t \Longrightarrow p_i^{t+1} > p_i^t, \tag{8}$$

а якщо $L^t - p_i^t > 0$, *то* p_i^t *спадає:*

$$p_i^t < L^t \Longrightarrow p_i^{t+1} < p_i^t. \tag{9}$$

Тобто в кожний момент часу квадрат норми $\|p^t\|^2 =: L^t$ вектора p^t є порогом, який поділяє соціум $\mathcal{A}$ на три класи індивідів. Для індивідів $a_{i'}$, значення статусу яких $p_{i'}^t$ нижче порога L^t, рівень статусу зменшується в результаті конфліктної взаємодії. Для індивідів $a_{i''}$, значення статусу яких $p_{i''}^t$ вище порога L^t, статус збільшується. Якщо для якихось a_j їхній статус точно дорівнює порогу, $p_j^t = L^t$, то такий статус, очевидно, не зміниться $p_j^{t+1} = p_j^t$, але лише на один акт конфліктної взаємодії. Неважко довести, що квадрат норми вектора p^t, тобто поріг L^t, монотонно зростає, і вже на наступному кроці виникне нерівність $p_j^{t+1} < L^{t+1}$. Отже, рівність $p_j^t = L^t$ нестійка, змінюється на нерівність $p_j^{t+1} < L^{t+1}$ і починає спадати з наступного кроку: $p_j^{t+2} < p_j^{t+1}$.

Виходячи з цього аналізу, природно розкласти соціум $\mathcal{A}$ в кожен момент часу t на три підмножини,

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_-^t \bigcup \mathcal{A}_0^t \bigcup \mathcal{A}_+^t,$$

$$\mathcal{A}_-^t := \left\{a_i \mid p_i^t < L^t\right\}, \quad \mathcal{A}_0^t := \left\{a_i \mid p_i^t = L^t\right\}, \quad \mathcal{A}_+^t := \left\{a_i \mid p_i^t > L^t\right\}, \quad L^t \equiv \left\|p^t\right\|^2. \tag{10}$$

Варто відзначити, що за виключенням випадку $\{p_i = 1/m,\ i = 1, \ldots, m\}$, коли $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0$, підмножини $\mathcal{A}_-^t$, $\mathcal{A}_+^t$, $t > 1$, завжди є не порожніми, а множина $\mathcal{A}_0^t$ може бути не порожньою лише епізодично (не більше $m-1$ разів).

Твердження 3. *Послідовність* $L^t := \left\|\mathbf{p}^t\right\|^2, \ t = 0, 1, \ldots,$ *монотонно зростає і збігається до обмеженої границі:*

$$0 < L^\infty := \lim_{t\to\infty} L^t = b \leq 1. \tag{11}$$

Доведення. Зрозуміло, що $0 < L^t \leq 1, \ t \geq 0,$ оскільки вектори $\mathbf{p}^t$ є стохастичними. Для доведення твердження достатньо показати, що

$$L^{t+1} - L^t > 0, \quad t \geq 1.$$

Скористаємося розкладом соціуму на три множини згідно з (10). Далі множину $\mathcal{A}_0^t$, не зменшуючи загальності, вважаємо порожньою, тому що вона виникає лише епізодично і не впливає на суть доведення. За означенням, якщо $a_{i'} \in \mathcal{A}_-^t$, то $p_{i'}^t - L^t < 0$, і тому завдяки (9) $d_{i'}^t := p_{i'}^{t+1} - p_{i'}^t < 0$. А для $a_{i''} \in \mathcal{A}_+^t$, навпаки, $p_{i''}^t - L^t > 0$ і завдяки (8) $d_{i''}^t := p_{i''}^{t+1} - p_{i''}^t > 0$. Але завдяки стохастичності векторів p^t

$$\sum_{i'} d_{i'}^t + \sum_{i''} d_{i''}^t = 0. \tag{12}$$

Тому маємо

$$L^{t+1} - L^t = \left\|p^{t+1}\right\|^2 - \left\|p^t\right\|^2 = 2\sum_{i'} p_{i'}^t d_{i'}^t + 2\sum_{i''} p_{i''}^t d_{i''}^t + \sum_{i'} \left(d_{i'}^t\right)^2 + \sum_{i''} \left(d_{i''}^t\right)^2.$$

Оскільки $d_{i'}^t < 0$ та $p_{i'}^t < L^t$, а $p_{i''}^t > L^t$, то

$$L^{t+1} - L^t > 2L^t\left(\sum_{i'} d_{i'}^t + \sum_{i''} d_{i''}^t\right) + \sum_{i'} \left(d_{i'}^t\right)^2 + \sum_{i''} \left(d_{i''}^t\right)^2.$$

Нарешті, завдяки (12) одержуємо

$$L^{t+1} - L^t > \sum_{i'} \left(d_{i'}^t\right)^2 + \sum_{i''} \left(d_{i''}^t\right)^2 > 0.$$

Отже, L^t є зростаючою обмеженою послідовністю, тому виконується (11).

Сформулюємо основний результат пункту.

Теорема 1. *Припустимо, що в початковий момент максимального значення* p_{i_m} *(див. (7)) досягає лише одна координата стохастичного вектора* $\mathbf{p} \in \mathbb{R}_+^m$*:*

$$p_{i_l} < p_{i_m} \quad \forall i_l \neq i_m.$$

Тоді

$$p_{i_m}^\infty := \lim_{t\to\infty} p_{i_m}^t = 1,$$

а

$$\lim_{t\to\infty} p_{i_l}^t = 0 \quad \forall i_l \neq i_m.$$

Доведення. Очевидно, що

$$p^t_{i_1} = \min_i \{p^t_i\} \leq \|p^t\|^2 = L^t \leq \max_i \{p^t_i\} = p^t_{i_m}.$$

Тому з тверджень 2 та 3 випливає, що послідовність $p^t_{i_m}$ зростає при $t \to \infty$. Оскільки вона обмежена, то існує границя $p^\infty_{i_m} = \lim_{t\to\infty} p^t_{i_m} = a \leq 1$. Для цієї границі виконується оцінка

$$0 < a = p^\infty_{i_m} \leq 1.$$

Доведемо, що $a = 1$. З цією метою спочатку покажемо, що $a = b$, де $b = L^\infty = \lim_{t\to\infty} L^t$. Дійсно, з існування границь $p^\infty_{i_m}$ та L^∞ випливає, що

$$a = p^\infty_{i_m} = p^\infty_{i_m} k^\infty, \qquad k^\infty = \frac{m-2+p^\infty_{i_m}}{m-2+L^\infty}. \tag{13}$$

Оскільки, очевидно, $k^\infty = 1$, то з необхідністю $a = b$. Легко зрозуміти, що числа a, b насправді дорівнюють одиниці. Для цього проведемо аналіз поведінки передостанньої координати $p^t_{i_{m-1}}$. Завдяки (7) та твердженню 1 нерівність $p^t_{i_{m-1}} < p^t_{i_m}$ виконується для всіх t. Зокрема, завжди $p^t_{i_{m-1}} < a$. Більш за те, відношення $p^t_{i_m}/p^t_{i_{m-1}}$ є більшим за одиницю і, як легко з'ясувати, з використанням (6) необмежено зростає (прямує до нескінченності), а отже, $\lim p^t_{i_{m-1}} = 0$. Дійсно, якщо припустити інше, тобто, що $\lim p^t_{i_{m-1}} = a' > 0$, то має виконуватися рівність $L^\infty = b = a'$, що є суперечністю, тому що $b = a$. Аналогічно можна переконатися, що всі інші координати також прямують до нуля.

З цієї теореми одержуємо такий висновок: примітивна боротьба “кожен проти всіх” у конфліктному соціумі приводить до загибелі всіх індивідів окрім одного, найсильнішого, яким він був із самого початку (рис. 1).

Твердження 4. *Якщо* $p_i \neq p_k$ *для всіх* $i \neq k$, *то* $\lim_{t\to\infty} L^t = 1$. *Але якщо вектор* $\mathbf{p}$ *має* $l > 1$ *однакових максимальних координат, то*

$$\lim_{t\to\infty} L^t = 1/l.$$

Доведення. Справедливість твердження випливає з рівності (13), записаної для однієї з l максимальних координат

$$\frac{1}{l} = p^\infty_i = p^\infty_i k^\infty_i,$$

де $k^\infty_i = (m-2+p^\infty_i) \,/\, (m-2+L^\infty) = 1$. Звідси одержуємо рівність $L^\infty = 1/l$.

Позначимо

$$\Gamma_{\binom{m}{l}} := \left\{ \mathbf{p} \in \boldsymbol{\Delta}^{m-1} \colon\ \|\mathbf{p}\|^2 = \frac{1}{l},\ p_i = 0 \vee \frac{1}{l},\ i = 1, \ldots, m \right\}, \quad l \in \{1, \ldots, m\}.$$

З урахуванням теореми 1 та твердження 4 безпосередньою перевіркою переконуємося, що виконується таке твердження.

Твердження 5. *Множина векторів*

$$\Gamma_{\text{fixed}} = \bigcup_{l=1}^{m} \Gamma_{\binom{m}{l}}$$

вичерпує всі нерухомі точки динамічної системи конфлікту, заданої формулами (2). Множина стійких нерухомих точок складаються лише з $\Gamma_{\binom{m}{l}}$, *для яких* $l = 1$. *Усі вектори* $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m_+$ *з* $\Gamma_{\binom{m}{l}}$, $2 \leq l \leq m$, *зокрема вектори вигляду* $p = (0, \ldots, 0, 1/l, \ldots, 1/l)$, $l > 1$, *відповідають нестійким нерухомим станам системи.*

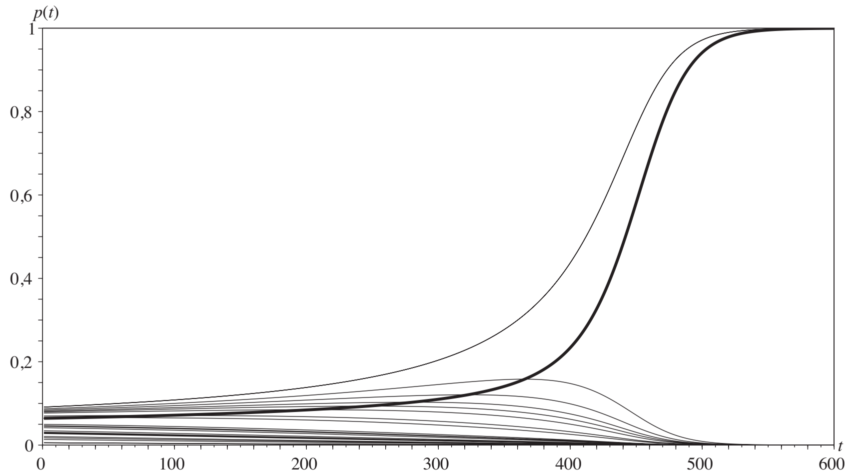

Рис. 1. Графіки еволюцій соціальних енергій згідно з формулою (4) для векторів $\mathbf{p} \in \mathbf{\Delta}^{m-1}$ з єдиною максимальною координатою. Напівжирна лінія описує поведінку норми $L^t = \left\|p^t\right\|^2$. Соціальні енергії всіх індивідів з $p_i \neq p_{\max}$ спадають до нуля, $p_i^t \to 0$. Соціальна енергія індивіда з максимальним початковим значенням $p_{\max}$ монотонно зростає до 1.

4. Роль параметра конфліктної активності. У цьому пункті досліджуємо вплив активності конфліктної взаємодії між елементами соціуму на динаміку перерозподілу соціальної енергії. Точніше, ми вводимо параметр $0 \leq c_i \leq 1$, який звемо коефіцієнтом конфліктної активності (або силою конфліктної взаємодії елемента a_i з оточенням $\mathcal{A} \setminus a_i$), і вивчаємо залежність динаміки перерозподілу від значення цього параметра. Цей параметр можна також інтерпретувати як спротив суспільства діяльності елемента a_i або ще як певного роду податок на зростання індивідуальної соціальної енергії p_i^t. Математично це означає, що формула конфліктної взаємодії (1) ускладнюється:

$$p_i^1 = \frac{p_i(1 - c_i r_i)}{z}, \quad 0 \leq c_i \leq 1, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{14}$$

Звичайно, якщо значення усіх c_i, $i = 1, \ldots, m$, покласти рівними 1, то ми повертаємося до формули (1).

У загальному випадку формула (14) після виключення r_i^t має вигляд

$$p_i^{t+1} = p_i^t \, \frac{m - 1 - c_i\left(1 - p_i^t\right)}{m - 1 - H_c^t} = p_i^t \, k_{i,c}^t, \quad t \geq 1, \tag{15}$$

де

$$k_{i,c}^t := \frac{m - 1 - c_i\left(1 - p_i^t\right)}{m - 1 - H_c^t} \tag{16}$$

та

$$H_c^t := \sum_{j=1}^{m} c_j p_j^t (1 - p_j^t). \tag{17}$$

Зауважимо, що значення величини $0 \leq H_c^t < 1$ має складнішу нелінійну залежність від p_i^t, ніж L^t (див. (5)).

Далі ми часто користуємося трохи іншим варіантом формули (15):

$$p_i^{t+1} = p_i^t \left(1 + \frac{H_c^t - c_i(1-p_i^t)}{m-1-H_c^t}\right) = p_i^t(1+\delta_{i,c}^t), \quad \delta_{i,c}^t := \frac{H_c^t - \kappa_i}{m-1-H_c^t} \tag{18}$$

де

$$\kappa_j^t := c_j(1-p_j^t).$$

Твердження 6. *Умова*

$$\kappa_i^t < H_c^t \tag{19}$$

є необхідною і достатньою для зростання p_i^t, тобто

$$\kappa_i^t < H_c^t \Longleftrightarrow p_i^t < p_i^{t+1}.$$

Доведення випливає прямо з (18), оскільки $m-1-H_c^t > 0$ завжди.

Твердження 7. *Нерівність $\kappa_i^t < \kappa_j^t,\ i \neq j$, еквівалентна зростанню відношення $\rho_{ij}^t := := p_i^t/p_j^t,\ i,j \in \overline{1,m}$:*

$$\kappa_i^t < \kappa_j^t \Longleftrightarrow \rho_{ij}^t < \rho_{ij}^{t+1}. \tag{20}$$

Доведення випливає з рівності

$$\rho_{ij}^{t+1} = \rho_{ij}^t \frac{m-1-\kappa_i^t}{m-1-\kappa_j^t},$$

яку одержуємо безпосередньо з (18).

Твердження 8. *Якщо для пари індексів $i \neq l$ виконуються умови: $c_i = c_l = c,\ p_i^t < p_l^t$, то*

$$\kappa_i^t > \kappa_l^t \Longrightarrow \kappa_i^{t+1} > \kappa_l^{t+1}, \quad t = 0,1,\ldots. \tag{21}$$

Доведення. При $c_i = c_l$ нерівності $p_i^t < p_l^t$ та $\kappa_i^t > \kappa_l^t,\ t = 0,1,\ldots,$ очевидно еквівалентні, оскільки $c\left(\kappa_i^t - \kappa_l^t\right) = c\left(\left(1-p_i^t\right) - \left(1-p_l^t\right)\right) = c\left(p_l^t - p_i^t\right) > 0$. Тому для доведення треба показати, що з $p_i^t < p_l^t$ випливає $p_i^{t+1} < p_l^{t+1}$. Нехай $t = 0$. Для довільного t міркування ті ж самі. Розглянемо різницю $p_l^1 - p_i^1$. Згідно з (15), очевидно, маємо

$$p_l^1 - p_i^1 = \frac{\left((p_l - p_i)(m-1-c) + c\left(p_l^2 - p_i^2\right)\right)}{m-1-H_c^t} > 0.$$

Тому з $\kappa_i > \kappa_l$ витікає $\kappa_i^1 > \kappa_l^1$.

Звичайно, якщо $c_i \neq c_l$, то з $p_i^t < p_l^t$ не одержуємо $p_i^{t+1} < p_l^{t+1}$, тобто (21) взагалі не справджується.

Наступне твердження є наслідком твердження 6.

Твердження 9. *Якщо нерівність*

$$\kappa_i^t < H_c^t \tag{22}$$

виконується для всіх t починаючи з деякого, то

$$p_i^\infty = \lim_{t\to\infty} p_i^t = a, \quad 0 < a \leq 1.$$

Зокрема, якщо умова (22) виконується лише для єдиного i, то $a = 1$, а всі

$$p_j^\infty = \lim_{t\to\infty} p_j^t = 0 \quad \forall j \neq i.$$

Позначимо

$$p_{\min} := \min_i \{p_i\}, \qquad p_{\max} := \max_i \{p_i\}.$$

Далі, не втрачаючи загальності, припускаємо, що в початковий момент часу всі координати вектора $\mathbf{p}$ не нульові, різні і впорядковані по зростанню. Тоді $p_{\min} = p_1,\ p_{\max} = p_m$ і можна записати

$$0 < p_1 < p_2 < \ldots < p_m < 1.$$

Наступні теореми визначають достатні умови для існування єдиного переможця в термінах параметрів сили конфліктної взаємодії.

Теорема 2. *Якщо* $c_1 = p_1/p_m$, *а* $c_i = 1$ *для всіх* $i \neq 1$, *то*

$$p_1^{\infty} = 1, \qquad p_i^{\infty} = 0, \quad i \neq 1.$$

Доведення. Оскільки в початковий момент

$$\kappa_m - \kappa_1 = 1 - p_m - c_1(1 - p_1) = 1 - p_m - \frac{p_1}{p_m}(1 - p_1) =$$

$$= \frac{p_m - p_1 - \big((p_m)^2 - (p_1)^2\big)}{p_m} = (p_m - p_1)(1 - p_m + p_i) > 0,$$

то

$$c_1(1 - p_{\min}) = \kappa_1 < \kappa_m = 1 - p_{\max}.$$

Ми стверджуємо, що аналогічна нерівність виконується для всіх t:

$$\kappa_1^t < \kappa_m^t \quad \forall t > 0.$$

Зокрема, для $t = 1$ ця нерівність установлюється з використанням твердження 7. Так, завдяки (20) маємо

$$\kappa_1 < \kappa_m \Longleftrightarrow c_1 = \frac{p_1}{p_m} < \frac{p_1^1}{p_m^1}.$$

Тому, якщо $p_1^1 < p_m^1$, то $\kappa_1^1 < \kappa_m^1$, оскільки знову

$$\kappa_m^1 \kappa_1^1 = 1 - p_m^1 - c_1(1 - p_1^1) > 1 - p_m^1 - \frac{p_1^1}{p_m^1}(1 - p_1^1) = \big(p_m^1 - p_1^1\big)\big(1 - p_m^1 + p_i^1\big) > 0.$$

У випадку $p_1^1 = p_m^1$ очевидно, що

$$\kappa_m^1 - \kappa_1^1 = 1 - p_m^1 - c_1(1 - p_m^1) = (1 - p_m^1)(1 - c_1) > 0,$$

тому що $c_1 < 1$. Нарешті, якщо $p_m^1 < p_1^1$ (зараз твердження 1 не діє), то також виконується співвідношення

$$\kappa_m^1 - \kappa_1^1 = 1 - p_m^1 - c_1(1 - p_1^1) > 1 - p_m^1 - c_1(1 - p_m^1) = (1 - p_m^1)(1 - c_1) > 0.$$

Отже, нерівність $\kappa_1^1 < \kappa_m^1$ доведено. Тепер з (20) випливає, що $R_{1m}^1 = p_1^1/p_m^1 < p_1^2/p_m^2 = R_{1m}^2$ і можна повторити проведені вище міркування для $t = 2$. За індукцією нерівність $\kappa_1^t = c_1(1 - p_1)^t < (1 - p_m)^t = \kappa_m^t$ виконується для всіх $t > 1$. Тому справедливість теореми є наслідком нерівностей

$$\kappa_1^t < \kappa_m^t < \kappa_i^t, \quad 1 < i < m, \quad t \geq 0,$$

де нерівності $\kappa_m^t < \kappa_i^t$ виконуються завдяки твердженню 8.

Якщо $c_1 = p_{\min}/p_{\max}$, то говоримо, що індивід a_1 обирає стратегію мінімальної конфліктної активності відносно елемента з максимальною стартовою енергією a_m.

Не важко помітити, що логіка доведення теореми 2 справедлива не лише для мінімального $p_{\min} = p_1$, а й для довільного $i < m$.

Отже, якщо стратегію мінімальної конфліктної активності обирає довільний елемент $a_i,\ i < m$, соціуму, то саме він захоплює всю енергію при $t \to \infty$.

Теорема 3. *Якщо в (15) лише для одного фіксованого* $1 \leq i < m$ *покласти* $c_i = p_i/p_{\max}$, *а всі інші* $c_j = 1,\ j \neq i$, *то*

$$p_i^\infty = 1, \qquad p_j^\infty = 0, \quad j \neq i.$$

Доведення випливає з нерівностей

$$\kappa_i^t < \kappa_m^t < \kappa_j^t, \quad i \neq j < m, \quad t \geq 0,$$

які встановлюються так само, як і в попередній теоремі при $i = 1$.

Розглянемо ситуацію, коли всі елементи $a_i,\ i \neq m$, соціуму обирають стратегію мінімальної конфліктної активності відносно максимального елемента. А саме, покладемо

$$c_i = \frac{p_i}{p_{\max}} \quad \forall i. \tag{23}$$

Теорема 4. *За умови (23) виконується співвідношення*

$$p_1^\infty \equiv p_{\min}^\infty = 1, \qquad p_i^\infty = 0, \quad i \neq 1.$$

Доведення теореми випливає знову з нерівностей

$$\kappa_1^t < \kappa_i^t < \kappa_{\rm m}^t, \quad 1 < i < m, \quad t \geq 0.$$

Для $t = 0$ очевидно, що $\kappa_i = c_i(1 - p_i) > \kappa_1 = c_1(1 - p_1)$, оскільки $p_i(1 - p_i) > p_1(1 - p_1)$, оскільки $p_1 < p_i$. Аналогічно з доведенням нерівності $\kappa_m > \kappa_1$ в теоремі 2, переконуємося, що $\kappa_m = (1 - p_m) > \kappa_i = c_i(1 - p_i),\ i < m$.

У свою чергу, для $t > 0$ нерівності $\kappa_i^t < \kappa_{\rm m}^t,\ 1 < i < m$, встановлюється так само, як і нерівність $\kappa_1^t < \kappa_{\rm m}^t$ у попередній теоремі. Нарешті, справедливість нерівностей $\kappa_1^t < \kappa_{\rm i}^t$ доведено в наступному твердженні.

Твердження 10. *За умови (23) виконується нерівність*

$$\kappa_1^t < \kappa_i^t, \quad 1 < i < m, \quad t > 1.$$

Доведення. Розглянемо різницю $\kappa_i^t - \kappa_1^t,\ t = 1$. За означенням

$$\kappa_i^1 - \kappa_1^1 = c_i\big(1 - p_i^1\big) - c_1\big(1 - p_1^1\big) = c_i\left(\sum_{l \neq 1,i} p_l^1 + p_1^1\right) - c_1\left(\sum_{l \neq 1,i} p_l^1 + p_i^1\right) =$$

$$= (c_i - c_1)\sum_{l \neq 1,i} p_l^1 + \frac{p_i p_1^1 - p_1 p_i^1}{p_m}.$$

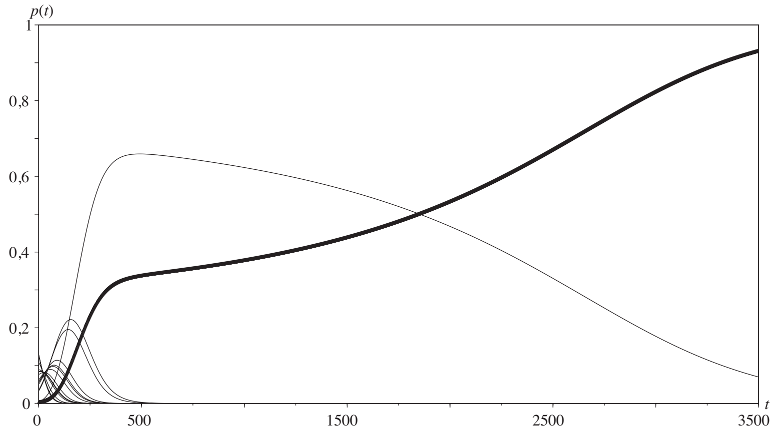

Рис. 2. Ефекти впливу параметра конфліктної активності на динаміку перерозподілу соціальної енергії. При $c_i = p_i/p_{\max},\ i = \overline{1,m}$, індивіду з мінімальною стартовою соціальною енергією відповідає стратегія з найменшим параметром конфліктної активності, $c_1 < c_i\ \forall i \neq 1$. Пріоритет цієї стратегії (напівжирна лінія) проявляється не одразу, в окремих випадках — після сотень актів конфліктної взаємодії.

Очевидно, перший доданок додатний, тому що $c_i = p_i/p_m > c_1 = p_1/p_m$. Покажемо, що другий доданок також додатний. Дійсно, з формули (18) маємо

$$\frac{p_i p_1^1 - p_1 p_i^1}{p_m} = \frac{p_i p_1\bigl(c_i(1-p_i) - c_1(1-p_1)\bigr)}{p_m(m-1-H_c)} = \frac{p_i p_1(\kappa_i - \kappa_1)}{p_m(m-1-H_c)} > 0,$$

оскільки вище доведено, що $\kappa_i > \kappa_1$. Зрозуміло, що аналогічні міркування можна повторити для кожного $t > 1$.

Результат теореми 4 ілюструє рис. 2 та, у випадку $m = 3$, рис. 5.

4.1. Уникнення конфлікту. Розглянемо випадок, коли деякий індивід a_q уникає повністю будь-якої конфліктної взаємодії з оточенням, яке складається з множини $\mathcal{A}_q^{\perp} := \mathcal{A}$. Це означає, що еволюція в часі соціальної енергії цього індивіда задається згідно з (14) формулою

$$p_q^{t+1} = \frac{p_q^t}{z^t}, \quad c_q = 0,$$

а еволюція соціальної енергії інших індивідів $a_k,\ k \neq q$, визначається формулою (15) з $0 < c_k \leq 1,\ k \neq q$. Такий випадок можна інтерпретувати, зокрема, як повне уникнення індивідом a_q оподаткування своїх прибутків.

Отже, соціальний статус індивіда a_q змінюється за формулою

$$p_q^{t+1} = \frac{p_q^t}{z^t} = p_q^t k_q^t, \qquad k_q^t = \frac{m-1}{m-1-H_c^t}, \quad t = 1, 2, \ldots,$$

де $H_c^t = \sum_{k\neq q} c_k p_k^t (1 - p_k^t)$. Очевидно, що всі $k_q^t > 1$. Тому величина $0 < p_q^t < 1$ монотонно зростає при $t \to \infty$ і для неї існує границя $0 < p_q^{\infty}$.

Теорема 5. *Припустимо, що для одного фіксованого* $1 \leq q \leq m$ *значення параметра конфліктної активності є нульовим:* $c_q = 0$, *а всі інші* $0 < c_k \leq 1,\ k \neq q$. *Тоді*

$$p_q^{\infty} = \lim_{t\to\infty} p_q^t = 1, \qquad p_k^{\infty} = \lim_{t\to\infty} p_k^t = 0, \quad k \neq q.$$

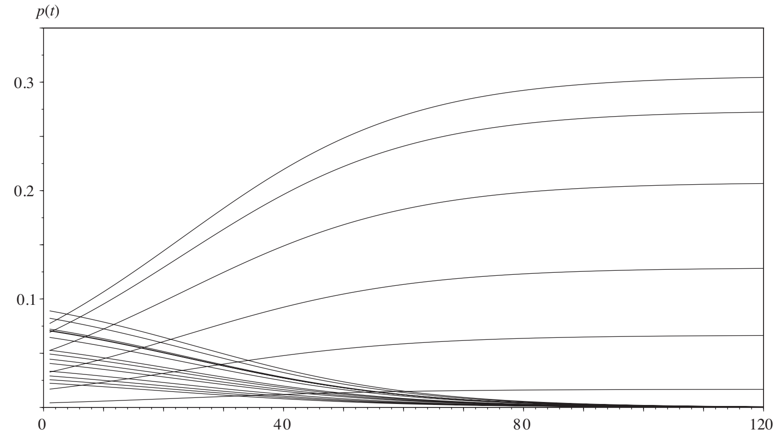

Рис. 3. Уникнення конфліктної взаємодії. Для кластера індивідів I_0 з нульовим параметром конфліктної взаємодії $c_i = 0,\ i \in I_0$, вся соціальна енергія на границі при $t \to \infty$ розподіляється між ними пропорційно початковим значенням: $p_i^\infty = p_i/s(I_0)$ (див. (24)).

Доведення. З існування $0 < p_q^\infty$ випливає, що $H_c^\infty = 0$. Згідно з (17) це можливо лише, якщо всі $p_k^\infty = 0$. Тому $p_q^\infty = 1$.

Розглянемо загальний випадок, коли декілька індивідів уникають конфліктної взаємодії (рис. 3). З цією метою розкладемо множину індексів $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ на дві не порожні підмножини $I_0 := \{i \mid c_i = 0\}$ та $I_+ := \{k \mid c_k > 0\}$. Тоді згідно з (15) – (17) маємо

$$p_i^{t+1} = \frac{p_i^t}{z^t} = p_i^t \, \frac{m-1}{m-1-H_c^t}, \quad i \in I_0,$$

$$p_k^{t+1} = \frac{p_k^t}{z^t} = p_k^t \, \frac{m-1-c_k(1-p_k^t)}{m-1-H_c^t}, \quad k \in I_+.$$

Теорема 6. *Нехай* $c_i = 0,\ i \in I_0,\ c_k > 0,\ k \in I_+$. *Тоді виконуються рівності*

$$p_i^\infty = \lim_{t\to\infty} p_i^t = \frac{p_i^0}{s(I_0)}, \quad i \in I_0, \qquad p_k^\infty = \lim_{t\to\infty} p_k^t = 0, \quad k \in I_+, \tag{24}$$

де $s(I_0) = \sum_{i \in I_0} p_i$.

Доведення. Для кожного $i \in I_0$ послідовність $p_i^t,\ t = 1, 2, \ldots$, очевидно обмежена й монотонно зростає, оскільки $0 < H_c^t < 1$. Тому існують границі $p_i^\infty = \lim_{t\to\infty} p_i^t$. Неважко бачити, що для $k \in I_+$ всі координати p_k^t збігаються до нуля. Дійсно, з існування $p_i^\infty > 0$ маємо, що $H_c^\infty = 0$. Завдяки (17) це можливо лише, якщо всі $p_k^\infty = 0$. Тепер справедливість (24) випливає з (15), (16) та умови $\sum_{i \in I_0} p_i^\infty = 1$.

5. Приклади. У наведених далі прикладах аналізуємо питання про межі, в яких фіксований індивід a_i може вибирати значення параметра конфліктної активності c_i таким чином, щоб забезпечити собі повну перемогу, тобто $p_i^t \to 1,\ t \to \infty$. При цьому для спрощення задачі припускається, що всі інші c_l однакові, наприклад, $c_l = 1,\ l \neq i$.

5.1. Соціум з трьох індивідів, $m = 3$. Говоримо, що індивід a_i виграє (здобуває перемогу), якщо $p_i^t \to 1,\ t \to \infty$.

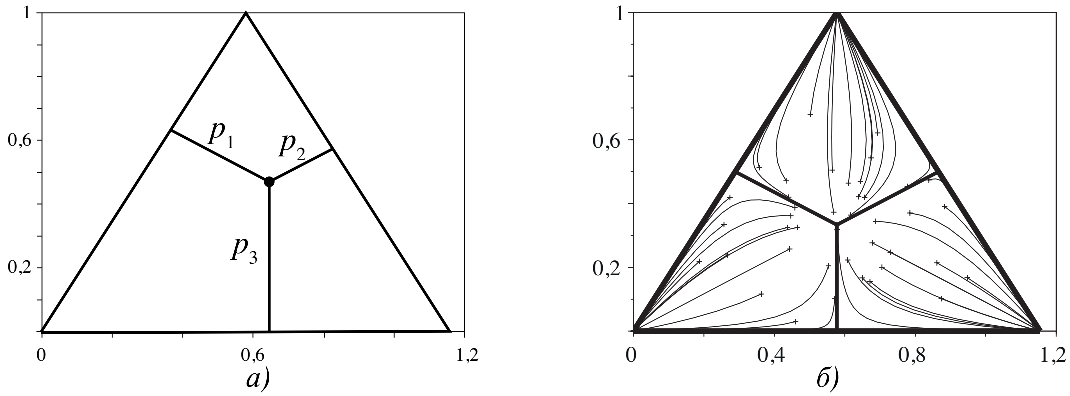

Рис. 4. Випадок $m = 3$: а) зображення вектора $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ як точки 2-мірного симплекса $\mathbf{\Delta}^2$; б) кожна з вершин симплекса $\mathbf{\Delta}^2$ описує один з трьох атракторів $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ з відповідним басейном притягання.

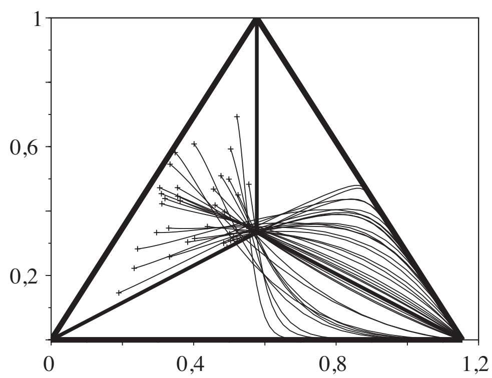

Рис. 5. При $c_i = p_i/p_{\max}$, $i = \overline{1, 3}$, кардинально змінюються басейни притягання атракторів. Зокрема, басейн притягання точки $\mathbf{p} = (1, 0, 0)$ складається з векторів $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ таких, що $p_1 = \min_{1 \le i \le 3}\{p_i\}$ (порівняно з рис. 4 б).

Зафіксуємо довільну координату $0 < p_i < 1$ вектора $\mathbf{p} \in \mathbf{\Delta}^2$, а інші координати покладемо рівними $p_l = (1 - p_i)/2$. Нехай також $c_l = 1$ для обох $l \neq i$. Легко бачити, що з $p_i > 1/3$ випливає $p_l < p_i$ і тому індивід a_i виграє при всіх $0 < c_i \le 1$. Граничний стан є, очевидно, стійким одноточковим атрактором динамічної системи (див. рис. 4).

Розглянемо іншу ситуацію. Припустимо, що в початковий момент індивід a_i має стартову соціальну енергію меншу, ніж у кожного з двох інших, тобто $p_i < 1/3$. У цьому випадку він здатен перемогти лише при $c_i < 1$. Звичайно, при $c_i = 0$ він виграє при будь-якому малому значенні p_i (див. теорему 5, рис. 6). Зрозуміло, що існують і не нульові значення параметра c_i, при яких він перемагає (рис. 7). Ми шукаємо межу для c_i, яку не можна перевищувати індивіду a_i, аби не зазнати поразки.

Твердження 11. *За умови $p_i < 1/3 < p_l$ при $c_l = 1$, $l \neq i$, індивід a_i виграє, $p_i^t \to 1$, $t \to \infty$, лише якщо його параметр конфліктної активності задовольняє нерівність*

$$c_i < \frac{1 + p_i}{2(1 - p_i)} = \frac{1 - p_l}{1 - p_i}, \quad l \neq i. \tag{25}$$

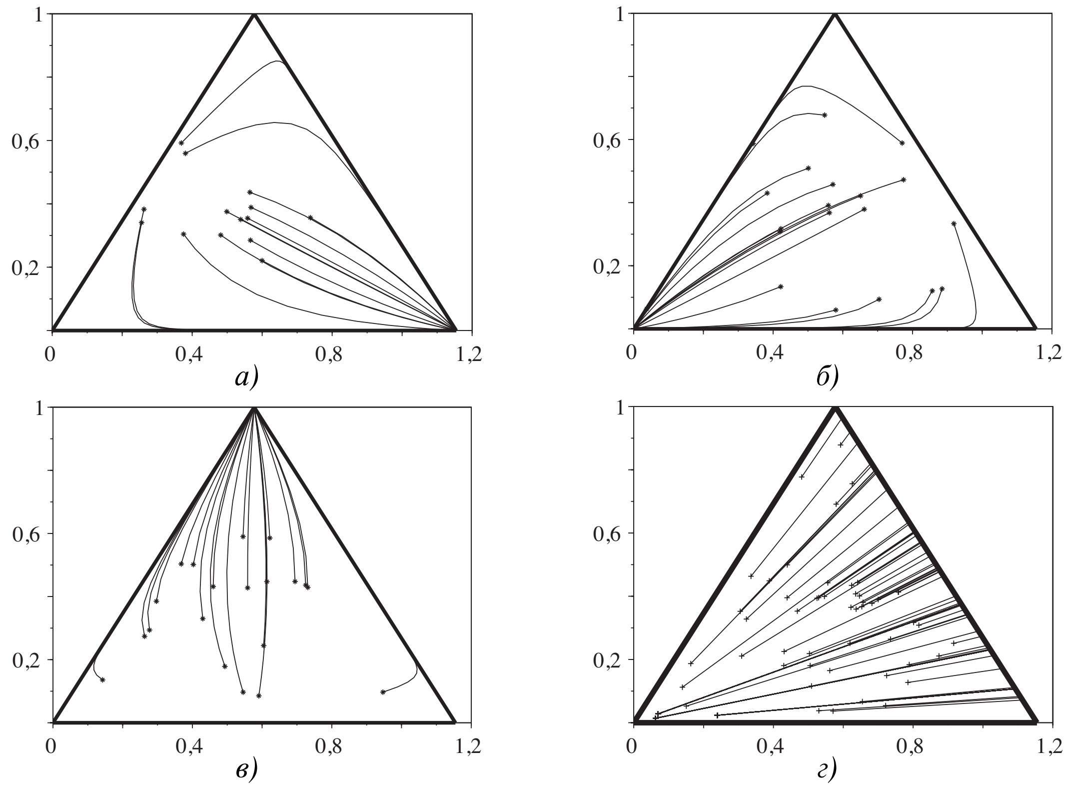

Рис. 6. У кожному з випадків $c_1 = 0,\ c_2 = c_3 = 1,\ c_2 = 0,\ c_1 = c_3 = 1,\ c_3 = 1,\ c_1 = c_2 = 0$ басейни притягання до відповідних атракторів $(1, 0, 0),\ (0, 1, 0),\ (0, 0, 1)$ складаються з усіх точок симплекса $\mathbf{\Delta}^2$ за виключенням протилежного ребра (див. а), б), в)). При $c_1 = c_3 = 0,\ c_2 = 1$ траєкторії є відрізками з граничними точками, розташованими на ребрі $p_2 = 0$ симплекса $\mathbf{\Delta}^2$ (див. д)). Аналогічно для $c_1 = c_2 = 0,\ c_3 = 1$ та $c_2 = c_3 = 0,\ c_1 = 1$.

Доведення. Оскільки $p_l = (1 - p_i)/2$ і $c_l = 1,\ l \neq i$, то при $0 < c_i < 1$ критичний поріг

$$H_c = c_i p_i (1 - p_i) + \bigl(1 - p_i^2\bigr)/2.$$

Згідно з твердженням 6 (див також (18), (19)) для виконання нерівності $p_i^1 > p_i$ необхідно і достатньо, щоб справджувалася нерівність $H_c > c_i(1 - p_i) = c_i \kappa_i$. Це означає, що

$$c_i(1 - p_i) < c_i p_i (1 - p_i) + (1 - p_i^2)/2.$$

Еквівалентно

$$c_i(1 - p_i)^2 < (1 - p_i^2)/2, \qquad c_i < (1 + p_i)/2(1 - p_i).$$

Звідси одержуємо (25). З нерівності $p_i^1 > p_i$ випливає справедливість нерівності $p_l^1 < p_l$, $l \neq i$, а також $\kappa_i^1 < \kappa_i$ та $\kappa_l^1 > \kappa_l$. Тому $\kappa_1^i < H_c^1 < \kappa_l^1$. Зрозуміло, що за індукцією нерівності $\kappa_i^t < H_c^t < \kappa_l^t,\ l \neq i$, будуть виконуватися при всіх t.

Отже, p_i^t зростає на кожному кроці та прямує до 1, а обидві координати $p_l^t,\ l \neq i$, спадають до нуля при $t \to \infty$.

Варто відзначити, що вже на другому кроці конфліктної взаємодії для зростання p_i^1 (а отже, спадання координат p_l^1) параметр активності c_i можна збільшити до

$$\bigl(1 - p_l^1\bigr)/\bigl(1 - p_i^1\bigr) = c_i^1 > c_i.$$

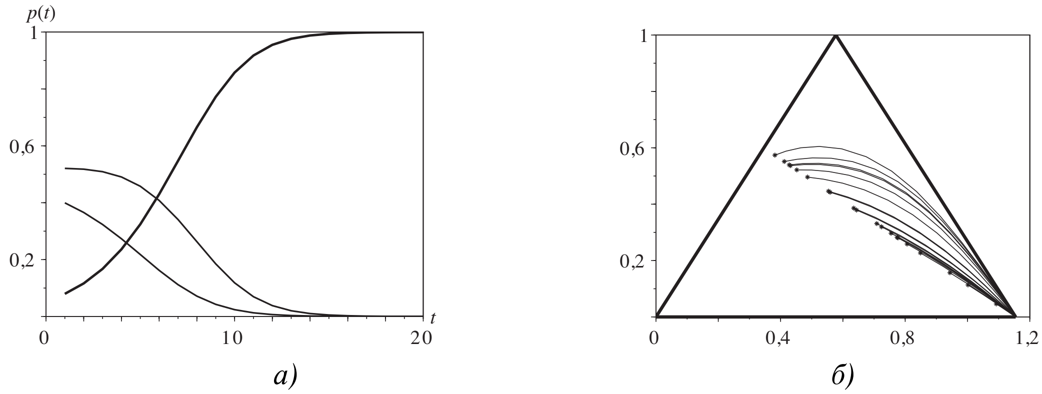

Рис. 7. Ілюстрація твердження 11: а) типові графіки кожної з трьох координат; б) множина траєкторій на симплексі $\mathbf{\Delta}^2$ для різних початкових точок.

Таке ж уточнення стосується кожного наступного кроку.

Неважко бачити, що в (25) завжди $1/2 < c_i$. Це означає, що індивід a_i з будь-якою малою стартовою енергією $p_i > 0$ одержує перемогу, якщо покласти $c_i = 1/2$.

При $c_i = (1 + p_i)/2(1 - p_i)$ початковий вектор є нерухомим, тому що тоді $\kappa_i = \kappa_2 = \kappa_3 = H_c$.

Відзначимо також, що за умови $p_i < p_l = p_k,\ l, k \neq i$, три нерівності

$$\kappa_i = c_i(1 - p_i) < H_c, \quad c_i < \frac{1 + p_i}{2(1 - p_i)}, \quad H_c < 1 - p_l, \quad l \neq i$$

є еквівалентними, що перевіряється безпосередньо.

5.2. Усі рівні, лузер перемагає. Розглянемо ситуацію, подібну до попередньої, з кількістю індивідів $m \geq 3$. Нехай фіксована координата $p_i < p_l,\ l \neq i$, має довільно мале значення, а всі p_l однакові, $p_l = (1 - p_i)/(m - 1)$. Якщо $c_l = 1$ і всі $c_i = 1$, то $p_i^t \to 0$, $p_l^t \to 1/(m - 1),\ t \to \infty$ (див. твердження 5).

Отже, індивід a_i є лузером, він починає з найменшого соціального статусу, який з часом стає нульовим. Яке значення параметра конфліктної активності $c_i < 1$ він має обрати, щоб забезпечити собі виживання і перемогу, $p_i^t \to 1,\ t \to \infty$?

Якщо $c_i < 1$, то

$$H_c = c_i p_i (1 - p_i) + (m - 1) p_l (1 - p_l) = c_i p_i (1 - p_i) + \frac{1 - p_i}{m - 1}(m - 2 + p_i).$$

З твердження 6 випливає, що для позитивної відповіді на поставлене питання є достатнім виконання нерівностей

$$\kappa_i = c_i(1 - p_i) < H_c < \kappa_l = (1 - p_l) = \left(1 - \frac{1 - p_i}{m - 1}\right) = \frac{m - 2 + p_i}{m - 1}, \quad l \neq i, \tag{26}$$

які, очевидно, будуть виконуватися також при всіх $t > 0$. З (26) маємо

$$c_i(1 - p_i) < c_i p_i (1 - p_i) + \frac{1 - p_i}{m - 1}(m - 2 + p_i)$$

або

$$c_i(1-p_i)^2 < \frac{1-p_i}{m-1}\,(m-2+p_i).$$

Отже, для здобуття повної перемоги найслабкішому в початковий момент індивіду достатньо обрати параметр конфліктної активності за умовою (25):

$$c_i < \frac{1-\dfrac{1-p_i}{m-1}}{1-p_i} = \frac{1-p_l}{1-p_i}, \quad l \neq i.$$

Отже, справедливе таке твердження.

Твердження 12. *Умова (25) є достатньою для перемоги індивіда з найменшою стартовою енергією.*

Відзначимо, що друга нерівність з (26) буде виконуватися автоматично, оскільки, як легко перевірити, з $c_i(1-p_i) < H_c$ випливає $H_c < \kappa_l$. Зауважимо також, що значення $c_i = (1-p_l)/(1-p_i) = 1-p_i/m-1(m-2+p_i)$ є екстремальним, при цьому стан системи з координатами $p_i,\ p_l = (1-p_i)/(m-1),\ l \neq i$ є нерухомим.

Результат твердження 12 легко узагальнити на випадок $c_l \leq 1$.

Нехай $p_i = p < p_l$, усі $p_l,\ l \neq i$, рівні, $p_l = (1-p_i)/(m-1)$, а c_l менші або рівні 1, але однакові. Яке c_i забезпечує такий результат: $p_i^t \to 1,\ t \to \infty$?

При цьому

$$H_c = c_i p_i(1-p_i) + c_l\,\frac{1-p_l}{m-1}\,(m-2+p_i).$$

Потрібно задовольнити умови

$$\kappa_i = c_i(1-p_i) < H_c < \kappa_l = c_l(1-p_l), \quad l \neq 1,$$

або, що еквівалентно,

$$c_i(1-p_i) < c_i p_i(1-p_i) + c_l(1-p_i)\,\frac{m-2+p_i}{m-1}.$$

Звідси після нескладних обчислень одержуємо оцінку на значення параметра конфліктної активності

$$c_i < c_l\frac{1-p_l}{1-p_i}, \quad l \neq 1, \tag{27}$$

яка забезпечує граничний результат повної перемоги $p_i^t \to 1,\ t \to \infty$, для індивіда a_i.

Варто зауважити, що оскільки на кожному кроці всі p_l^t спадають, а p_i^t зростає, то умова (27) для c_i на деякому кроці при $t \to \infty$ стає непотрібною.

5.3. Гра трьох різних індивідів. Позначимо через p_i одну з координат вектора $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$, яка, взагалі, не є максимальною. Припустимо, що $p_2 \neq p_3$, але, як і раніше, $c_k = 1,\ k \neq i$. В яких межах можна вибирати $0 < c_i < 1$, щоб забезпечити $p_i^t \to 1$ $(p_k^t \to 0,\ l \neq i),\ t \to \infty$?

Наступне твердження дає оцінку зверху для c_i.

Твердження 13. *Якщо* $c_k = 1,\ k \neq i$, *а*

$$c_i < \frac{1+p_i}{2(1-p_i)} - \frac{\alpha}{2p_i}\,(1+\alpha p_i - \alpha), \quad 0 \leq \alpha < 1, \tag{28}$$

то $p_i^t \to 1,\ p_k^t \to 0,\ k \neq i,\ t \to \infty.$

Доведення. Оскільки p_i довільне, то завдяки $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ можемо покласти $p_m = = 1 - p_i/2 + \varepsilon,\ p_l = 1 - p_i/2 - \varepsilon,\ l \neq i, m$ з деяким $0 \leq \varepsilon < 1 - p_i/2$. Зауважимо, що (28) можна переписати у вигляді

$$c_i < \frac{1 - p_m}{2(1 - p_i)} - \frac{\alpha}{2p_i}(1 - \alpha)(1 - p_i), \quad 0 \leq \alpha < 1.$$

Зараз

$$H_c = c_i p_i (1 - p_i) + \frac{1 - p_i^2}{2} - 2\varepsilon^2,$$

$$\kappa_i = c_i(1 - p_i), \quad \kappa_m = 1 - p_m = \frac{1 + p_i}{2} - \varepsilon, \quad \kappa_l = 1 - p_l = \frac{1 + p_i}{2} + \varepsilon.$$

Очевидно, $\kappa_m < \kappa_l$. Покажемо, що умова (28) еквівалентна нерівностям

$$\kappa_i < H_c < \kappa_m,$$

які забезпечують зростання p_i та спадання $p_m,\ p_l$ на першому кроці. Відзначимо, що з нерівності $H_c < \kappa_m$ автоматично випливає перша нерівність $\kappa_i < H_c$, тому що інакше всі координати спадали б на першому кроці, що суперечить стохастичності вектора $\mathbf{p}^t$.

Отже, треба пересвідчитися, що (28) еквівалентна $H_c < \kappa_m$. Безпосередньо з $H_c < \kappa_m$ випливає

$$c_i < \frac{1 + p_i}{2(1 - p_i)} - \frac{\varepsilon - 2(\varepsilon)^2}{p_i(1 - p_i)},$$

де $0 \leq \varepsilon < \dfrac{1 - p_i}{2}$. Покладемо $\varepsilon = \alpha(1 - p_i)/2,\ 0 \leq \alpha < 1$. Тоді остання нерівність набирає вигляду (28). Тепер зауважимо, що завдяки $p_i < p_i^1$ величина $\dfrac{1 + p_i^1}{2\left(1 - p_i^1\right)}$, зростає а $\dfrac{\alpha}{2p_i}(1 + \alpha p_i - \alpha)$ спадає, тому $c_i < \dfrac{1 + p_i^1}{2\left(1 - p_i^1\right)} - \dfrac{\alpha}{2p_i^1}\left(1 + \alpha p_i^1 - \alpha\right)$ і, отже, на другому кроці $p_i^1 < p_i^2$. За індукцією, аналогічні нерівності виконуються завжди.

6. Висновки та можливі застосування. Формула (1), яку можна переписати (див. (4), (5)) у вигляді

$$p_i^{t+1} = p_i^t(1 - \delta_i^t),$$

описує найпростіший закон взаємозалежності окремого індивіда з усім соціумом. Введення у формулах (21), (25) параметрів конфліктної активності c_i не змінює суті цієї взаємозалежності. Цей закон відповідає принципу "один проти всіх, або кожен сам за себе". Знакозміний фактор δ_i^t визначає величину втрати або здобутку соціальної енергії для a_i-го індивіда на $t + 1$ кроці конфліктної взаємодії. Ця величина залежить лише від двох обставин: розподілу соціальної енергії всього соціуму між індивідами на кроці t та значень параметрів конфліктної активності.

Перший важливий результат нашого дослідження стверджує, що в загальному випадку стан відповідної динамічної моделі соціуму асимптотично при $t \to \infty$ наближається до одного з граничних рівноважних станів (теореми 1, 2, 6). Граничний стан буде стійким або нестійким, залежно від того, для одного чи більше ніж одного індивіда остаточна соціальна енергія залишиться строго додатною. Типовим граничним станом є випадок, коли всю енергію захоплює один індивід, тобто, $p_{i_0}^{t=\infty} = 1$ лише для деякого i_0. Такий випадок відповідає відомому принципу "Переможець забирає все".

Другий важливий результат статті полягає в аналізі ролі стратегічного параметра c_i — сили конфліктної активності індивіда a_i. Показано, що регулювання (керування величиною цього параметра) суттєво змінює динаміку перерозподілу соціальної енергії. В роботі знайдено достатні умови на величину c_i, які забезпечують виживання, пріоритет і навіть повну перемогу для індивіда a_i з довільною, навіть мінімальною, стартовою соціальною енергією. Проблема оптимального вибору значення c_i для обраного індивіда a_i в залежності від зафіксованих значень цього параметра для всіх інших індивідів становить самостійну нетривіальну задачу навіть у випадку соціуму з трьох індивідів. Цю задачу частково розглянуто в прикладах, зокрема як проблему трьох гравців.

Значно досконаліші математичні моделі конфліктного соціуму включають явні зв'язки між окремими індивідами, які встановлюються матрицею $S = \{s_{ik}\}$, не обов'язково симетричною. В таких моделях з'являються не лише рівноважні стани, а й періодичні (циклічні) атрактори, біфуркаційні пороги, квазіхаотичні траєкторії. Встановлення точних математичних тверджень у таких моделях є значно складнішою задачею, яку ми плануємо дослідити в наступній публікації.

Зауважимо, що одержані результати мають аналоги в публікаціях, присвячених аналізу змагальних процесів у соціальних системах та дифузії поглядів (див., наприклад, [20 – 22]), їх можна застосувати при побудові моделі виборів та встановлення консенсусу [23], а також у моделях ідеологічного конфлікту [24]. Нарешті підкреслимо, що методики досліджень у моделях фазових осциляторів [25] на основі відомої моделі Курамото [26, 27] у моделях соціуму [28], які застосовуються при вивченні нейронних та інформаційних мереж, дуже схожі, що дає підстави для створення потужної теорії складних інтерактивних систем.

Література

1. *Axelrod R.* The dissemination of culture: A model with local convergence and global polarization // J. Conflict Resolut. – 1997. – **41**, № 2. – P. 203 – 226. DOI 10.1177/0022002797041002001
2. *Bellomo N., Brezzi F., Pulvirenti M.* Modeling behavioral social systems // Math. Models Methods Appl. Sci. – 2017. – **27**, № 1. – P. 1 – 11. DOI 10.1142/S0218202517020018
3. *Flachea A., Mäs M., Feliciania T., Chattoe-Brownb E., Deffuantc G., Huetc J., Lorenzd S.* Models of social influence: towards the next frontiers // J. Artificial Societies Soc. Simul. – 2017. – **20(4)**, № 2. DOI 10.18564/jasss.3521
4. *Albeverio S., Koshmanenko V., Samoilenko I.* The conflict interaction between two complex systems: Cyclic migration // J. Interdiscip. Math. – 2008. – **11**, № 2. – P. 163 – 185.
5. *Кошманенко В. Д., Самойленко І. В.* Модель динамічної системи конфліктної тріади // Нелін. коливання. – 2011. – **14**, № 1. – С. 55 – 75; ***English translation:*** Nonlinear Oscil. – 2011. – **14**, № 1. – P. 56 – 76.
6. *Koshmanenko V., Samoilenko I.* The conflict triad dynamical system // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. – 2011. – **16**. – P. 2917 – 2935.
7. *Karataieva T., Koshmanenko V., Krawczyk M., Kulakowski K.* Mean field model of a game for power. https://arxiv.org/pdf/1802.02860.pdf
8. *Epstein J. M.* Nonlinear dynamics, mathematical biology, and social science // Lect. Notes Santa Fe Inst. Stud. Sci. Complexity. – Addison Wesley Publ. Comp., 1997. – 164 p.
9. *Epstein J. M.* Modeling civil violence: An agent-based computational approach // PNAS. – 2002. – **99**, Suppl. 3. – P. 7243 – 7250.
10. *Epstein J. M.* Why Model? // J. Artificial Societies Soc. Simul. – 2008. – **11**, № 4. – 12 p.
11. *Friedkin N. E., Johnsen E. C.* Social influence network theory. – New York: Cambridge Univ. Press, 2011. – 367 p. DOI 10.1017/CBO9780511976735

12. *Takahashi K. I., Salam K. Md. M.* Mathematical model of conflict with non-annihilating multi-opponent // J. Interdiscip. Math. – 2006. – **9**, № 3. – P. 459 – 473.
13. *Khan S. Md. M., Takahashi K. I.* Segregation through conflict // Adv. Appl. Sociol. – 2013. – **3**, № 8. – P. 315 – 319.
14. *Кошманенко В. Д.* Теорема про конфлікт для пари стохастичиих векторів // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 4. – С. 555 – 560; ***English translation:*** Ukr. Math. J. – 2003. – **55**, № 4. – P. 671 – 678.
15. *Koshmanenko V.* Theorem of conflicts for a pair of probability measures // Math. Methods Oper. Res. – 2004. – **59**, № 2. – P. 303 – 313.
16. *Кошманенко В. Д., Харченко Н. В.* Інваріантні точки динамічної системи конфлікту в просторі кусково рівномірно розподілених мір // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 7. – С. 927 – 938; ***English translation:*** Ukr. Math. J. – 2004. – **56**, № 7. – P. 1102 – 1116.
17. *Кошманенко В. Д.* Спектральна теорія динамічних систем конфлікту. – Київ: Наук. думка, 2016. – 287 с.
18. *Koshmanenko V., Karataieva T., Kharchenko N., Verygina I.* Models of the conflict redistribution of vital resources // Social Simulation Conference. – Italy, Rome, 2016. – 4 p.
19. *Koshmanenko V. D., Karataieva T. V.* On personal strategies in conflict socium // Econophysics Colloquium 2017 in Warsaw, July 5-7th. – Warsaw, 2017. – 32 p.
20. *Hu H.* Competing opinion diffusion on social networks // R. Soc. Open Sci. – 2017. – **4(11)**. DOI 10.1098/rsos.171160
21. *Jalili M.* Social power and opinion formation in complex networks / Phys. A. – 2013. – **392**. – P. 959 – 966. – DOI 10.1016/j.physa.2012.10.013
22. *Hu H.-B., Wang X.-F.* Discrete opinion dynamics on networks based on social influence // J. Phys. A: Math. Theor. – 2009. – **42**, № 22. DOI 10.1088/1751-8113/42/22/225005
23. *Kimura M., Saito K., Ohara K., Motoda H.* Opinion formation by voter model with temporal decay dynamics / Eds Flach P. A., De Bie T., Cristianini N. Machine Learning and Knowledge Discovery in Databases. ECML PKDD 2012 // Lect. Notes Comput. Sci. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2012. – Vol. 7524.
24. *Marvel Seth A., Hong H., Papush A., Strogatz S. H.* Encouraging moderation: clues from a simple model of ideological conflict // Phys. Rev. Lett. – 2012. – **109**. DOI 10.1103/PhysRevLett.109.118702
25. *Burylko O., Kazanovich Y., Borisyuk R.* Bifurcation study of phase oscillator systems with attractive and repulsive interaction // Phys. Rev. E. – 2014. – **90**, № 2. – 022911.
26. *Ashwin P., Bick C., Burylko O.* Identical phase oscillator networks: bifurcations, symmetry and reversibility for generalized coupling // Front. Appl. Math. Stat. – 2016. – **2**, № 7.
27. *Maistrenko Yu., Popovych O., Burylko O., Tass P. A.* Mechanism of desynchronization in the finite-dimensional Kuramoto model // Phys. Rev. Lett. – 2004. – **93(8)**. – 084102. DOI 10.1103/PhysRevLett.93.084102
28. *Pareschi L., Toscani G., Tosin A., Zanella M.* Hydrodynamic models of preference formation in multi-agent societies. https://arxiv.org/pdf/1901.00486.pdf

Одержано 11.12.2018,
після доопрацювання — 11.01.2019