УДК 517.9

КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНОГО РІВНЯННЯ ШРЕДІНГЕРА. I*

О. О. Покутний

Ін-т математики НАН України
вул. Терещенківська, 3, Київ, 01024, Україна
e-mail: lenasas@gmail.com

Boundary-value problem for the evolutionary Schrödinger equation is investigated. A survey of works in this field is given.

Досліджуються крайові задачі для еволюційного рівняння Шредінгера. Наведено огляд робіт у цьому напрямку.

Вступ. Рівняння Шредінгера є об'єктом постійної пильної уваги багатьох науковців уже понад сто років. Зробити повний огляд результатів цих досліджень доволі складно. Деякі класичні та досить недавні роботи наведено в [1 – 80].

Зауважимо, що еволюційні задачі для рівняння Шредінгера досліджуються зазвичай у регулярному випадку. Це задачі, в яких існує єдиний і неперервно залежний від початкових даних і правих частин розв'язок. Специфіка задач, які вивчає автор, полягає в тому, що вони належать до класу некоректних, нерегулярних або резонансних [8]. Це клас задач, розв'язки яких нестійкі до малих змін вхідних даних. Вони характеризуються тим, що малі зміни вхідних даних можуть спричинити великі зміни розв'язків. Такі задачі належать до класу некоректних задач [8]. Якщо вхідні дані відомі наближено, то така нестійкість призводить до неєдиності розв'язків. Виникнення резонансів ускладнює простоту динамічного руху і може призвести до "катастрофи Пуанкаре" [81]. Для опису множини розв'язків таких задач зручним виявився апарат теорії узагальнено-обернених і псевдообернених за Муром – Пенроузом операторів і матриць, які й використовуються в дослідженнях [11, 52, 82].

Зауважимо, що проведені дослідження тісно пов'язані з теорією необоротних процесів.

Наприкінці XIX ст. у фізиці найбільше розглядалися дві революційні теорії: механічної і статистичної інтерпретації термодинаміки й електродинаміки Максвелла. За допомогою цих двох теорій науковці намагалися розв'язати нову задачу: пояснити зв'язок між світлом і матерією.

На основі атомної теорії й теорії ймовірностей Больцману вдалося дослідити властивості газів. Він зміг показати, що ентропія є мірою молекулярного безладу тіла, яка збільшується у зв'язку з тим, що безладні сполуки — це також найімовірніші сполуки. Закон про зростання ентропії, або другий початок термодинаміки, міг застосовуватися не лише для двигунів. У середині XIX ст. необхідність будувати ефективніші механізми привела до розвитку теорії двигунів, в результаті чого з'явилася нова наука — термодинаміка. Невдовзі вона минула початкову ціль і перетворилася на науку про тепло (термодинамі-

* Підтримано ґрантом НАН України дослідницької групи молодих учених НАН України для проведення досліджень за пріоритетними напрямками розвитку науки і техніки 2019 р.

ку) — єдину науку, яка здатна пояснити, чому час рухається від минулого до майбутнього. Термодинаміка сформувалася в 60-х роках XIX ст. [2].

Після робіт Л. Больцмана [2], І. Пригожина [81] стало зрозуміло, що теорія необоротних процесів відіграє важливу роль у фізиці, хімії та біології. Необоротні процеси в природі так само реальні, як і оборотні, а не є наслідком їхнього наближеного опису. Вони визначають можливість самоорганізації у відкритих системах. Необоротність тісно пов'язана з динамікою й виникає там, де такі поняття класичної і квантової механіки, як траєкторія та хвильова функція, більше не відповідають даним, отриманим із дослідів. Якщо в класичній та квантовій механіці час є змінним параметром, то в теорії необоротних процесів — оператором. Необоротність приводить до суттєвих змін понять простору, часу, динаміки. Прикладами необоротних процесів можуть бути хімічні реакції, в яких проявляється порушення часової симетрії, а також теплопровідність, дифузія. Для таких процесів може бути побудована математична теорія, зокрема й у резонансних випадках. У другій половині XX ст. було сформульовано припущення щодо того, що для врахування необоротності виміру в рівняння Шредінгера необхідно додавати нові члени, які описують динаміку квантових систем. Автор зробив спробу [83 – 85] змоделювати й вивчити крайові задачі для еволюційного рівняння Шредінгера в таких випадках. Серед них особливу увагу привертають нелінійні системи.

Дослідження нелінійних моделей пов'язане з теорією хаосу. Хаотичність є проявом складності динамічної системи і її показником. Дослідження таких процесів у детермінованих нелінійних системах є однією з фундаментальних проблем сучасного природознавства. Поняття хаосу й порядку тісно пов'язані з широко відомим напрямом нелінійного мислення, що носить назву синергетики. Слово "синергія" означає узгоджену спільну дію. Засновник цього напряму Герман Гакен вивчав, як спільна дія елементів нелінійного середовища породжує нові структури, тобто яким чином відбувається самоорганізація. Вперше теорію хаосу (саме в математичному розумінні) застосував Лоренц у відповідній моделі при прогнозуванні погоди, потім її крім метеорології використовували в астрономії й космології, лазерній оптиці, акустиці, фізиці плазми, фізиці прискорювачів, кінетиці хімічних реакцій, дослідженнях турбулентності тощо. Відомо, що ця модель дуже чутлива до початкових даних, прикладом чого є добре відомий "ефект метелика" [86]. Автор продемонструє можливість складної поведінки відповідних еволюційних систем для рівняння Шредінгера. Насамперед це системи, які мають властивість експоненціальної дихотомії. Такі системи можуть мати доволі складну поведінку. Експоненціальна дихотомія — це початковий крок на шляху до хаосу. Для того щоб зрозуміти, як у системах виникає самоорганізація, потрібно знайти умови біфуркації розв'язків відповідних задач. Це поняття пов'язане зі стійкістю й нестійкістю систем. Наші уявлення про стійкість того чи іншого режиму функціонування динамічної системи формуються у процесі пізнання природи й життя. Спостерігаючи еволюцію живої й неживої природи, помічаємо, що розвиток складної системи завжди супроводжується втратою стійкості деяких режимів функціонування і народженням нових, стійких, чим і є біфуркація розв'язків відповідних складних систем. Основи математичної теорії стійкості закладено в роботах математика О. М. Ляпунова. Розвиток якісної теорії та теорії біфуркацій динамічних систем пов'язаний з іменами таких науковців, як О. О. Андронов, В. І. Арнольд, та їхніх учнів. Про теорію біфуркацій уперше йшлося в лекціях А. Пуанкаре в Сорбонні (1900 р.) в курсі, присвяченому описові руху циліндричних стовпців рідини. Треба зауважити, що необоротні процеси (на відміну від оборотних) роблять внесок у збільшення ентропії. Другий закон термодинаміки пов'язує додатний напрям часу зі зростанням ентропії. У математичному розумінні ентропії може відповідати функція Ляпунова, з використанням якої визначається стійкість динамічних систем. М. Планк підкреслював [87], що другий закон термодинаміки дозволяє виділити різні типи станів у природі, з яких одні є атракторами інших. Атрактори — це множини, до яких притягуються траєкторії динамічних систем. Необоротність є проявом атрактивності.

Розповсюдженим феноменом багатьох динамічних систем є також квантовий хаос [14]. Дослідження квантового хаосу в складних системах — це надзвичайно активна галузь сучасної фізики, хімії та математики. Однак мало відомо, що ця область досліджень своїм походженням завдячує питанню, яке вперше поставив А. Ейнштейн під час доповіді про зв'язок між класичною та квантовою механікою сильно хаотичних систем; цю доповідь він прочитав у Берліні в 1917 р. [88]. З історичного погляду це здається майже неможливим, оскільки квантова механіка ще не була створена і явище хаосу ледь було знайоме фізикам того часу. Квантову теорію створив М. Планк у 1900 р. Вона була розвинена під впливом геніальної, але парадоксальної моделі атома Бора і правил Бора – Зоммерфельда для квантування простих квантових систем. Також ці роки пов'язують із внеском Ейнштейна — створенням загальної теорії відносності.

У сучасній теорії інтегровних систем важливу роль відіграють тори. Траєкторії інтегровних систем намотуються на ці тори й це призводить до того, що рухи інтегровних систем виявляються цілком *регулярними* в тому сенсі, що навіть довготривала поведінка може виявитися повністю передбаченою.

А. Ейнштейн був першим фізиком, котрий зрозумів, яку важливу роль відіграють інваріантні тори у фазовому просторі.

Однак інтегровні системи не є типовими, тобто майже всі динамічні системи є неінтегровними у тому сенсі, що не існує інших констант руху окрім енергії та, відповідно, немає інваріантних торів у фазовому просторі. З властивості ергодичності випливає, що майже всі траєкторії щільно заповнюють за відсутності інваріантних торів усю енергетичну поверхню. На сьогодні більшість науковців, що працюють у галузі природничих наук, високо оцінює важливість поняття хаосу в складних системах. Тому зазвичай припускають, що динамічна система виконує дуже нерегулярний, хаотичний рух, який є непередбачуваним, тобто траєкторії залежать від початкових умов таким чином, що траєкторії, які розташовані поруч у фазовому просторі, віддаляються з експоненціальною швидкістю.

Квантування торів за Ейнштейном для інтегровних систем знову відкрив математик Дж. Келлер лише у п'ятдесяті роки XX ст. Можливо, це відбулося тому, що квантова механіка почала розвиватися лише за кілька років, і почалося це з матричної механіки Гейзенберга (1925 р.), хвильового рівняння Шредінгера (1926 р.) та принципу невизначеності Гейзенберга (1927 р.).

У віці тридцяти дев'яти років Е. Шредінгер, сам того не очікуючи, здійснив неймовірне відкриття — хвильову механіку [3]. Рівняння Шредінгера виникло в той час, коли фізики-теоретики стояли перед цілою низкою експериментальних результатів, яких ніяк не могли пояснити. Однак Шредінгер не зупинився, а розмістив звичне рівняння класичної фізики у самісінький центр квантової механіки. Н. Бор завдячував Шредінгеру за його механіку, яка принесла з собою математичну ясність і простоту.

Невдовзі після відкриття рівняння Шредінгера було розроблено квазікласичний підхід, відомий як ВКБ-метод (метод Венцеля – Крамерса – Брюллієна). Але якщо намагатися застосовувати ВКБ-метод до більш складних систем, то виникають серйозніші труднощі, які не вдавалося подолати після відкриття рівняння Шредінгера. Тоді не було ще розуміння про складніші системи, не кажучи вже про хаотичні. Відображенням цього є той факт, що навіть сучасні підручники з класичної чи квантової механіки зазвичай не згадують про явище хаосу.

Дану роботу написано з метою упорядкувати й систематизувати відомі та нові результати для еволюційного рівняння Шредінгера й описати їх якомога зрозумо і просто. Тут зібрано основні та нові результати автора щодо досліджень у цьому напрямку.

Крайові задачі для нелінійного рівняння Шредінгера часто виникають у квантовій механіці, нелінійній оптиці, теорії надпровідності та інших галузях фізики та інженерії. Їхнє дослідження викликає теоретичний і практичний інтерес.

Так, у роботі [9] розглянуто нелінійне еволюційне рівняння типу Шредінгера

$$\psi_t - i\psi_{xx} + 2|\psi|^2\psi_x = 0.$$

Припустимо, що вихідна динамічна система $\mathcal{K}$ допускає гамільтонове зображення у формі

$$\psi_t = -\mathcal{L}\,\mathrm{grad}\,H,$$

де $H \in \mathcal{D}(J)$ — закон збереження, побудований за допомогою лінійної комбінації законів збереження, $\mathcal{L}$ — імплектичний і нетерів оператор, що задовольняє рівняння типу Ляпунова

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} - \mathcal{L}K'^{*} - K'\mathcal{L} = 0.$$

Розглянуто приклад динамічної системи $\mathcal{K}$, заданої нелінійними рівняннями типу Шредінгера:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial t} = i\,\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} - 2\psi_1\psi_2\,\frac{\partial \psi_1}{\partial x},$$
$$\frac{\partial \psi_2}{\partial t} = -i\,\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} - 2\psi_1\psi_2\,\frac{\partial \psi_2}{\partial x}.$$

Показано інтегровність відповідних моделей.

У роботі [14] розглянуто задачу Коші для рівняння Шредінгера зі скалярним і векторним потенціалами в гільбертовому просторі з гамільтоніаном квантового поля у векторному потенціалі a і скалярному потенціалі V вигляду

$$Hf(t,x) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,\big(Bf''(t,x)\big) + 2i\,\big(a(x), f'(t,x)\big) + i\,\mathrm{div}\,a(x)f(t,x) + V(x)f(t,x).$$

У роботі [15] розглянуто різні типи нелінійних рівнянь Шредінгера

$$i\alpha\,\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\alpha^2}{2}\,\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - U(|\Psi|^2)\Psi = 0,$$

де U — деяка функція від $|\Psi|^2$, узагальнено нелінійні рівняння Шредінгера з похідною потенціалу

$$i\alpha\,\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\alpha^2}{2}\,\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + i\beta\,\frac{\partial}{\partial x}\big(U(|\Psi|^2)\Psi\big) = 0,$$

$$i\alpha\,\frac{\partial\Psi}{\partial t}+\frac{\alpha^2}{2}\,\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+i\beta U\big(|\Psi|^2\big)\,\frac{\partial\Psi}{\partial x}=0,$$

нелінійне рівняння Шредінгера з похідною

$$i\,\frac{\partial\Psi}{\partial t}+\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+2i\Psi^2\,\frac{\partial\Psi^*}{\partial x}+U\big(|\Psi|^2\big)\Psi=0,$$

де U — деяка функція від $|\Psi|^2$; при $U\big(|\Psi|^2\big)=4|\Psi|^4$ рівняння є цілком інтегровним. Для нього встановлено критерій Вахітова – Колоколова, на базі якого досліджено стійкість відповідних розв'язків.

У статті [16] розглянуто збурення дискретного спектра напівобмеженого знизу самоспряженого оператора Шредінгера в $L_2(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{H}_0=-\frac{d^2}{dx^2}+\mathcal{W},$$

де $\mathcal{W}$ — оператор множення на локально інтегровну в $\mathbb{R}$ дійсну функцію $\mathcal{W}$; збурений самоспряжений оператор має вигляд

$$\mathcal{H}_{\mu,\varepsilon}=-\frac{d^2}{dx^2}+\mathcal{W}+\mu^{-1}\mathcal{V}_\varepsilon,$$

де $\mathcal{V}_\varepsilon$ — оператор множення на функцію $V\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$. Побудовано асимптотику відповідних власних значень збуреного оператора.

У роботі [17] досліджено вплив на солітон нелінійного рівняння Шредінгера параметричного збудження. Отримано рівняння, що описують еволюцію за часом параметрів збуреного солітона і фактично є збуреннями нелінійного рівняння Шредінгера

$$i\partial_t u+\frac{1}{2}\,\partial_x^2 u+|u|^2u=-i\beta u+i\alpha F(u,t,x),$$

де параметри $\alpha,\ \beta$ є малими. Знайдено умови захоплення фази солітона.

У роботі [5] у просторі $L_2(\mathbb{R})$ на всій осі досліджено одновимірний магнітний оператор Шредінгера

$$\Delta_{a,V}=\left(\frac{1}{i}\,\frac{d}{dx}+a(x)\right)^2+V(x),$$

який широко використовується у квантовій механіці для розв'язання важливих хімічних і фізичних проблем, зокрема при вивченні одновимірного руху частинки в зовнішньому електричному та магнітному полі. Тут $a(x)$ і $V(x)$ — магнітний і електричний потенціали відповідно. Встановлено умови, за яких може бути розвинена теорія Фредгольма до резольвентного рівняння цього оператора.

У [18] досліджено векторні нелінійні рівняння Шредінгера

$$i\,\frac{\partial q}{\partial t}+\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}-2\left(q^T,q\right)q(x,t)+\rho^2q(x,t)+\big(q_\pm^T,q(x,t)\big)\,q_\pm=0,$$

де q — n-компонентні векторнозначні функції.

У статті [19] розглянуто функціонально-різницеве рівняння Шредінгера.

Вільне рівняння Шредінгера й рівняння Клейна – Гордона, яке може бути зображено у вигляді матричного рівняння Шредінгера, досліджується в роботі [34]. Наведено огляд результатів стосовно асимптотики у вагових енергетичних нормах для розв'язків рівнянь Шредінгера і Клейна – Гордона:

$$i\dot{\psi}(x,t) = H\psi(x,t) := (-\Delta + V(x))\psi(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

де $n = 1, 2, 3,$

$$\ddot{\psi}(x,t) = \left(\Delta - m^2 - V(x)\right)\psi(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad m > 0,$$

або у матричній формі

$$i\dot{\Psi}(t) = \mathcal{H}\Psi(t),$$

де

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} \psi(t) \\ \dot{\psi}(t) \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{H} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i\left(\Delta - m^2 - V\right) & 0 \end{pmatrix},$$

у вагових простора Соболєва $H^s_\sigma = H^s_\sigma(\mathbb{R}^n)$ зі скінченними нормами

$$\|\psi\|_{H^s_\sigma} = \left\|\langle x\rangle^\sigma \langle\Delta\rangle^s \psi\right\|_{L^2} < \infty, \quad \langle x\rangle = \left(1 + |x|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

де $L^2 = L^2(\mathbb{R}^n)$. Викладено результати спектральної теорії розсіювання Агмона, Єнсена – Като, Єнсена – Ненсі та Мюрат, отримані у 1975 – 2001 рр. для рівняння Шредінгера, а також результати, отримані нещодавно А. І. Комечем, що є розвитком спектрального підходу, застосованого до релятивістських рівнянь. Варто зауважити, що дослідження обмежуються регулярним випадком, коли $\lambda = 0$ не є ані власним значенням, ані резонансом для оператора H. У статті наведено посилання на відомі роботи щодо рівняння Шредінгера й питання стійкості та асимптотичної стійкості розв'язків.

Нелінійне рівняння Колмогорова – Петровського – Піскунова для моделювання процесу розповсюдження генної хвилі, запропоноване в роботі [33], має форму логістичного рівняння з дифузією [89]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u[1 - u],$$

де $u(t,x)$ — щільність розподілу кількості особин, що мають домінантний ген. А в [4] досліджується узагальнення цього рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u\big[1 - u(t-h,x)\big],$$

яке містить запізнення $h > 0$. Для нього встановлено поведінку в околі стану рівноваги $u_0 \equiv 1$. Для випадку, коли коефіцієнт запізнення близький до $\dfrac{\pi}{2}$, поведінка розв'язків в околі u_0 визначається спеціальним нелінійним параболічним рівнянням типу Гінзбурга – Ландау. Такі задачі можна подати у формі крайових задач для еволюційного рівняння Шредінгера в певному функціональному просторі.

У статті [44] аналізується крайова задача для нелінійного рівняння Шредінгера з уявними коефіцієнтами:

$$i\,\frac{\partial\psi}{\partial t} + a_0\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - v(x)\psi + ia_1|\psi|^2\psi = f(x,t), \quad (x,t)\in\Omega,$$

$$\psi(x,0) = \varphi(x), \quad x\in(0,l),$$

$$\psi(0,t) = \psi(l,t) = 0, \quad t\in(0,T),$$

де $v(x)$ — вимірна і квадратично сумовна дійснозначна функція, що задовольняє умову

$$\|v\|_{W_2^1(0,l)} \le b, \quad b = \mathrm{const} > 0,$$

а функції $\varphi(x)$, $f(x,t)$ — задані вимірні комплекснозначні функції, що задовольняють умови

$$\varphi\in \dot W_2^2(0,l), \quad f\in \dot W_2^{1,1}(\Omega).$$

З розвитком квантового функціонального аналізу так звані квантові нелінійні рівняння Шредінгера набувають дедалі більшої популярності. Вони отримуються із класичних рівнянь стандартною процедурою квантування [59]. У наведеній роботі зазначається, що інтегровні системи за визначенням повинні бути розв'язними, але залишається ще багато відкритих питань. , досліджується квантове рівняння Шредінгера в гільбертовому просторі

$$i\,\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + 2c\Psi^*\Psi\Psi.$$

Це рівняння є гамільтоновим, якщо гамільтоніан дорівнює

$$H = \int\limits_0^L \partial_x\Psi^*\partial_x\Psi + \Psi^*\Psi^*\Psi\Psi\,dx.$$

Нині особливу увагу привертають “дивні хвилі” (freaks waves) або “хвилі-вбивці” (rogue waves), що є локальним короткочасним зростанням амплітуди хвилі або на поверхні глибокої води, або в оптичному хвильоводі, або в інших середовищах [61]. Окрім того, з'ясувалося, що “хвилі-вбивці” зустрічаються і в економіці. При дослідженні “дивних хвиль” звичайно розглядають нелінійне рівняння Шредінгера

$$i\,\psi_\xi + \frac{1}{2}\,\psi_{\tau\tau} + |\psi|^2\psi = 0,$$

а при виборі точних розв'язків звертаються до солітона Перегріна або брізера Ахмедієва. У наведеній роботі проводиться редукція еліптичного розв'язку розчепленого нелінійного рівняння Шредінгера та будуються його двофазові еліптичні розв'язки. Наводяться умови для параметрів існування періодичних хвиль-убивць. Показано, що виродження цих розв'язків призводить до солітонів Ахмедієва та Перегріна.

У [62] для дискретного оператора Шредінгера, що відповідає квантовому хвильоводу, з експоненціально спадним потенціалом εV доведено, що в околі особливостей незбуреної функції Гріна для малих ε існують квазірівні (власні значення або резонанси), для яких знайдено асимптотичні формули.

У статті [64] розглянуто спектральні властивості дискретного оператора Шредінгера в просторі квадратично сумовних двосторонніх послідовностей з уявним потенціалом скінченного рангу з нульовим середнім значенням. Показано, що при мализні таких потенціалів спектр досліджуваного оператора збігається зі спектром незбуреного оператора, а сам досліджений оператор подібний до самоспряженого.

У статті [65] йдеться про асимптотичний підхід, якому присвячено даний огляд. Він виник у процесі роботи над майже-періодичною задачею як інструмент, що використовується при вивченні спектра одновимірного майже-періодичного оператора Шредінгера з двома періодами, один з яких набагато більший за другий, і перетворився на самостійний метод. Рішення розглянути адіабатичну задачу виникло під впливом доповідей і робіт В. С. Буслаєва, присвячених асимптотикам розв'язків рівняння

$$-\frac{d^2\psi}{dx^2} + (V(x) + W(\varepsilon x))\psi = E\psi, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Дане рівняння виникає при адіабатичному збуренні періодичного рівняння Шредінгера.

Потужним інструментом при дослідженні крайових задач для рівняння типу Шредінгера є континуальне інтегрування і квантування за Фейнманом. Зазначимо тут роботи [6, 7]. У першій з них ідеться про фейнманівське квантування відображення функціоналів $F = F[p(\sigma), q(\sigma)]$ в оператори $\hat{F}$ у $L_2\left(\mathbb{R}^N\right)$ для спеціальної форми функціоналів

$$F = \exp\left[-t\int\limits_0^1 H(p(\sigma), q(\sigma))\, d\sigma\right], \qquad \operatorname{Re} H(p,q) \geq C, \quad t > 0.$$

Встановлено таку властивість: фейнманівське квантування переводить функцію від функціонала $\int_0^1 H d\sigma$ у функцію від оператора $\hat{H}_I \colon \varphi\left(\int_0^1 H d\sigma\right) \Rightarrow \varphi(\hat{H}_I)$. Континуальний інтеграл (KI) у гамільтоновій формі (континуальний інтеграл за фазовим простором) уперше ввів Р. Фейнман [90]. Результати досліджень еволюційних рівнянь із використанням фейнманівських інтегралів наведено в роботах [6, 7, 20 – 28, 38, 39, 42, 46, 49, 51, 53, 60, 63, 69, 70]. У роботі [20] вивчаються крайові задачі для рівняння Шредінгера з умовами на нескінченності. В [69] зазначається, що одним із засобів регуляризації причинних функцій в теорії поля є додаток уявної величини із квадратом значень мас відповідних полів. Вивчається питання про існування границі ренормованих фейнманівських амплітуд при переході до істинних значень мас полів. Доведено існування цієї границі як для теорій з ненульовими масами, так і для широкого класу ренормованих амплітуд у теоріях із нульовими масами.

У роботі [91] розглядаються рівняння Шредінгера з дробовою похідною.

У статті [71] вивчаються перетворення Дарбу планарного векторного поля типу Шредінгера. За допомогою властивості ізоголізації перетворення Дарбу доводиться інваріантність об'єкта теорії інтегровності Дарбу. Показано, що властивість інваріантності форми потенціалу важлива для того, щоб зберегти структуру перетвореного векторного поля. Як приклади отриманих результатів досліджуються деякі ілюстрації плоских векторних полів, що прийшли із суперсиметричної квантової механіки.

У роботі [92] розглядається дзета-функція Рімана як модель квантового хаосу.

У статті [93] досліджується рівняння

$$iu_t + \frac{1}{2}\ [\beta_1(t)u_{xx} + \beta_2(t)u_{yy} + \beta_3(t)u_{zz}] + \chi(t)|u|^2u + V(t,x,y,z)u = i\gamma(t)u$$

із зовнішнім потенціалом

$$V(t,x,y,z) = [V_{11}(t)x + V_{12}(t)y + V_{13}(t)z] + \left[V_{21}(t)x^2 + V_{22}(t)y^2 + V_{23}(t)z^2\right].$$

Це рівняння описує прискорений рух солітона і його відбиття від потенціалу.

У роботі [94] досліджується дробове напівлінійне рівняння типу Шредінгера з періодичною умовою

$$iu_t + (-\Delta)^\alpha u = \pm|u|^2u, \quad x \in \mathbb{T}, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$u(x,0) = u_0(x) \in H^s(\mathbb{T}),$$

де $\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

У статті [95] як можливі вирази універсального динамічного принципу розглядаються стохастичні диференціальні рівняння, що описують марковську еволюцію векторів станів у квантовому гільбертовому просторі. Детально досліджуються загальні особливості такого класу рівнянь і їхні динамічні наслідки. Показано, що стохастична еволюція викликає неперервну динамічну редукцію вектора стану на взаємно ортогональні підпростори. Конкретний вибір операторів народження і знищення є відповідним для опису неперервної спонтанної локалізації систем ідентичних частинок. Отримана таким чином динаміка практично не впливає на стандартну квантову еволюцію мікроскопічних систем, індукуючи дуже швидке пригнічення серед макроскопічно помітних станів. Класична поведінка макроскопічних об'єктів, а також зменшення хвильового пакета в квантовому процесі вимірювання можуть послідовно виводитися з постульованого універсального динамічного принципу. У роботі також розглядається стохастичне еволюційне рівняння Іто у вигляді

$$d \mid \psi = \left[-iHdt + dh - \frac{1}{2}\,(d\bar{h})^2\right] \Big| \, \psi,$$

де dh — випадковий самоспряжений лінійний оператор, а також рівняння

$$\frac{d\rho}{dt} = -i[H,\rho] + \gamma \int d^3x N(x)\rho N(x) - \frac{1}{2}\,\gamma \left(\int d^3x N^2(x), \rho\right).$$

У статті [96] досліджується періодичне кубічне нелінійне рівняння Шредінгера

$$-i\partial_t u + \Delta u = |u|^2u, \quad u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/(2\pi\mathbb{Z})^2, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$u\colon \mathbb{R}\times\mathbb{T}^2 \to \mathbb{C}.$$

Встановлюється існування розв'язків із поліноміальними за часом оцінками. Точніше, існує $c > 0$ така, що для довільного $K \gg 1$ можна знайти розв'язок u і час T такий, що $\|u(T)\|_{H_s} \geq K\|u(0)\|_{H_s}$.

Роботу [74] присвячено дослідженню майже періодичного оператора Шредінгера H, що визначається за правилом

$$H\varphi = \left(-\frac{d^2}{dt^2} + q(t)\right)\varphi = E\varphi,$$

і його дискретного аналога $H_d = (H_d u)_j = u_{j+1}u_{j-1} + \lambda v(j)u_j = Eu_j$. Досліджуються багаточастотні коливання відповідного оператора. Зазначимо також роботу [58].

У статті [75] описано n-рівневу квантову систему з реалізацією в n-вимірному гільбертовому просторі H зі скалярним добутком G, взятим за динамічною змінною. Розглянуто загальний лагранжіан для хвильової функції, рівняння руху та закони збереження, а також окремі випадки вільної еволюції хвилі з фіксованим G. Отримано модифіковані рівняння Шредінгера першого і другого порядків.

У роботі [97] наведено систематичний метод через нову ієрархію Eckhaus – Kundu, яка може породжувати вищі нелінійності в нелінійному рівнянні Шредінгера та в похідних нелінійного рівняння Шредінгера зі збереженням їхньої інтегровності.

У [98] визначено оператор розсіювання для нелінійного рівняння Шредінгера

$$iu_t - \Delta u + F(u) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Поряд із цим рівнянням розглянуто рівняння

$$iv_j - \Delta v = 0.$$

Якщо u є розв'язком першого рівняння, то існують такі пари розв'язків u_+ і u_- другого рівняння, що

$$\|u(t) - u_\pm(t)\| \to 0, \quad t \to \pm\infty,$$

де норма є $L^2(\mathbb{R}^3)$ нормою.

У статті [99] розглянуто динамічну систему, що породжується гамільтоніаном у чотиривимірному просторі та носить назву "конфігураційний квантовий кіт", динаміка якого нагадує класичного кота Арнольда. Вона описує заряджену частинку, що рухається в одиничному квадраті з періодичними крайовими умовами. Цю систему задає гамільтоніан вигляду

$$H_1 = \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}p_2^2 + x_2p_1 + x_1p_1 \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(t - n\tau).$$

Рівняння для оператора щільності має вигляд

$$\dot{\rho} + i(H\rho - \rho H) = 0.$$

У статті [76] розглянуто таку модель Шредінгера, яка може бути застосована до квантування мембрани.

У роботі [77] запропоновано інструментарій для розв'язку задач групової класифікації, який застосовується для отримання повної класифікації груп у класі нелінійного рівняння Шредінгера

$$i\psi_t + \Delta\psi + F(\psi, \psi^*) = 0.$$

У статті [100] наведено розв'язок одновимірного просторово-часового рівняння Шредінгера з дробовою похідною.

У роботі [101] розроблено чисельний розв'язок для такого двовимірного нелінійного рівняння Шредінгера з дробовою похідною:

$$iu_t + \gamma\left(\partial_x^\alpha u + \partial_y^\beta u\right) + \rho|u|^2 u = 0, \quad (x,y) \in \Omega, \quad t \in (0,T],$$

$$u(x,y,t) = 0, \quad (x,y) \in \partial\Omega, \quad t \in [0,T],$$

$$u(x,y,0) = u^0(x,y), \quad (x,y) \in \overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega.$$

Література

1. *Абловиц М. Дж.* Связанные нелинейные уравнения Шредингера для соприкасающихся жидкостей со свободной поверхностью // Теорет. и мат. физика. – 2009. – **159**, № 3. – С. 326 – 335.
2. *Арройо Э.* Вселенная погибнет от холода. Больцман. Термодинамика и энтропия // Наука. Величайшие теории. – М.: Де Агостини, 2015. – Т. 21. – 160 с.
3. *Ласерна Д. В.* На волне Вселенной. Шрёдингер. Квантовые парадоксы // Наука. Величайшие теории. – М.: Де Агостини, 2015. – Т. 5. – 168 с.
4. *Алешин С. В., Глызин С. Д., Кащенко С. А.* Уравнение Колмогорова – Петровского – Пискунова с запаздыванием // Модел. и анализ информ. систем. – 2015. – **22**, № 2. – С. 304 – 321.
5. *Алиев А. Р., Эйвазов Э. Х.* Резольвентное уравнение одномерного магнитного оператора Шредингера на всей оси // Сиб. мат. журн. – 2012. – **53**, № 6. – С. 1201 – 1208.
6. *Алимов А. Л.* О гамильтоновой форме фейнмановского континуального интеграла // Теорет. и мат. физика. – 1974. – **20**, № 3. – С. 302 – 307.
7. *Алимов А. Л.* О континуальном интеграле Фейнмана на нелинейном фазовом пространстве // Теорет. и мат. физика. – 1977. – **30**, № 2. – С. 159 – 167.
8. *Арсенин В. Я., Тихонов А. Н.* Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986. – 284 с.
9. *Боголюбов Н. Н. (мл.), Прикарпатский А. К., Курбатов А. М., Самойленко В. Г.* Нелинейная модель типа Шредингера: законы сохранения, гамильтонова структура и полная интегрируемость // Теорет. и мат. физика. – 1985. – **65**, № 2. – С. 271 – 284.
10. *Боголюбов Н. М.* О сходимости фейнмановских диаграммных разложений в модели Изинга // Теорет. и мат. физика. – 1977. – **30**, № 1. – С. 138 – 141.
11. *Бойчук А. А, Покутный А. А.* Теория возмущений операторных уравнений в пространствах Фреше и Гильберта // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 9. – С. 1181 – 1188.
12. *Бойчук А. А., Покутный А. А.* Приложение эргодической теории к исследованию краевой задачи с периодическим операторным коэффициентом // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 3. – С. 329 – 339.
13. *Бойчук А. А, Покутный А. А.* Теория бифуркаций уравнения Шредингера // Дифференц. уравнения. – 2017. – **53**, № 7. – С. 882 – 890.
14. *Бутко Я. А.* Формула Фейнмана – Каца – Ито для бесконечномерного уравнения Шредингера со скалярным и векторным потенциалом // Нелин. динамика. – 2006. – **2**, № 1. – С. 75 – 87.
15. *Визинеску А., Греку Д., Феделе Р., Де Никола С.* Гидродинамический подход Маделунга к обобщенному нелинейному уравнению Шредингера с производной потенциала. Специальные решения и их устойчивость // Теорет. и мат. физика. – 2009. – **160**, № 1. – С. 229 – 239.
16. *Гадыльшин Р. Р., Хуснуллин И. Х.* Возмущение оператора Шредингера узким потенциалом // Уфим. мат. журн. – 2011. – **3**, № 3. – С. 55 – 66.
17. *Гарифулин Р. Н.* Авторезонансное возбуждение солитона нелинейного уравнения Шредингера // Тр. Ин-та математики и механики. Урал. отд. РАН. – 2012. – **18**, № 2. – С. 62 – 66.
18. *Герджиков В. С., Костов Н. А., Вылчев Т. И.* Многокомпонентные нелинейные уравнения Шредингера с постоянными граничными условиями // Теорет. и мат. физика. – 2009. – **159**, № 3. – С. 438 – 447.
19. *Головачев Г. М., Смирнов А. О.* О спектральной кривой функционально-разностного уравнения Шредингера // Зап. науч. сем. ПОМИ. – 2010. – **374**. – С. 107 – 120.

20. *Голубева В. А.* Некоторые вопросы аналитической теории фейнмановских интегралов // Успехи мат. наук. – 1976. – **31**, Вып. 2(188). – С. 135 – 202.

21. *Голубева В. А.* Об исследовании фейнмановского интеграла гомологическим методом // Теорет. и мат. физика. – 1970. – **3**, № 3. – С. 405 – 419.

22. *Голубева В. А., Энольский В. З.* О дифференциальных уравнениях для фейнмановской амплитуды однопетлевого графа с четырьмя вершинами // Мат. заметки. – 1978. – **23**, № 1. – С. 113 – 119.

23. *Гоф Дж., Обрезков О. О., Смолянов О. Г.* Рандомизированные гамильтоновы интегралы Фейнмана и стохастические уравнения Шредингера – Ито // Изв. РАН. Сер. мат. – 2005. – **69**, № 6. – С. 3 – 20.

24. *Далецкий Ю. Л.* Континуальные интегралы, связанные с операторными эволюционными уравнениями // Успехи мат. наук. – 1962. – **17**, вып. 5(107). – С. 3 – 115.

25. *Демков Ю. Н., Курасов П. Б.* Теорема Вигнера – фон Неймана: отталкивание уровней и вырожденные состояния // Теорет. и мат. физика. – 1987. – **72**, № 3. – С. 403 – 415.

26. *Джеффрис Б., Джонсон Г. В.* Операторное исчисление Фейнмана для семейств некоммутирующих операторов: тензорные произведения, упорядоченные носители и выпутывание экспоненциального множителя // Мат. заметки. – 2001. – **70**, вып. 6. – С. 815 – 838.

27. *Дядькин И. Г.* Уравнение Фейнмана – Шредингера и метод статистических возмущений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1968. – **8**, № 6. – С. 1269 – 1279.

28. *Замалин В. М., Норман Г. Э.* О методе Монте-Карло в фейнмановской формулировке квантовой статистики // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1973. – **13**, № 2. – С. 408 – 420.

29. *Заславский Г. М., Сагдеев Р. З.* Введение в нелинейную физику: от маятника до турбулентности и хаоса. – М.: Наука, 1988. – 368 с.

30. *Земляная Е. В., Алексеева Н. В.* Осциллирующие солитоны в нелинейном уравнении Шредингера с диссипацией и накачкой // Теорет. и мат. физика. – 2009. – **159**, № 3. – С. 536 – 545.

31. *Качковский И., Филонов Н.* Абсолютная непрерывность спектра периодического оператора Шредингера в многомерном цилиндре // Алгебра и анализ. – 2009. – **21**, № 1. – С. 133 – 152.

32. *Качковский И., Филонов Н.* Абсолютная непрерывность спектра периодического оператора Шредингера в слое и гладком цилиндре // Зап. науч. сем. ПОМИ. – 2010. – **385**. – С. 69 – 82.

33. *Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов Н. С.* Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием вещества, и его применение к одной биологической проблеме // Бюл. МГУ. Сер. А. Математика и Механика. – 1937. – **1**, № 6. – С. 1 – 26.

34. *Копылова Е. А.* Дисперсионные оценки для уравнения Шредингера и Клейна – Гордона // Успехи мат. наук. – 2010. – **65**, № 1(391). – С. 97 – 144.

35. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1967. – 464 с.

36. *Крейн С. Г.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1972. – 544 с.

37. *Курасов Б. П., Павлов Б. С.* Электрон в однородном кристалле из точечных атомов с внутренней структурой. II // Теорет. и мат. физика. – 1988. – **74**, № 1. – С. 82 – 93.

38. *Ломоносов В. И.* Об одной конструкции сплетающего оператора // Функцион. анализ и его прил. – 1980. – **14**, № 1. – С. 67 – 68.

39. *Ломоносов В. И.* Об инвариантных подпространствах семейства операторов, коммутирующих с вполне непрерывным // Функцион. анализ и его прил. – 1973. – **7**, № 3. – С. 55 – 56.

40. *Лосев А. Г., Мазепа Е. А.* Ограниченные решения уравнения Шредингера на римановых произведениях // Алгебра и анализ. – 2001. – **13**, вып. 1. – С. 84 – 110.

41. *Ляшко С. И., Номировский Д. А., Петунин Ю. И., Семенов В. В.* Двадцатая проблема Гильберта. Обобщенные решения операторных уравнений. – М.: Диалектика, 2009. – 185 с.

42. *Маслов В. П.* К методу стационарной фазы для континуального интеграла Фейнмана // Теорет. и мат. физика. – 1970. – **2**, № 1. – С. 30 – 35.

43. *Маслов В. П., Чеботарев А. М.* Обобщенная мера в континуальном интеграле Фейнмана // Теорет. и мат. физика. – 1976. – **28**, № 3. – С. 291 – 307.

44. *Махмудов Н. М.* Разрешимость краевых задач для уравнения Шредингера с чисто мнимыми коэффициентами // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. – 2011. – **11**, вып. 1. – С. 31 – 38.

45. *Махмудов Н. М.* Об одной задаче оптимального управления для уравнения Шредингера с вещественнозначным коэффициентом // Изв. вузов. Математика. – 2010. – **11**. – С. 31 – 40.

46. *Менский М. Б.* Фейнмановское квантование и S-матрица для спиновых частиц в римановом пространстве-времени // Теорет. и мат. физика. – 1974. – **18**, № 2. – 202 с.

47. *Муминов М. Э.* О бесконечности числа собственных значений на лакуне существенного спектра оператора Шредингера трех частиц на решетке // Теорет. и мат. физика. – 2009. – **159**, № 2. – С. 299 – 317.

48. *Насибов Ш. М.* О точной константе в одном неравенстве Соболева – Ниренберга и ее приложении к уравнению Шредингера // Изв. РАН. Сер. мат. – 2009. – **73**, № 3. – С. 127 – 150.

49. *Осипов Э. П.* Интеграл Фейнмана для экспоненциального взаимодействия в четырехмерном пространстве-времени. I // Теорет. и мат. физика. – 1981. – **47**, № 3. – С. 307 – 314.

50. *Павлов Б. С.* Электрон в однородном кристалле из точечных атомов с внутренней структурой. I // Теорет. и мат. физика. – 1987. – **72**, № 3. – С. 403 – 415.

51. *Петрина Д. Я.* О суммировании вкладов от диаграмм Фейнмана, теорема существования // Изв. АН СССР. – 1968. – **32**. – С. 1052 – 1074.

52. *Покутний О. О.* Узагальнено-обернений оператор у просторах Фреше, Банаха та Гільберта // Вісн. Київ. ун-ту. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2013. – № 4. – С. 158 – 161.

53. *Попов В. С.* Фейнмановский метод распутывания операторов и теория представлений групп // Успехи физ. наук. – 2007. – **177**, № 12. – С. 1319 – 1340.

54. *Робертсон А. П., Робертсон В. Дж.* Топологические векторные пространства. – М.: Мир, 1967. – 257 с.

55. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики: в 4 т. – М.: Мир, 1977. – Т. 1. – 360 с.

56. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики: в 4 т. – М.: Мир, 1978. – Т. 2. – 395 с.

57. *Рубан В. П.* О нелинейном уравнении Шредингера для волн на неоднородном течении // Письма в журн. эксперим. и теорет. физики. – 2012. – **95**, вып. 9. – С. 550 – 556.

58. *Самойленко А. М., Петришин Р. И.* Об интегральных многообразиях многочастотных колебательных систем // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1972. – **36**. – С. 209 – 233.

59. *Славнов Н. А.* Введение в теорию квантовых интегрируемых систем. Квантовое нелинейное уравнение Шредингера // Лекцион. курсы НОЦ. – 2011. – **18**. – С. 3 – 118.

60. *Смирнов В. А.* Инфракрасные и ультрафиолетовые расходимости коэффициентных функций фейнмановских диаграмм как функционалов из S'. II // Теорет. и мат. физика. – 1981. – **46**, № 2. – С. 199 – 212.

61. *Смирнов А. О.* Эллиптический бризер нелинейного уравнения Шредингера // Зап. науч. сем. ПОМИ. – 2012. – **398**. – С. 209 – 222.

62. *Тинюкова Т. С.* Квазиуровни дискретного оператора Шредингера для квантового волновода // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. – 2011. – Вып. 2. – С. 88 – 97.

63. *Фадеев Л. Д.* Интеграл Фейнмана для сингулярных лагранжианов // Теорет. и мат. физика. – 1969. – **1**, № 1. – С. 3 – 18.

64. *Фадеев М. М.* О спектральных свойствах дискретного оператора Шредингера с чисто мнимым финитным потенциалом // Мат. заметки. – 2009. – **85**, вып. 3. – С. 451 – 455.

65. *Федотов А. А.* Комплексный метод ВКБ адиабатических возмущений периодического оператора Шредингера // Зап. науч. сем. ПОМИ. – 2010. – **379**. – С. 142 – 178.

66. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. – М.: Мир, 1985. – 376 с.

67. *Хуснуллин И. Х.* Возмущенная краевая задача на собственные значения для оператора Шредингера на отрезке // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2010. – **50**, № 4. – С. 679 – 698.

68. *Чубурин Ю. П.* Квазиуровни двухчастичного оператора Шредингера с возмущенным периодическим потенциалом // Теорет. и мат. физика. – 2009. – **158**, № 1. – С. 115 – 125.

69. *Чудинович И. Ю., Щербина В. А.* Ренормированные фейнмановские амплитуды для полей с фиксированными массами // Теорет. и мат. физика. – 1976. – **27**, № 1. – С. 24 – 37.

70. *Чуешов И. Д.* О слабых предельных точках фейнмановских интегральных произведений // Функцион. анализ и его прил. – 1978. – **12**, № 1. – С. 90 – 91.

71. *Acosta-Humanez P. B., Pantazi Ch.* Darboux integrals for Schrödinger planar vector fields via Darboux transformations // SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. – 2012. – **8(043)**. – 26 p.

72. *Caliceti E., Cannata F., Graffi S.* $\mathcal{PT}$ symmetric Schrödinger operators: reality of the perturbed eigenvalues // SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. – 2010. – **6(009)**. – 8 p.

73. *Durhuus B., Gayral V.* The scattering problem for a noncommutative nonlinear Schrödinger equation // SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. – 2010. – **6 (046)**. – 17 p.

74. *Johnson R.* Cantor spectrum for the quasi-periodic Schrödinger equation // J. Differential Equations. – 1991. – 91. – P. 88 – 110.

75. *Kovalchuk V., Slawianowski J. J.* Hamiltonian systems inspired by the Schrödinger equation // SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. – 2008. – **4(046)**. – 9 p.

76. *Nakayama Yu.* Scrödinger-like dilaton gravity // SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. – 2011. – **7(014)**. – 12 p.

77. *Нікітін А. Г., Попович Р. О.* Групова класифікація нелінійних рівнянь Шрьодінгера // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 8. – С. 1048 – 1052.

78. *Puig J.* Cantor spectrum for the almost Mathieu operator // Comm. Math. Phys. – 2004. – **244**. – P. 297 – 309.

79. *Quesne C.* Quadratic algebra approach to an exactly solvable position-dependent mass Schrödinger equation in two dimensions // SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. – 2007. – **3(067)**. – 14 p.

80. *Quesne C.* Point canonical transformation versus deformed shape invariance for position-dependent mass Schrödinger equations // SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. – 2009. – **5(046)**. – 17 p.

81. *Prigogine N.* From being to becoming: time and complexity in physical sciences. – San Francisco: Freeman and Co., 1980. – 328 p.

82. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. 2nd ed. – Berlin; Boston: Walter De Gruyter GmbH, 2016. – 296 p.

83. *Boichuk A. A., Pokutnyi A. A.* Solutions of the Schrodinger equation in a Hilbert space // Bound. Value Probl. – 2014. – **4**. – 9 p. http://www.boundaryvalueproblems.com/content/2014/1/4

84. *Покутний О. О.* Представлення розв'язків крайових задач для рівняння Шредінгера у просторі Гільберта // Нелін. коливання. – 2014. – **17**, № 1. – С. 102 – 111; ***English translation:*** J. Math. Sci. – 2015. – **205**, № 6. – P. 821 – 830.

85. *Pokutnyi O. O.* Exponential dichotomy and bounded solutions of the Schrodinger equation // Chaotic Model. Simul. – 2013. – **4**. – P. 625 – 630.

86. *Devaney R. L.* An introduction to chaotic dynamical systems. 2nd ed. // Advances in Mathematics and Engineering. – CRC Press, 2003. – 360 p.

87. *Planck M.* Vorlesungen uber Thermodynamik. – Leipzig, 1930.

88. *Einstein A.* Zum quantensatz von sommerfeld und epstein // Verhandlungen der Deutchen Physikalischen Gesellschaft. – 1917. – **19**. – S. 82 – 92.

89. *Murray J. D.* Mathematical Biology: I. An introduction. – New York: Springer, 2002. – 576 p.

90. *Feynman R. P.* An operator calculus having applications in quantum electrodynamics // Phys. Rev. – 1951. – **84**, № 1. – P. 108 – 128.

91. *Narahari Achar B. N., Bradley T. Ya., Hanneken J. W.* Time fractional Schrodinger equation revisited // Adv. Math. Phys. – 2013. – Article ID 290216. – 11 p. http://dx.doi.org/10.1155/2013/290216

92. *Quantum* chaos and statistical nuclear physics // Lect. Notes Phys. – 1986. – **263**. – 378 p.

93. *Chao-Qing Dai, Hai-Ping Zhu.* Superposed Akhmediev breather of the (3+1)-dimensional generalized nonlinear Schrodinger equation with external potentials // Ann. Physics. – 2014. – **341**. – P. 142 – 152.

94. *Demirbas S., Erdogan M. B., Tzirakis N.* Existence and uniqueness theory for the fractional Schrödinger equation on the torus // arXiv:1312.5249. – 2013. – 19 p.

95. *Ghirardi G.-C., Pearle Ph., Rimini A.* Markov processes in Hilbert space and continuous spontaneous localization of systems of identical particles // Phys. Rev. A. – 1990. – **42**, № 1. – P. 78 – 89.

96. *Guardia M., Kaloshin V.* Growth of Sobolev norms in the cubic defocusing nonlinear Schrödinger equation // J. Eur. Math. Soc. (JEMS). – 2015. – **17**. – P. 71 – 149.

97. *Anjan K.* Integrable hierarchy of higher nonlinear Schrödinger type equations // SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. – 2006. – **2(078)**. – 12 p.

98. *Jeng-Eng Lin, W. A. Strauss.* Decay and scattering of solutions of a nonlinear Schrödinger equation // J. Funct. Anal. – 1978. – **30**. – P. 245 – 263.

99. *Man'ko V. I., Vilela Mendes R.* Lyapunov exponent in quantum mechanics. A phase-space approach // Phys. D. – 2000. – **145**. – P. 330 – 348.

100. *Saxena R. K., Saxena R., Kalla S. L.* Solution of space-time fractional Schrodinger equation occurring in quantum mechanics // Fract. Calc. Appl. Anal. – 2010. – **13**, № 2. – P. 177 – 190.

101. *Zhao X., Sun Zh.-Zh., Hao Zh.* A fourth-order compact ADI scheme for two-dimensional nonlinear space fractional Schrödinger equation // SIAM J. Sci. Comput. – 2014. – **36**, № 6. – P. A2865 – A2886.

Одержано 25.02.19