

## ТРИКОЛЬОРОВИЙ ГРАФ ПОТОКУ МОРСА НА КОМПАКТНІЙ ПОВЕРХНІ З МЕЖЕЮ

О. О. Пришляк, А. А. Прус

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка  
просп. акад. Глушкова, 4е, Київ, 03127, Україна  
e-mail: prishlyak@yahoo.com  
asp00pr@gmail.com

We consider Morse flows on compact surfaces with boundary. A complete topological invariant of these flows (an equipped three-color graph) is constructed. The vertices of this graph correspond to standard domains on the surface in the form of a curvilinear triangle or quadrangle. We find conditions under which this three-color graph specifies a Morse flow. We calculate the number of topologically nonequivalent Morse flows with at most five standard domains on surfaces with boundary.

Розглянуто потоки Морса на компактних поверхнях з межею. Побудовано повний топологічний інваріант даних потоків — оснащений трикольоровий граф. Вершинам цього графа відповідають стандартні області на поверхні, що мають вигляд криволінійного трикутника або чотирикутника. Знайдено умови, за яких такий граф задає потік Морса. Обраховано кількість топологічно нееквівалентних потоків Морса з не більше ніж п'ятьма стандартними областями на поверхнях з межею.

**1. Вступ.** На кожному замкненому многовиді векторне поле завжди породжує потік. У випадку компактного многовиду з межею векторне поле буде породжувати потік тоді і тільки тоді, коли воно дотикається до межі в кожній її точці [1].

Векторне поле  $X$  на многовиді  $M$  називається *структурно стійким*, якщо у множині всіх векторних полів на многовиді  $M$  існує окіл  $U$  такий, що довільне поле  $Y \in U$  топологічно еквівалентне полю  $X$  [2].

На замкнених поверхнях структурно стійкі векторні поля є полями Морса – Смейла. Для многовидів більшої розмірності крім векторних полів Морса – Смейла існують інші структурно стійкі векторні поля. Для многовидів з межею аналог полів Морса – Смейла описано в роботах [3, 4].

Ідея класифікації двовимірних потоків належить О. Андронову та Л. Понтрягіну [5]. Топологічна класифікація векторних полів Морса – Смейла на замкнених поверхнях зроблена в роботах М. Пейксото [6], В. В. Шарка та А. А. Ошемкова [7], на тривимірних многовидах для полів з певними обмеженнями — Я. Л. Уманського [8], О. О. Пришляка [9]. У роботі [10] наведено топологічну класифікацію  $m$ -полів на 2- та 3-вимірних многовидах з межею.

Структурну стійкість полів Морса – Смейла на замкнених многовидах довели Пейксото [6, 11], Робінсон, Персель.

Достатні умови для структурної стійкості на замкнених многовидах отримали (за гіпотезою Паліса – Смейла [12]) Роббін [13], Робінсон [3]. Пізніше Мане [14] закінчив доведення необхідної умови для  $C^1$  структурної стійкості.

Траєкторну еквівалентність оптимальних потоків Морса на замкнених поверхнях до-

сліджено в роботі [15].

У даній статті розглядаються потоки Морса на поверхні з межею. Аналогічно до потоків на замкнених поверхнях, на поверхнях з межею потоки Морса утворюють всюди щільну множину [4]. Серед потоків, у яких множина неблукаючих точок складається зі скінченного числа траєкторій, структурно стійкими є лише потоки Морса. Метою роботи є застосування трикольорових графів для вивчення топологічних властивостей потоків Морса на компактних поверхнях з межею.

**2. Трикольорові графи.** Будемо розглядати векторні поля, які дотичні до межі компактного многовиду. Такі поля породжують потік на ньому.

**Означення 1.** Векторне поле  $X$  на гладкому многовиді  $M$  з межею  $\partial M$  називається полем Морса, якщо воно задовольняє такі умови:

- 1) множина  $\Omega(X)$  неблукаючих точок  $X$  складається зі скінченного числа особливих точок і замкнених орбіт і всі вони гіперболічні;
- 2) стійкі та нестійкі многовиди двох елементів з  $\Omega(X)$  перетинаються трансверсально на  $\text{Int } M$ , а якщо для двох таких елементів існує точка нетрансверсального перетину на межі, то принаймні один із цих елементів є особливою точкою [2].

Потік, породжений векторним полем Морса, будемо називати потоком Морса [16].

**Означення 2.** Граф  $T$  будемо називати трикольоровим графом, якщо всі його вершини мають степінь не більше 3, а ребра розфарбовані у три кольори таким чином, що у кожній вершині сходяться ребра різних кольорів. Кольори позначатимемо буквами  $s$ ,  $t$ ,  $u$ . Два трикольорові графи називатимемо ізоморфними, якщо вони ізоморфні зі збереженням розфарбування (тобто при ізоморфізмі ребра, позначені буквами  $s$ ,  $t$ ,  $u$ , переходять у ребра, позначені тими ж буквами). Коротко будемо називати ці ребра  $s$ -ребрами,  $t$ -ребрами та  $u$ -ребрами.

Опишемо процедуру зіставлення кожному потоку Морса деякого трикольорового графа.

Нехай  $v$  — потік Морса на замкненій поверхні  $M$ , який має хоча б одну сідлову особливу точку. Розрізавши  $M$  по всіх сепаратрисах потоку  $v$ , ми розіб'ємо поверхню на канонічні області, що мають вигляд криволінійних  $n$ -кутників, приклади яких зображені на рис. 1. Якщо поверхня не замкнена (компактна з межею), то для потоку Морса може існувати траєкторія  $\gamma_{\partial}$ , що з'єднує сідла і лежить на межі поверхні. Подвоївши поверхню, отримаємо  $\Omega$ -потік на подвоєній поверхні  $DM$  [17]. Це потік, який має ті ж самі властивості, що й потік Морса, за виключенням того, що можуть існувати траєкторії, які йдуть із сідла в сідло. Тоді області, що містять у своїй межі траєкторію  $\gamma_{\partial}$ , будуть криволінійними  $n$ -кутниками на  $DM$ , вершини яких — особливі точки поля  $v$  (одне джерело, один стік, а решта — сідла), а сторони — сепаратриси поля  $v$  [17]. Такі  $n$ -кутники ми будемо називати канонічними  $n$ -кутниками (у статті [17] вони названі комірками).

При цьому на поверхні сторони канонічного  $n$ -кутника можуть склеюватися між собою. У  $n$ -кутниках, які мають вигляд як на рис. 1, внутрішні траєкторії поля  $v$  проходять із джерела у стік. Розрізавши кожен із них по одній із таких траєкторій, отримаємо розбиття даних  $n$ -кутників на  $m$ -кутники. Якщо  $n$ -кутник містить траєкторію, що лежить у  $\partial M$ , то будемо його розрізати саме по цій траєкторії. Отримані  $m$ -кутники будуть трикутниками або чотирикутниками на поверхні  $M$ . Це впливає з того, що коли існує траєкторія, яка з'єднує сідла, тоді ця траєкторія лежить на межі  $\partial M$ , а отже, сусідні до неї сепаратриси є внутрішніми і, отже, одна з них починається у джерелі, а інша закінчується у стоці. Разом з траєкторією, що йде з джерела у стік, така область утворює криволінійний чотирикутник. Решта траєкторій, як і для замкнених поверхонь, будуть трикутниками. За побудовою

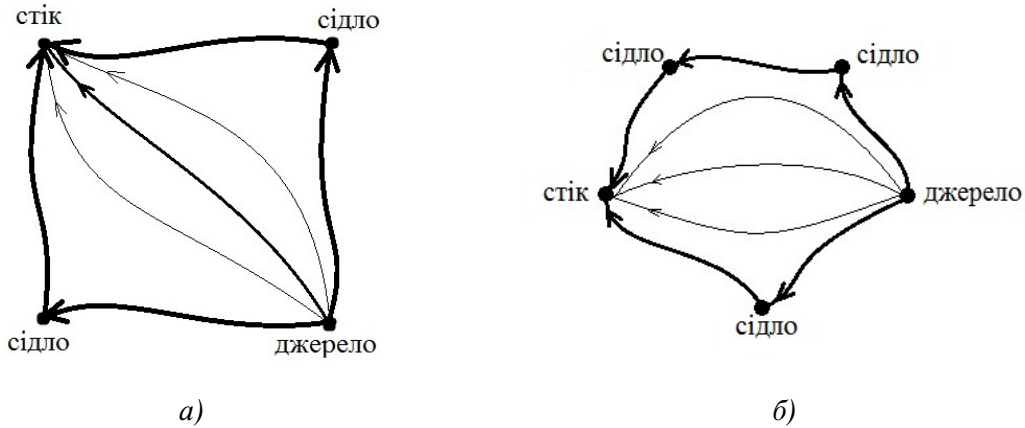


Рис. 1. Канонічні області, утворені розрізуванням поверхні по всіх сепаратрисах на  $DM$  (канонічні  $n$ -кутники).

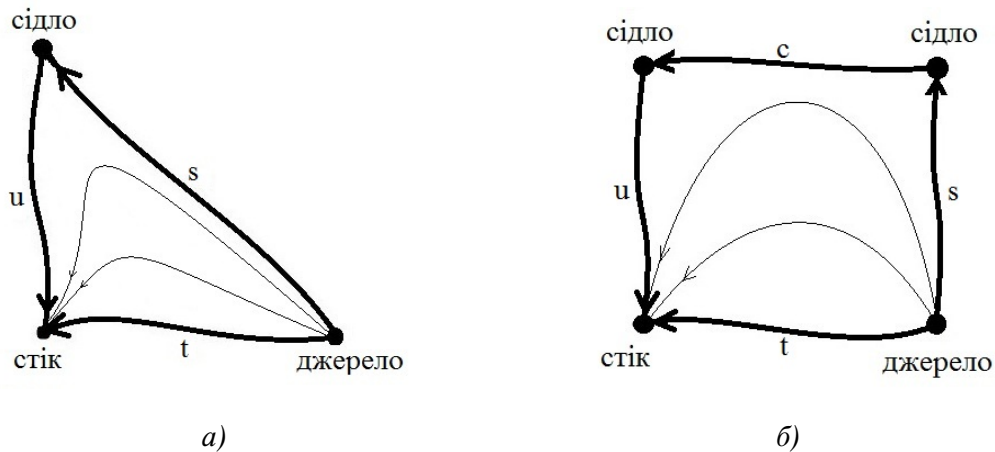


Рис. 2. Стандартні області на  $M$ .

сторони трикутника розфарбовані у три різних кольори  $s$ ,  $t$ ,  $u$  (рис. 2 а). Сепаратриси, що з'єднують сідла, будемо фарбувати у колір  $c$ . Отже, чотирикутники будуть розфарбовані у кольори  $u$ ,  $s$ ,  $t$ ,  $c$ . При цьому  $c$ -траєкторія буде протилежною до  $t$ -траєкторії, а  $u$ -траєкторія протилежною до  $s$ -траєкторії (рис. 2 б). Сторони одного трикутника або чотирикутника вже не можуть бути склеєними між собою у многовиді  $M$ . Це впливає з того, що сторони кожного трикутника або чотирикутника утворені траєкторіями різних типів:

- 1) траєкторія, яка йде з джерела в сідла ( $s$ -траєкторія);
- 2) траєкторія, яка йде із сідла у стік ( $u$ -траєкторія);
- 3) траєкторія, яка йде з джерела у стік ( $t$ -траєкторія);
- 4) траєкторія, що з'єднує сідла ( $c$ -траєкторія).

Відмітимо, що  $t$ -траєкторії, якщо вони не належать  $\partial M$ , визначені неоднозначно.

Таким чином, отримано розбиття многовиду  $M$  на трикутники та чотирикутники, які ми будемо називати *стандартними областями* (рис. 2).

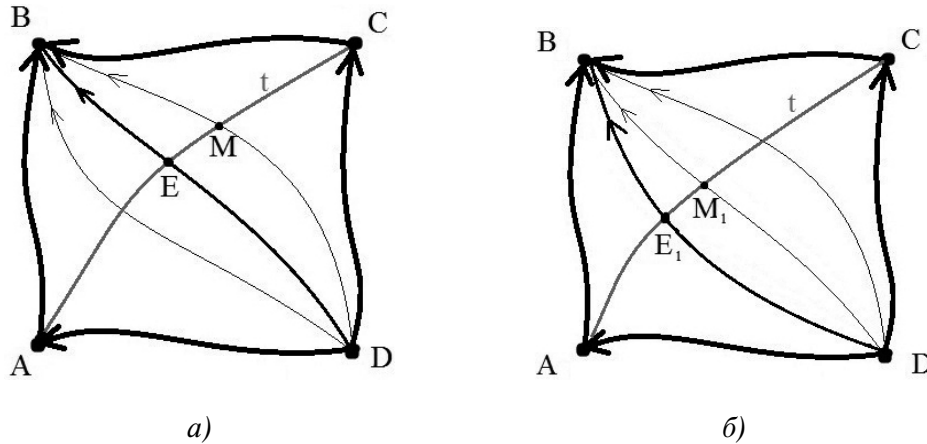


Рис. 3

Побудуємо трикольоровий граф  $T$ , що відповідає даному розбиттю  $M$ . Кожній канонічній області поставимо у відповідність вершину даного графа. Вершини ділитимуться на два типи: чорні вершини відповідатимуть трикутникам, а білі вершини — чотирикутникам. Якщо дві канонічні області мають спільну сторону, утворену  $s$ -траєкторією,  $t$ -траєкторією або  $u$ -траєкторією, то з'єднаємо вершини, що відповідають цим областям, ребром з відміткою  $s$  ( $s$ -ребром), з відміткою  $t$  ( $t$ -ребром) або з відміткою  $u$  ( $u$ -ребром) відповідно.

Зауважимо, що не існує областей, які містять спільну сторону, утворену  $c$ -траєкторією, тому що дана траєкторія може лежати лише на межі многовиду  $M$ .

**Лема 1.** При побудові трикольорового графа, що відповідає потоку Морса:

- 1) результат не залежить від вибору  $t$ -траєкторій у кожному канонічному  $n$ -кутнику;
- 2) топологічно траєкторно еквівалентним потокам відповідають ізоморфні трикольорові графи.

**Доведення.** 1) При розрізуванні канонічного  $n$ -кутника по двох різних  $t$ -траєкторіях побудуємо гомеоморфізм, який переводить одну з отриманих при цьому областей в іншу, наприклад, область  $BCDE$  в область  $BCDE_1$  (рис. 3). Якщо при розрізуванні отримаємо  $p$ -кутник та  $q$ -кутник, то на траєкторії  $t$  відмітимо  $p - 2$  точки, які розбивають цю траєкторію на рівні за довжиною дуги, а також  $q - 2$  точки, які також розбивають траєкторію на рівні за довжиною частини. При цьому виділені точки будуть відповідати сідлам  $p$ -кутників та  $q$ -кутників. Наприклад, якщо отримаємо 2 трикутники, то на  $t$ -траєкторії буде відмічена одна точка (її середина), що є спільною виділеною точкою для обох трикутників. Проведемо із сідлових точок на межі області до відповідних виділених точок на траєкторії  $t$  криві, які перетинають кожен траєкторію в одній точці. Побудуємо гомеоморфізми  $\alpha$  між кривими  $CE$  в області  $BCDE$  та відповідними кривими  $CE_1$  в  $BCDE_1$ . Довільна траєкторія, що йде з джерела у стік, розбивається побудованими кривими на декілька дуг, на кінцях яких задано відображення  $\alpha$  або тотожне. Наприклад, траєкторія  $DMB$  розбивається точкою  $M$  на дві дуги. Точки  $B$  і  $D$  відображаються тотожним відображенням, а точка  $M$  — відображенням  $\alpha$  в  $M_1$ . На кожній дузі  $BM$  задамо гомеоморфізм в  $BM_1$  пропорційно довжині дуги. У такий спосіб побудовані гомеоморфізми в сукупності задають шуканий гомеоморфізм трикутника.

2) Нехай  $h$  — гомеоморфізм між потоками  $v_1$  та  $v_2$ . Даний гомеоморфізм переводить канонічні чотирикутники потоку  $v_1$  у канонічні чотирикутники потоку  $v_2$  (зокрема, сепаратриси потоку  $v_1$  у сепаратриси потоку  $v_2$ ). Враховуючи твердження п. 1 леми 1,  $h$  переводить трикутники одного потоку в трикутники іншого. Тобто канонічні області одного потоку переходять у канонічні області іншого.

Лему 1 доведено.

Нагадаємо, що при побудові трикольного графа за потоком Морса кожному трикутнику ми ставимо у відповідність чорну вершину, а кожному чотирикутнику — білу вершину.

**Означення 3.** Триколовий граф, вершини якого розфарбовані в два кольори (білий та чорний), будемо називати оснащеним. Два оснащені триколові графи називаються ізоморфними, якщо існує їхній ізоморфізм як простих графів, який зберігає розфарбування ребер і розфарбування вершин.

**Теорема класифікації.** Два потоки Морса  $v_1$  і  $v_2$  на многовидах  $M_1$  та  $M_2$  будуть топологічно траєкторно еквівалентними тоді і тільки тоді, коли відповідні їм оснащені триколові графи  $T(v_1)$  та  $T(v_2)$  будуть ізоморфними.

**Доведення.** В одну сторону теорему доведено (з урахуванням леми 1).

Нехай графи  $T(v_1)$  та  $T(v_2)$  ізоморфні. Цей ізоморфізм індукує бієкцію між канонічними областями многовиду  $M_1$  та многовиду  $M_2$ . За означенням графу  $T(v)$  ця бієкція узгоджена з перетинами стандартних областей: якщо дві стандартні області многовиду  $M_1$  мають спільну сторону (вершину), то відповідні їм стандартні області многовиду  $M_2$  також мають спільну сторону (вершину) такого ж типу. Нагадаємо, що за побудовою вершинами кожної стандартної області є джерело, стік або сідло, що й визначає тип кожної вершини та кожної сторони. Таким чином, бієкція між стандартними областями однозначно породжує бієкцію між вершинами цих областей, тобто між особливими точками потоків  $v_1$  та  $v_2$ , причому ці бієкції узгоджені.

Гомеоморфізм  $h: M_1 \rightarrow M_2$ , який встановлює топологічну траєкторну еквівалентність потоків  $v_1$  та  $v_2$ , будується таким чином:

- 1) в особливих точках потоку  $v_1$  відображення  $h$  визначено вказаною бієкцією;
- 2) відображення  $h$  продовжується на сепаратриси потоку  $v_1$  так, щоб кожна з них гомеоморфно відображалась у відповідну сепаратрису потоку  $v_2$ ;
- 3) для кожного канонічного  $n$ -кутника (рис. 1) потоку  $v_1$  відображення  $h$ , задане на його границі (і яке відображає його в границю деякого канонічного  $n$ -кутника потоку  $v_2$ ), продовжується на весь канонічний  $n$ -кутник так, щоб це був гомеоморфізм, який переводить траєкторії в траєкторії. Існування даного продовження доводиться стандартними методами (див. статті [18, 19]).

Теорему доведено.

Вершини оснащеного трикольного графа будемо поділяти на два типи: *внутрішні* — з них виходить і  $u$ -ребро, і  $s$ -ребро; *граничні* — з них виходить або  $u$ -ребро, або  $s$ -ребро. Наявність  $t$ -ребра на тип не впливає.

**Зауваження 1.** Гранична вершина відповідає трикутнику,  $s$ - або  $u$ -траєкторія якого лежить на межі.

**Означення 4.** Допустимим оснащеним триколовим графом називається граф, що має такі властивості:

- 1) кожне ребро графа позначене однією з трьох літер:  $s$ ,  $t$ ,  $u$ , а кожна вершина є білою або чорною;

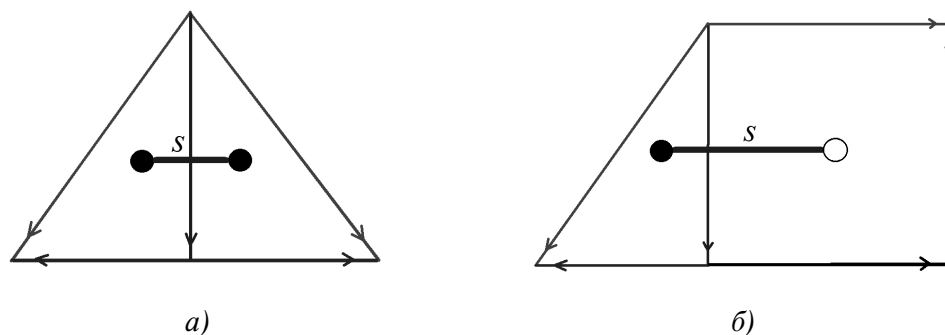


Рис. 4

- 2) з кожної вершини не може виходити два ребра одного типу;
- 3) для кожної чорної внутрішньої вершини існує  $su$ -цикл довжини 4, що її містить;
- 4) якщо дві чорні вершини з'єднані  $u$ - або  $s$ -ребром і одна з них є граничною, то граничною буде й інша;
- 5) кожна біла вершина є внутрішньою; при цьому якщо вона з'єднана з чорною вершиною  $u$ -ребром ( $s$ -ребром), то дана чорна вершина буде граничною.

**Теорема 1.** Оснащений трикольоровий граф, побудований за потоком Морса, є допустимим.

**Доведення.** Доведемо виконання властивостей 1–5 для трикольорового графа, побудованого за потоком Морса.

Властивість 1 впливає з побудови графа.

Властивість 2 впливає з того, що у трикутників та чотирикутників усі сторони різних кольорів.

Властивість 3: з означення внутрішньої чорної вершини випливає, що їй відповідає трикутник,  $s$ ,  $u$ -ребра якого є внутрішніми. Отже, спільна для них вершина є сідловою і внутрішньою (тому що з граничної сідлової вершини виходить лише одна сепаратриса). Тоді ця вершина є вершиною ще трьох внутрішніх трикутників і в двоїстому графі вона лежить всередині  $su$ -циклу довжини 4.

Властивість 4:  $s$ -ребру або  $u$ -ребру, що з'єднує дані вершини, відповідає сепаратриса граничної сідлової точки. Отже, суміжні до неї трикутники є граничними і обидві відповідні вершини є граничними (рис. 4 а).

Властивість 5 доводиться аналогічно до властивості 4 (рис. 4 б).

**Теорема реалізації.** Для зв'язного трикольорового графа, що має властивості 1–5, існує потік Морса на зв'язній поверхні з межею, трикольоровий граф якого є заданим графом.

**Доведення.** Кожній чорній вершині зіставимо стандартну область — трикутник, а білій вершині — чотирикутник (рис. 2). Склеїмо відповідні сторони стандартних областей згідно з ребрами графа (кожне ребро графа відповідає парі сторін, що склеюються). Очевидно, що отриманий простір  $M$  є поверхнею з межею. У кожній чорній вершині домальюємо, за потребою, ребра (що будуть називатися хвостами) таких кольорів, щоб із неї виходило по одному  $t$ -ребру,  $s$ -ребру та  $u$ -ребру. Іншим кінцем домальованого ребра буде домальована вершина. Аналогічно домальюємо ребра в білих вершинах так, щоб з кожної виходили чотири ребра різних кольорів ( $s$ ,  $t$ ,  $u$  та  $c$ ). Побудуємо подвоєний граф  $H$ , взявши дві копії отриманого графа, склеївши відповідні домальовані вершини і замінивши їх разом із двома

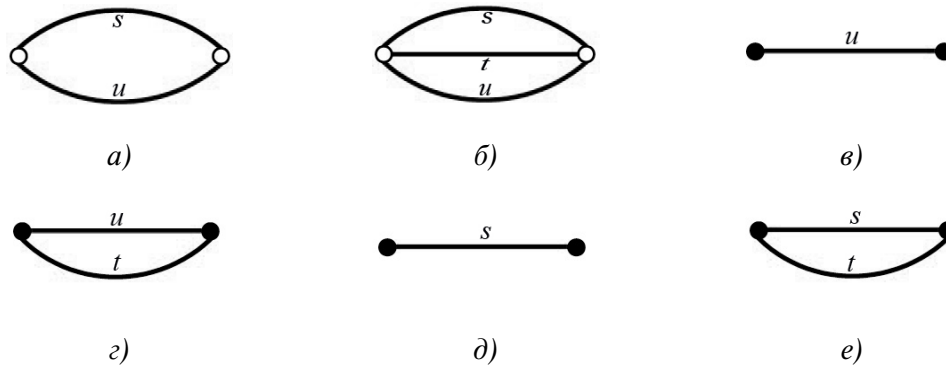


Рис. 5

суміжними ребрами одним ребром. Розглянувши подвоєння  $DM$  поверхні  $M$ , можемо на ньому побудувати  $\Omega$ -потік для графа  $H$  (див. статтю [17]). Обмеження побудованого потоку на  $M$  буде шуканим потоком.

**Зауваження 2.** Потік Морса буде потоком на замкненій поверхні тоді і тільки тоді, коли його трикольоровий граф не містить білих вершин і з кожної вершини виходить три ребра.

**3. Побудова всіх можливих трикольорових графів.** Наведемо всі можливі варіанти допустимих оснащених трикольорових графів з 2, 3, 4 та 5 вершинами. Зауважимо, що оснащений трикольоровий граф, який складається лише з однієї вершини, не буде допустимим, тому що коли ця вершина біла, тоді вона не буде внутрішньою (порушується властивість 5), коли ж вона чорна, тоді для неї не виконується властивість 2.

**3.1. Дві вершини.** Для того щоб побудувати всі допустимі оснащені трикольорові графи з двома вершинами, розглянемо такі варіанти:

1. *Одна з вершин графа біла, а інша чорна.* Такий варіант неможливий, оскільки біла вершина завжди є внутрішньою, отже, з неї виходить  $s$ - і  $u$ -ребро. Оскільки у графа лише дві вершини, то для чорної вершини інцидентні ці ж два ребра, отже, чорна вершина також є внутрішньою, а це суперечить властивості 5.

2. *Обидві вершини є білими.* Оскільки обидві білі вершини є внутрішніми, то, очевидно, вони з'єднані  $s$ - та  $u$ -ребром.  $t$ -Ребром можемо з'єднувати будь-які дві вершини з урахуванням властивості 2 про те, що з кожної вершини не може виходити два ребра одного кольору. Отже, отримано два різні варіанти (рис. 5 а, б).

3. *Обидві вершини є чорними.* Якщо одна з вершин є внутрішньою, то інша також є внутрішньою. За властивістю 3 для кожної чорної внутрішньої вершини повинен існувати  $su$ -цикл довжини 4, що її містить, а це неможливо. Отже, обидві чорні вершини є граничними. За означенням граничної вершини з неї виходить або  $u$ -, або  $s$ -ребро (наявність  $t$ -ребра на тип не впливає). Тому отримуємо такі варіанти: 1) дві чорні вершини з'єднані лише  $u$ -ребром (рис. 5 в); 2)  $u$ - і  $t$ -ребрами (рис. 5 г); 3) лише  $s$ -ребром (рис. 5 д); 4)  $s$ - та  $t$ -ребрами (рис. 5 е).

**3.2. Три вершини.** Для того щоб побудувати всі можливі допустимі оснащені трикольорові графи з трьома вершинами, розглянемо такі варіанти:

1. *Всі вершини чорного кольору.* У такому випадку одна з вершин буде внутрішньою, а за властивістю 3 для неї повинен існувати  $su$ -цикл довжини 4, який її містить, що неможливо.

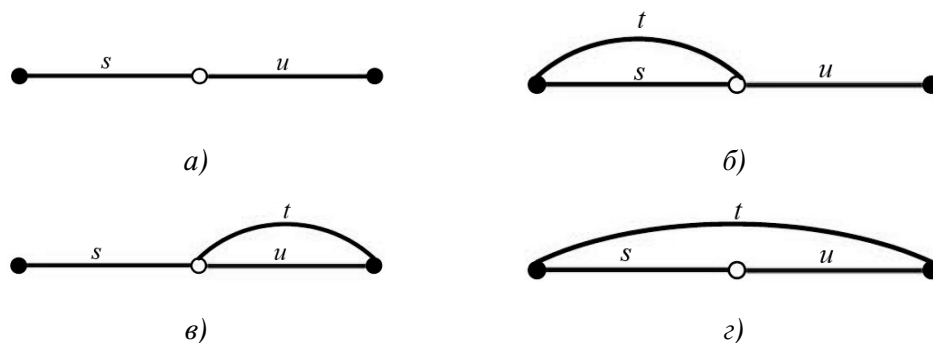
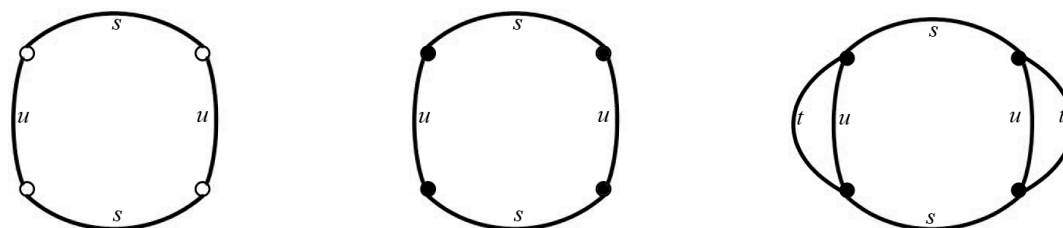


Рис. 6



а) Перший тип три-кольорового графа з 4 вершинами.

б) Другий тип три-кольорового графа з 4 вершинами.

в) Граф, що задає потік на замкненій поверхні.

Рис. 7

2. *Всі вершини білі.* Неможливо побудувати граф з трьома вершинами таким чином, щоб кожна з них була внутрішньою. Отже, маємо суперечність з властивістю 5.

3. *Дві вершини білі, одна чорна.* Дані дві білі вершини повинні бути внутрішніми, тобто з кожної з них виходять  $u$ - і  $s$ -ребро. У такому випадку в чорну вершину ввійдуть або два  $u$ -ребра, або два  $s$ -ребра, що неможливо за властивістю 1.

4. *Дві вершини чорні, одна біла.* У такому випадку можливий варіант як на рис. 6 а. Враховуючи те, що будь-які дві вершини можуть бути з'єднані  $t$ -ребром, утвориться ще три варіанти (рис. 6 б, в, г). Отже, всього 4 різні варіанти.

**3.3. Чотири вершини.** Для того щоб побудувати всі можливі допустимі оснащені три-кольорові графи з 4 вершинами, скористаємося вже побудованими графами з двома вершинами. Будемо з'єднувати два графи з двома вершинами  $t$ -ребрами всіма можливими способами таким чином, щоб з кожної вершини не виходило два ребра однакового кольору. Зауважимо також, що граф, у якого всі вершини чорні і кожній вершині інцидентні три ребра різних кольорів, задає потік на замкненій поверхні, що не входить у поле наших досліджень. Таким чином, отримаємо 7 різних графів.

Залишилося ще 4 типи графів, які неможливо утворити за допомогою зазначених вище графів. Один із графів першого типу зображений на рис. 7 а.

Оскільки  $t$ -ребра можуть бути інцидентними будь-яким двом вершинам, то, розглянувши всі можливі варіанти розстановки  $t$ -ребер, отримуємо ще 8 варіантів.

Представник другого типу поданий на рис. 7 б. Для нього з урахуванням усіх варіантів розстановки  $t$ -ребра отримано всього 4 різні графи.





Рис. 8

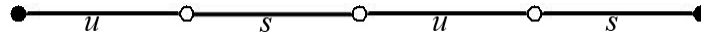


Рис. 9. Триколовий граф з 5 вершинами.

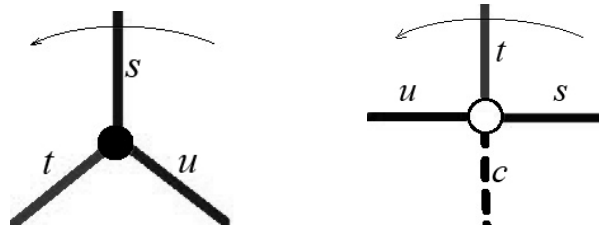


Рис. 10. Стандартний циклічний порядок ребер у вершинах.

Зауважимо, що випадок, як на рис. 7 в, ми не розглядаємо, оскільки такий граф задає потік на замкненій поверхні.

Представники третього та четвертого типів подані на рис. 8.

З урахуванням усіх можливих варіантів розстановки  $t$ -ребра отримаємо всього 16 різних графів третього та четвертого типів.

Отже, загальна кількість різних триколових графів з 4 вершинами дорівнює 36.

**3.4. П'ять вершин.** Аналогічно з попереднім випадком, граф з 5 вершинами можна утворити за допомогою з'єднання  $t$ -ребрами вже побудованих графів із трьома та двома вершинами. Отримаємо 27 графів.

Один із можливих графів з 5 вершинами, який ми ще не розглянули, зображений на рис. 9.

З'єднавши у ньому вершини  $t$ -ребрами всіма можливими способами, всього отримаємо 27 графів.

Отже, отримано 54 допустимі оснащені триколові графи з 5 вершинами.

**4. Топологічний тип поверхні трикологового графа.** Топологічний тип компактних поверхонь визначається орієнтованістю, кількістю компонент межі та родом поверхні. Для визначення кількості компонент межі ми введемо поняття граничного циклу графа таким чином, що кожний такий цикл відповідав компоненті межі. При заданій орієнтованості та кількості компонент межі рід поверхні буде визначатися ейлеровою характеристикою поверхні.

**4.1. Алгоритм підрахунку кількості граничних циклів.** Приклеїмо до поверхні комір та побудуємо двоїстий граф по відношенню до графа, ребрами якого є  $u$ -,  $s$ -,  $t$ - та  $c$ -траєкторії, аналогічно з побудовою трикологового графа (проте у нового графа є додаткова вершина, що відповідає коміру, та додаткові ребра, що відповідають траєкторіям на межі початкової поверхні). Видалимо з даного двоїстого графа окіл вершини з коміра. Ребра, які перетинають межу початкової поверхні, будемо називати *хвостами*.

Домалюємо до даного графа хвости (пунктирні ребра). У білих вершинах  $c$ -ребро буде протилежне  $t$ -ребру, а  $s$ -ребро —  $u$ -ребру. Чорні та білі вершини орієтуємо стандартним

чином (рис. 10), тобто задамо стандартний циклічний порядок ребер  $t$ ,  $u$ ,  $s$  кольорів у чорній вершині та  $c$ ,  $s$ ,  $t$ ,  $u$  кольорів у білій вершині.

*Граничний цикл* — це цикл, який містить хвости та будується таким чином:

Навколо деякої вершини  $V_1$ , що містить хвіст  $E_1$ , задамо рух через хвіст проти годинникової стрілки. Згідно з циклічним порядком, наступним ребром, інцидентним вершині  $V_1$ , буде ребро  $E_2$ . Тобто граничний цикл буде містити хвіст  $E_1$  та ребро  $E_2$ . Якщо ребро  $E_2$  також є хвостом, то за циклічним порядком перейдемо на наступне ребро  $E_3$ , що суміжне вершині  $V_1$ . Якщо ребро  $E_2$  не є хвостом, то ми проходимо по ньому в наступну, інцидентну йому, вершину  $V_2$ . Якщо  $E_3$  також є хвостом, то наступним вибираємо те ребро, яке отримується проходженням далі навколо  $V_2$ , але проти циклічного напрямку. Якщо  $E_3$  не є хвостом, то ми рухаємося по ньому у наступну вершину  $V_3$ , яку аналогічно будемо обходити за напрямком циклічного порядку. Отже, кожного разу, коли ми рухаємося по ребру, яке не є хвостом, ми змінюємо напрямком обходу наступної вершини за або проти циклічного порядку. Цикл замкнеться, коли ми повернемося у початкове ребро  $E_1$  із тим самим напрямком руху. Якщо утворений цикл містить усі хвости, то поверхня має один граничний цикл, а отже, одну компоненту межі. Якщо ж існує хвіст, який не ввійшов у перший таким способом побудований граничний цикл, то аналогічною процедурою ми побудуємо граничний цикл, що містить даний хвіст.

Таким чином, будуватимемо граничні цикли, доки не вичерпаємо всіх хвостів.

Зауважимо, що за побудовою два граничні цикли не можуть проходити через один і той же хвіст, але можуть містити спільні внутрішні ребра. Причому кожне ребро проходиться не більше двох разів усіма циклами разом.

**4.2. Визначення роду поверхні.** Подвоївши поверхню з межею  $M$ , отримаємо поверхню без межі  $DM$ .

**Лема 2.** *Ейлерова характеристика поверхні  $M$  має вигляд*

$$\chi(M) = \chi(DM)/2.$$

**Доведення.**  $\chi(DM) = \chi(M) + \chi(M) - \chi(\partial M)$ . Оскільки  $\partial M = S^1$ , маємо  $\chi(\partial M) = 0$ . Отже,  $\chi(DM) = \chi(M) + \chi(M) = 2\chi(M)$ .

**Зауваження 3.** Для обчислення  $\chi(DM)$  можна скористатися формулою з роботи [17]. Проте у нашому випадку її можна значно спростити.

За побудовою, якщо з графа видалити всі ребра одного кольору, то отримаємо граф, кожна компонента якого гомеоморфна колу, ізольованій вершині або відрізьку. Введемо для їхньої кількості такі позначення:

- $v_0^0$  — число компонент, гомеоморфних колу, після видалення  $u$ -ребер;
- $v_0^I$  — число компонент, негомеоморфних колу, після видалення  $u$ -ребер;
- $v_1^0$  — число компонент, гомеоморфних колу, після видалення  $t$ -ребер;
- $v_1^I$  — число компонент, негомеоморфних колу, після видалення  $t$ -ребер;
- $v_2^0$  — число компонент, гомеоморфних колу, після видалення  $s$ -ребер;
- $v_2^I$  — число компонент, негомеоморфних колу, після видалення  $s$ -ребер.

Позначимо через  $w$  число білих вершин.

**Теорема 2.** *Ейлерова характеристика поверхні  $M$  має вигляд*

$$\chi(M) = v_0^0 - v_1^0 + v_2^0 + (v_0^I - v_1^I + v_2^I - w)/2.$$

Табл. 1

	2 станд. обл.	3 станд. обл.	4 станд. обл.	5 станд. обл.
Диск ( $D^2$ )	5	3	18	22
Лист Мьобіуса		1	5	15
Лист Мьобіуса з діркою			2	2
Кільце ( $S^1 \times I$ )	1		10	10
Кільце з діркою			1	1
Пляшка Клейна з діркою				3
Тор з діркою				1

**Доведення.** Кожна компонента, гомеоморфна колу, є циклом на графі, що є межею 2-диску з однією внутрішньою особливою точкою. Компоненти, гомеоморфні відрізу, будуть відповідати особливим точкам на межі (домалювавши хвости і подвоївши поверхню, вони утворять цикли). При цьому кожній такій компоненті буде відповідати одна особлива точка, крім випадку *su* компонент, що містять білі вершини. Біла вершина відповідає квадрату з двома сідловими точками на межі. Отже, її додавання у компоненту додає одну сідлову точку на межі.

Використання леми 2 та теореми Пуанкаре – Хопфа завершує доведення теореми 2.

**5. Висновок.** У даній роботі було розглянуто потоки Морса на поверхнях з межею та побудовано повний топологічний інваріант даних потоків — допустимий оснащений трикольоровий граф. За його допомогою було обраховано кількість топологічно нееквівалентних потоків з 2, 3, 4 та 5 стандартними областями. Для кожного з них було визначено поверхню, на якій даний потік задається. Розподіл кількості потоків на поверхнях зображений в табл. 1.

Автори сподіваються, що отримані результати можуть бути використані для кодування потоків і складання алгоритму підрахунку числа топологічно нееквівалентних потоків Морса у випадку більше, ніж 5 стандартних областей.

### Література

1. Лосева М. В., Пришляк О. О. Топологія потоків Морса–Смейла з особливостями на межі двовимірного диска // Пр. міжнар. геометр. центру. – 2016. – **9**, № 2. – С. 32–41.
2. Пришляк О. О., Прус А. А. Потоки Морса–Смейла на торі з діркою // Пр. міжнар. геометр. центру. – 2017. – **10**, № 1. – С. 47–58.
3. Robinson C. Structural stability on manifolds with boundary // J. Differential Equations. – 1980. – **37**, № 1. – P. 1–11.
4. Percell P. B. Structural stability on manifolds with boundary // Topology. – 1973. – **12**. – P. 123–144.
5. Андронов А., Понтрягин Л. Грубые системы // Докл. АН УССР. – 1937. – **14**, № 5. – С. 247–250.
6. Peixoto M. M. Structural stability on two-dimensional manifolds. I, II // Topology. – 1962. – **1**, № 2. – P. 101–120; 1963. – **2**, № 2. – P. 179–180.

7. *Ошемков А. А., Шарко В. В.* О классификации потоков Морса на двумерных многообразиях // *Мат. сб.* – 1998. – **189**, № 8. – С. 93–140.
8. *Уманский Я. Л.* Необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности трехмерных динамических систем Морса–Смейла с конечным числом особых траекторий // *Мат. сб.* – 1990. – **181**, № 2. – С. 212–239.
9. *Пришляк А. О.* Топологическая эквивалентность векторных полей Морса–Смейла с  $\text{beh } 2$  на трехмерных многообразиях // *Укр. мат. журн.* – 2002. – **54**, № 4. – С. 492–500.
10. *Пришляк А. О.* Топологическая классификация  $m$ -полей на двух- и трехмерных многообразиях с краем // *Укр. мат. журн.* – 2003. – **55**, № 6. – С. 799–805.
11. *Peixoto M. M.* On the classification of flows on 2-manifolds // *Dynamical systems.* – New York; London: Acad. Press, 1973. – P. 389–419.
12. *Palis J., Smale S.* Structural stability theorems // *Proc. Sympos. Pure Math.* – 1970. – **14**. – P. 223–231.
13. *Robbin J.* A structural stability theorem // *Ann. of Math. (2).* – 1971. – **94**. – P. 447–493.
14. *Mane R.* The characterization of structural stability // *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* – 1988. – **66**. – P. 161–210.
15. *Kibalko Z., Prishlyak A., Shchurko R.* Trajectory equivalence of optimal Morse flows on closed surfaces // *Proc. Int. Geom. Cent.* – 2018. – **11**, № 1. – P. 12–26.
16. *Пришляк О. О., Лосева М. В.* Оптимальні потоки Морса–Смейла з особливостями на межі поверхні // *Нелін. коливання.* – 2018. – **21**, № 2. – С. 231–237.
17. *Круглов В. Е., Малышев Д. С., Починка О. В.* Многоцветный граф как полный топологический инвариант для  $\Omega$ -устойчивых потоков без периодических траекторий на поверхностях // *Мат. сб.* – 2018. – **209**, № 1. – С. 100–126. DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8797>
18. *Peixoto M. C., Peixoto M. M.* Structural stability in the plane with enlarged boundary conditions // *An. Acad. Bras. Ciênc.* – 1959. – **31**, № 2. – P. 135–160.
19. *Майер А. Г.* О траекториях на ориентируемых поверхностях. – *Мат. сб.* – 1943. – **12(54)**, № 1. – С. 71–84.

*Одержано 23.10.18,  
після доопрацювання — 08.03.19*