УДК 517.925, 519.216

О РАЗРЕШИМОСТИ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

М. И. Тлеубергенов

Ин-т математики и мат. моделирования МОН РК
ул. Пушкина, 125, Алматы, 050010, Казахстан
e-mail: marat207@mail.ru

Д. Т. Ажымбаев

Актюб. рег. гос. ун-т им. К. Жубанова
пр. А. Молдагуловой, 34, Актобе, 030000, Казахстан
e-mail: darkhan70@gmail.com

We consider inverse problems of differential systems in the presence of random perturbations. The sufficient conditions for the representation of stochastic differential equations of second order in the form of stochastic equations of Lagrangian structure as well as stochastic differential equations of first order in the form of stochastic equations of canonical structure are obtained by the method of additional variables. The obtained results are illustrated for specific examples.

Розглядаються обернені задачі диференціальних систем за наявності випадкових збурень. Методом додаткових змінних одержано достатні умови подання стохастичних диференціальних рівнянь другого порядку у вигляді стохастичних рівнянь лагранжевої структури, а також стохастичних диференціальних рівнянь першого порядку у вигляді стохастичних рівнянь канонічної структури. Отримані результати ілюструються конкретними прикладами.

Введение. Теория обратных задач дифференциальных систем достаточно полно разработана в классе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) (см. [1 – 6]). В работе Н. П. Еругина [1] строится множество ОДУ по заданной интегральной кривой. Эта работа оказалась впоследствии основополагающей в становлении и развитии теории обратных задач динамики систем, описываемых ОДУ. В работах [2 – 6] изложены постановки, классификация обратных задач дифференциальных систем и разработаны общие методы их решения в классе ОДУ. Отметим также работы [7 – 9], в которых в классе ОДУ рассмотрены обратные задачи динамики систем автоматического управления.

Методы решения обратных задач в классе ОДУ распространяются в работах [10 – 13] на класс стохастических дифференциальных уравнений Ито.

Новый этап исследования обратных задач дифференциальных систем связан с возросшим в последние десятилетия интересом к исследованию задачи Гельмгольца (обзор работ см., например, в монографии [14]). Классической задачей Гельмгольца [15] является задача построения по заданным ОДУ второго порядка эквивалентных дифференциальных уравнений в форме Лагранжа. А. Майер [16] и Г. К. Суслов [17] независимо друг от друга показали, что классические условия Гельмгольца являются не только необходимыми, но и достаточными условиями перехода от ньютоновых уравнений к лагранжевым.

Решение задачи Гельмгольца [15] в том или ином классе дифференциальных уравнений позволяет распространить на этот класс уравнений хорошо развитые математические методы классической механики. В этой связи следует отметить монографию Р. М. Сантилли

[18, 19], которая по полноте изложения материала и разнообразию аспектов исследования задачи Гельмгольца занимает особое место и посвящена задаче представления ОДУ второго порядка в виде уравнений Лагранжа, Гамильтона и Биркгофа. В монографии А. С. Галиуллина [14] наряду с обзором работ рассматривается обобщение гамильтоновых систем в смысле приводимости уравнений движения неконсервативных механических систем к классическим уравнениям динамики, и решается, в частности, задача гамильтонизации уравнений систем программного движения. Развитию методов решения задачи Гельмгольца в классе дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП) посвящены работы [20 – 22].

С результатами по дальнейшему исследованию задачи Гельмгольца можно ознакомиться по работам [18, 19, 23], в которых наряду с собственными исследованиями, в основном, в классе ОДУ и ДУЧП, приводится исторический обзор по развитию и обобщению указанной задачи.

В работе [24] задача Гельмгольца рассматривается в классе ОДУ при наличии случайных возмущений типа белого шума [25], и полученные утверждения являются распространением некоторых результатов Сантилли [18] на класс стохастических уравнений второго порядка типа Ито. А именно, в [24] по заданным стохастическим уравнениям Ито второго порядка строятся эквивалентные в смысле почти наверное (п. н.) стохастические уравнения лагранжевой структуры и определяются условия прямого и непрямого аналитического представления лагранжиана при наличии случайных возмущений. В работе [26] по заданному стохастическому уравнению Ланжевена – Ито в непрямом представлении строится как уравнение гамильтоновой структуры, так и уравнение биркгофиановой структуры.

Предварительно, следуя Сантилли [18], приведем некоторые необходимые в дальнейшем понятия с учетом действия случайных возмущающих сил.

Определение 1. *Назовем кинематической формой уравнения Ньютона при наличии случайных возмущений уравнение вида*

$$\ddot{x}_\nu = F_\nu(x,\dot{x},t) + \sigma_{\nu j}(x,\dot{x},t)\dot{\xi}^j, \quad \nu = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,m}, \tag{1}$$

и соответственно основной формой уравнения Ньютона при наличии случайных возмущений — уравнение вида

$$A_{\nu i}(x,\dot{x},t)\ddot{x}_i + B_\nu(x,\dot{x},t)dt = \sigma_{\nu j}(x,\dot{x},t)\dot{\xi}^j. \tag{1$'$}$$

Уравнение вида

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_k} = \sigma'_{kj}(x,\dot{x},t)\dot{\xi}^j, \quad k = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,m}, \tag{2}$$

назовем стохастическим уравнением лагранжевой структуры.

Здесь $\xi^j = \xi_0^j + \displaystyle\int c^j(y)P^0(t,dy)$, где, следуя [27], ξ_0^j — винеровский процесс, P^0 — пуассоновский процесс, $P^0(t,dy)$ — число скачков процесса P^0 в интервале $[0,t]$, попадающих на множество dy, где $y = \left(x^T,\dot{x}^T\right)^T$. Отметим также, что здесь и далее по повторяющимся индексам сомножителей предполагается суммирование.

Будем говорить, что некоторая функция $g(y,t)$ из класса K, $g \in K$, если g непрерывны по t и липшицевы по y во всем пространстве $R^{2n} \ni y$, и удовлетворяет условию линейного роста по y: $\|g(y,t)\| \leq M(1+\|y\|)$ с некоторой константой M.

Предположим, что функции F_ν, $\sigma_{\nu j}$, $\sigma'_{\nu j}$, $A_{\nu i}$, B_ν, входящие в приведенные выше уравнения, принадлежат классу K. Это обеспечивает в R^{2n}, следуя [25], существование и единственность до стохастической эквивалентности решения $\left(x^T(t), \dot{x}^T(t)\right)^T$ уравнения (1) с начальным условием $\left(x(t_0)^T, \dot{x}(t_0)^T\right)^T = \left(x_0^T, \dot{x}_0^T\right)^T$, являющегося с вероятностью 1 строго марковским процессом.

Уравнениями вида (1) или (1′) описываются многочисленные и важные в приложениях модели механических систем, учитывающие воздействие внешних случайных сил: например, движение искусственного спутника Земли под действием сил тяготения и аэродинамических сил [28] или флуктуационный дрейф тяжелого гироскопа в кардановом подвесе [29] и др.

Исключая из рассмотрения случай вырождающихся уравнений, всюду предполагаем, что $\det(A_{\nu i}) \neq 0$.

Определение 2. *Уравнение Ньютона при наличии случайных возмущений (1′) допускает в области $R^{2n+1} \ni (x, \dot{x}, t)$ аналитическое представление в терминах стохастического уравнения с лагранжевой структурой, если существуют n^2 функций $h_k^\nu(x, \dot{x}, t)$, $\det\left(h_k^\nu\right) \neq 0$, таких, что имеет место тождество*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_k} - \sigma'_{kj}(x, \dot{x}, t)\dot{\xi}^j \equiv$$

$$\equiv h_k^\nu \Big(A_{\nu i}(x, \dot{x}, t)\ddot{x}_i + B_\nu(x, \dot{x}, t)dt - \sigma_{\nu j}(x, \dot{x}, t)\dot{\xi}^j\Big), \quad k = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}. \tag{3}$$

Определение 3. *Аналитическое представление в определении 2 называется прямым (непрямым), если матрица $\left(h_k^\nu\right)$ является (не является) единичной $\left(\delta_k^\nu\right)$.*

Пусть заданы уравнения

$$\ddot{y} = Y_1(y, \dot{y}, t)dt + Y_2(y, \dot{y}, t)\dot{\xi}, \tag{a}$$

$$\ddot{z} = Z_1(z, \dot{z}, t)dt + Z_2(z, \dot{z}, t)\dot{\xi}. \tag{b}$$

Определение 4 [25]. *Будем говорить, что уравнения (a) и (b) эквивалентны п. н., если из $y(t_0) = z(t_0)$, $\dot{y}(t_0) = \dot{z}(t_0)$ п. н. следует $y(t, t_0, y_0, \dot{y}_0) = z(t, t_0, z_0, \dot{z}_0)$, $\dot{y}(t, t_0, y_0, \dot{y}_0) = \dot{z}(t, t_0, z_0, \dot{z}_0)$ п. н. при всех $t \geq t_0$.*

1. Метод Шульгина. Пусть задана система стохастических уравнений Ито второго порядка вида

$$\ddot{x}_k = f_k(t, x, \dot{x}) + \sigma_{kj}(t, x, \dot{x})\dot{\xi}^j, \quad k = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}. \tag{4}$$

Требуется привести систему уравнений (4) к эквивалентным уравнениям лагранжевой структуры. Здесь $\xi^1(t), \xi^2(t), \ldots, \xi^m(t)$ — система случайных процессов с независимыми приращениями, а эквивалентность решений уравнений понимается в смысле эквивалентности п. н. Указанная задача при отсутствии случайных возмущений $\left(\sigma_{\nu j} \equiv \sigma'_{\nu j} \equiv 0\right)$ рассмотрена в [30].

Для решения поставленной стохастической задачи воспользуемся методом Шульгина [30]. А именно: введем дополнительные переменные $x_{n+1}, \ldots, x_{2n}$ и определим функцию Лагранжа расширенной системы в виде

$$L = \sum_{i=1}^{n} \left(\dot{x}_i \dot{x}_{n+i} + f_i x_{n+i}\right), \tag{5}$$

где $\dot{x}_i = \dfrac{dx_i}{dt}$, $\dot{x}_{n+i} = \dfrac{dx_{n+i}}{dt}$. Тогда $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_{n+i}} = \dot{x}_i$, $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_{n+i}} = \ddot{x}_i$, $\dfrac{\partial L}{\partial x_{n+i}} = f_i$ и, следовательно, уравнение (4) будет эквивалентно уравнению

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{n+i}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_{n+i}} = \sigma_{ij}(t,x,\dot{x})\dot{\xi}^j, \quad i=\overline{1,n}, \quad j=\overline{1,m}. \tag{6a}$$

А для определения вспомогательных переменных x_{n+i} запишем следующее уравнение лагранжевой структуры:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = \sigma'_{ij}(t,x,\dot{x})\dot{\xi}^j, \quad i=\overline{1,n}, \quad j=\overline{1,m}, \tag{6b}$$

где $\sigma'_{ij} = \sigma'_{ij}(t,x,\dot{x})$ — некоторые произвольные непрерывные по своим аргументам функции, не нарушающие условий теоремы существования и единственности задачи Коши системы уравнений (6a) и (6b) [25], и, в частности, могут быть выбраны тождественно равными нулю при всех $i=\overline{1,n}$ и $j=\overline{1,m}$.

Совокупность уравнений (6a) и (6b)

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_{n+i}} - \dfrac{\partial L}{\partial x_{n+i}} = \sigma_{ij}(t,x,\dot{x})\dot{\xi}^j, & \text{(6a)} \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \dfrac{\partial L}{\partial x_i} = \sigma'_{ij}(t,x,\dot{x})\dot{\xi}^j, \qquad i=\overline{1,n}, \quad j=\overline{1,m}. & \text{(6b)} \end{cases} \tag{6}$$

образует систему $2n$ уравнений лагранжевой структуры с обобщенным лагранжианом $L = L(t, x_1, \ldots, x_{2n}, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{2n})$.

Таким образом справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть функции $f_k(t,x,\dot{x})$, $k=\overline{1,n}$, входящие в уравнения (4), имеют непрерывные частные производные второго порядка (включая и смешанные) и, кроме того, имеют по $\dot{x}$ непрерывные частные производные третьего порядка*

$$\frac{\partial^3 f_k}{\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_\nu \partial \dot{x}_\mu}, \quad i,\nu,\mu = \overline{1,n}.$$

Тогда достаточными условиями представления системы стохастических уравнений (4) в форме уравнений лагранжевой структуры (6) является представление лагранжиана в виде (5) с помощью дополнительных переменных x_{n+i}, $i=\overline{1,n}$, которые определяются из уравнений (6b).

Замечание 1. Если по правилу стохастического дифференцирования раскрыть выражения $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}$ и $\dfrac{\partial L}{\partial x_i}$, то, в частности, при $\sigma'_{ij}(t,x,\dot{x}) \equiv 0$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$, для определения вспомогательных переменных x_{n+i}, $i=\overline{1,n}$, уравнение (6b) запишется в виде

$$\ddot{x}_{n+i} + \frac{\partial^2 f_k}{\partial \dot{x}_i \partial t} x_{n+k} + \frac{\partial^2 f_k}{\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_l} \ddot{x}_l x_{n+k} + \frac{\partial^2 f_k}{\partial \dot{x}_i \partial x_l} \dot{x}_l x_{n+k} +$$
$$+ \frac{\partial f_k}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_{n+k} + \frac{1}{2}\frac{\partial^3 f_k}{\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_\nu \partial \dot{x}_\mu} \sigma_{\nu j}\sigma_{\mu j} x_{n+k} - \frac{\partial f_k}{\partial x_i} x_{n+k} = 0.$$

2. Метод Лиувилля. Пусть задана система стохастических дифференциальных уравнений Ито первого порядка

$$\dot{x}_k = X_k(t,x) + \sigma_{kj}(t,x,)\dot{\xi}^j, \quad k = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,m}. \tag{7}$$

Требуется привести систему уравнений (7) к эквивалентным уравнениям гамильтоновой структуры.

Указанная задача при отсутствии случайных возмущений $\sigma_{kj} \equiv 0$ рассмотрена в [31].

Для решения задачи, поставленной в вероятностной постановке, воспользуемся методом Лиувилля [31]. А именно: введем вспомогательные переменные $y_i,\ i = \overline{1,n}$, и определим функцию Гамильтона расширенной системы в виде

$$H(t,x,y) = -X_i(t,x)y_i, \quad i = \overline{1,n}. \tag{8}$$

Тогда $X_i = -\dfrac{\partial H}{\partial y_i}$ и соответствующие уравнения движения расширенной системы запишутся в виде

$$\begin{cases} \dfrac{dy_i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial x_i}, & \text{(9a)} \\ \dfrac{dx_i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial y_i} + \sigma_{ij}(t,x,)\dot{\xi}^j, \quad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,m}, & \text{(9b)} \end{cases} \tag{9}$$

где уравнения (9b) совпадают с исходными уравнениями (7), а уравнения (9a) служат для определения вспомогательных переменных $y_i,\ i = \overline{1,n}$.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть функции $X_k(t,x),\ k = \overline{1,n}$, имеют непрерывные частные производные по x первого порядка*

$$\frac{\partial X_k}{\partial x_\nu}, \quad k,\nu = \overline{1,n}.$$

Тогда достаточными условиями представления уравнения Ито первого порядка (7) в виде стохастических уравнений канонической структуры (9) является представление функции Гамильтона в виде (8) с помощью дополнительных переменных $y_i,\ i = \overline{1,n}$, которые определяются из уравнений (9a).

Пример 1. Рассмотрим плоское движение симметричного спутника по круговой орбите в предположении изменения тангажа под действием сил тяготения и аэродинамических сил [28]:

$$\ddot{\theta} = f(\theta,\dot{\theta}) + \sigma(\theta,\dot{\theta})\dot{\xi}, \tag{10}$$

где θ — угол тангажа, а функции f and σ имеют соответственно вид

$$f = Ql\sin 2\theta - Q[g(\theta) + \eta\dot{\theta}], \qquad \sigma = Q\delta[g(\theta) + \eta\dot{\theta}].$$

Ранее в [24] была рассмотрена задача непрямого построения лагранжиана по заданному уравнению (10):

$$h\Big[\ddot{\theta} - f(\theta,\dot{\theta}) - \sigma(\theta,\dot{\theta})\dot{\xi}\Big] = 0 \tag{10'}$$

при $h = e^{-Q\eta t}$. Искомый лагранжиан для $(10')$ был построен в виде

$$L = e^{-Q\eta t}\left[\frac{1}{2}\,\dot{\theta}^2 - Q\left(\frac{1}{2}\,l\cos 2\theta + G\right)\right],$$

обеспечивающем представление уравнения $(10')$ в виде уравнения лагранжевой структуры

$$\frac{d}{dt}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = e^{-Q\eta t}\sigma(\theta,\dot{\theta})\dot{\xi}, \quad \text{где} \quad G = \int g(\theta)d\theta.$$

Рассмотрим теперь указанную задачу с помощью метода дополнительных переменных, т. е. введем вспомогательную переменную ω и на основании теоремы 1 положим $L = \dot{\theta}\dot{\omega} + f(\theta,\dot{\theta})\omega$. Тогда после несложных вычислений уравнение (10) при $\sigma' \equiv 0$ приводится к системе уравнений вида

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\,\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\omega}} - \dfrac{\partial L}{\partial \omega} = \sigma(\theta,\dot{\theta})\dot{\xi}, & \text{(11a)} \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\,\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \dfrac{\partial L}{\partial \theta} = 0, & \text{(11b)} \end{cases} \qquad (11)$$

где уравнение (11a) совпадает с исходным уравнением (10), а уравнение (11b) служит для определения вспомогательной переменной ω.

Пример 2. Рассмотрим нелинейное стохастическое дифференциальное уравнение второго порядка, описывающее движение внутреннего кольца гироскопа в кардановом подвесе [29]:

$$\ddot{\beta} + 2\nu\dot{\beta} + f(\beta) = \dot{\xi}, \qquad (12)$$

где β — угол поворота внутреннего кольца. Здесь коэффициент при белом шуме $\sigma = 1$.

Ранее в [24] была рассмотрена задача непрямого построения лагранжиана по заданному уравнению (12)

$$h[\ddot{\beta} + 2\nu\dot{\beta} + f(\beta)] = \dot{\xi} \qquad (12')$$

при $h = e^{2\nu t}$. Искомый лагранжиан для $(12')$ был построен в виде

$$L = e^{2\nu t}\left[\frac{1}{2}\,\dot{\beta}^2 - \gamma(\beta)\right], \quad \text{где} \quad \frac{d}{dt}\,\gamma(\beta) = f(\beta),$$

обеспечивающем представление $(12')$ в виде уравнения лагранжевой структуры

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \beta} = e^{2\nu t}\dot{\xi}.$$

Рассмотрим эту же задачу методом дополнительных переменных. Для этого введем вспомогательную переменную η и, следуя теореме 1, положим $L = \dot{\beta}\dot{\eta} - 2\nu\dot{\beta}\eta - f(\beta)\eta$. И тогда, подсчитав выражения $\dfrac{d}{dt}\,\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\eta}}$, $\dfrac{d}{dt}\,\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\beta}}$, $\dfrac{\partial L}{\partial \eta}$, $\dfrac{\partial L}{\partial \beta}$, нетрудно показать, что уравнение (12) при $\sigma' \equiv 0$ приводится к системе уравнений вида

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\,\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\eta}} - \dfrac{\partial L}{\partial \eta} = \dot{\xi}, & \text{(13a)} \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\,\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} - \dfrac{\partial L}{\partial \beta} = 0, & \text{(13b)} \end{cases} \qquad (13)$$

где уравнение (13a) совпадает с исходным уравнением (12), а уравнение (13b) служит для определения вспомогательной переменной η.

Пример 3. Рассмотрим уравнение Эмдена [18] при наличии случайных возмущений

$$t\ddot{q} + 2\dot{q} + tq^5 = \sigma(q, \dot{q}, t)\dot{\xi}_{\frac{1}{2}}, \tag{14}$$

где $\dot{\xi}_{\frac{1}{2}}$ — белый шум в смысле Стратоновича [32] в отличие от белого шума в смысле Ито $\dot{\xi} \equiv \dot{\xi}_0$ [33].

В [24] была рассмотрена задача непрямого построения лагранжиана по заданному уравнению (14):

$$h\Big[t\ddot{q} + 2\dot{q} + tq^5 - \sigma(q, \dot{q}, t)\dot{\xi}_{\frac{1}{2}}\Big] = 0 \tag{14$'$}$$

при $h = t$. Искомый лагранжиан для уравнения (14$'$) был построен в виде

$$L = \frac{t^2}{2}\left(\dot{q}^2 - \frac{1}{3}\,q^6\right),$$

что обеспечивало представление уравнения (14$'$) в виде уравнения лагранжевой структуры

$$\frac{d}{dt}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = t\sigma(q, \dot{q}, t)\dot{\xi}_{\frac{1}{2}}.$$

Рассмотрим решение поставленной задачи методом дополнительных переменных. Для этого введем вспомогательную переменную η и положим $L = t\dot{q}\dot{\eta} - \dot{q}\eta - tq^5\eta$. Тогда аналогично примерам 1 и 2 нетрудно показать, что уравнение (14) при $\sigma' \equiv 0$ приводится к системе уравнений вида

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\,\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\eta}} - \dfrac{\partial L}{\partial \eta} = \sigma\dot{\xi}_{\frac{1}{2}}, & \text{(15a)} \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\,\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \dfrac{\partial L}{\partial q} = 0, & \text{(15b)} \end{cases} \tag{15}$$

где уравнение (15a) совпадает с исходным уравнением (14), а уравнение (15b) служит для определения вспомогательной переменной η.

Литература

1. *Еругин Н. П.* Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую // Прикл. математика и механика. – 1952. – **10**, вып. 6. – С. 659 – 670.
2. *Галиуллин А. С.* Методы решения обратных задач динамики. – М.: Наука, 1986. – 224 с.
3. *Галиуллин А. С.* Построение поля сил по заданному семейству траекторий // Дифференц. уравнения. – 1981. – **17**, № 8. – С. 1487 – 1489.
4. *Мухаметзянов И. А., Мухарлямов Р. Г.* Уравнения программных движений. – М.: Изд-во РУДН, 1986. – 88 с.
5. *Мухарлямов Р. Г.* О построении систем дифференциальных уравнений движения механических систем // Дифференц. уравнения. – 2003. – **39**, № 3. – С. 343 – 353.
6. *Мухарлямов Р. Г.* Моделирование процессов управления, устойчивость и стабилизация систем с программными связями // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2015. – № 1. – С. 15 – 28.

7. *Жуматов С. С.* Асимптотическая устойчивость неявных дифференциальных систем в окрестности программного многообразия // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 4. – С. 558 – 565.
8. *Жуматов С. С.* Экспоненциальная устойчивость программного многообразия систем непрямого управления // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 6. – С. 784 – 790.
9. *Жуматов С. С.* Устойчивость программного многообразия систем управления с локально квадратичными связями// Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 3. – С. 418 – 424.
10. *Ибраева Г. Т., Тлеубергенов М. И.* О разрешимости основной обратной задачи стохастических дифференциальных систем // Укр. мат. журн. – 2019. – **71**, № 1. – С. 139 – 145.
11. *Тлеубергенов М. И., Ибраева Г. Т.* О стохастической задаче восстановления с непрямым управлением // Дифференц. уравнения. – 2017. – **53**, № 10. – С. 1418 – 1428.
12. *Tleubergenov M. I., Azhymbaev D. T.* On construction of force function in the presence of random perturbations // Springer Proc. Math. Stat. – 2017. – **216**. – P. 443 – 450.
13. *Misiats O., Stanzhytskyi O., Yip N.* Existence and uniqueness of invariant measures for stochastic reaction-diffusion equations in unbounded domains // J. Theoret. Probab. – 2016. – **29**, № 3. – P. 996 – 1026.
14. *Галиуллин А. С.* Системы Гельмгольца. – М.: Изд-во РУДН, 1995. – 86 с.
15. *Гельмгольц Г.* О физическом значении принципа наименьшего действия // Вариационные принципы механики. – М.: Физматгиз, 1959. – С. 430 – 459.
16. *Mayer A.* Die existenzbeingungen eines kinetischen potentiales // Ber. Verhand. Kgl. Sachs. Ges. Wiss. Leipzig. – 1896. – **48**. – C. 519 – 529.
17. *Суслов Г. К.* О кинетическом потенциале Гельмгольца // Мат. сб. – 1896. – **19**, № 1. – С. 197 – 210.
18. *Santilli R. M.* Foundations of theoretical mechanics. 1. The inverse problem in newtonian mechanics. – New York: Springer-Verlag, 1978. – 266 p.
19. *Santilli R. M.* Foundation of theoretical mechanics II. Birkhoffian generalization of Hamiltonian mechanics. – Berlin, Heidelberg: Springer, 1983. – 370 p.
20. *Budochkina S. A., Savchin V. M.* An operator equation with the second time derivative and Hamilton-admissible equations // Dokl. Math. – 2016. – **94**, № 2. – P. 487 – 489.
21. *Savchin V. M., Budochkina S. A.* Nonclassical Hamilton's actions and the numerical performance of variational mathodssfor some dissipative problems // Commun. Comput. Inf. Sci. – 2016. – **678**. – P. 624 – 634.
22. *Savchin V. M., Budochkina S. A.* Invariance of functionals and related Euler – Lagrange equations // Russian Math. (Iz. VUZ). – 2017. – **61**, № 2. – P. 49 – 54.
23. *Филиппов В. М., Савчин В. М., Шорохов С. Г.* Вариационные принципы для непотенциальных операторов // Итоги науки и техники. Сер. Совр. проблемы математики. Новейшие достижения / ВИНИТИ. – 1992. – **40**. – С. 3 – 178.
24. *Тлеубергенов М. И.* К обратной задаче ньютоновой механики в вероятностной постановке // Деп. в ВИНИТИ 14.02.92. – № 499-В92. – 54 с.
25. *Ватанабэ С., Икэда Н.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. – М.: Наука, 1986. – 445 с.
26. *Тлеубергенов М. И., Ажымбаев Д. Т.* О стохастической задаче Гельмгольца для систем Биркгофа // Материалы VIII Междунар. науч. конф. "Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры". – 2018. – С. 126 – 131.
27. *Пугачев В. С., Синицын И. Н.* Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. – М.: Наука, 1990. – 642 с.
28. *Сагиров П.* Стохастические методы в динамике спутников // Механика. Периодический сборник переводов иностранных статей. – 1974. – № 5(147). – С. 28 – 47; 1974. – № 6(148). – С. 3 – 38.
29. *Синицын И. Н.* О флуктуациях гироскопа в кардановом подвесе // Изв. АН СССР. Механика тв. тела. – 1976. – № 3. – С 23 – 31.
30. *Шульгин М. Ф.* О некоторых дифференциальных уравнениях аналитической динамики и их интегрировании. – Ташкент: Изд-во Среднеазиат. гос. ун-та, 1958. – 183 с.
31. *Аппель П.* Теоретическая механика. – М.: Физматлит, 1960. – 487 с.
32. *Стратонович Р. Л.* Новая форма записи стохастических интегралов и уравнений // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. – 1964. – № 1. – С. 3 – 11.
33. *Ito K.* On a stochastic differential equation // Mem. Amer. Math. Soc. – 1951. – **4**. – P. 51 – 89.

Получено 26.03.19,
после доработки — 04.05.19