УДК 517.91

# КОЛЕКТИВНА ДИНАМІКА ТА БІФУРКАЦІЇ У СИМЕТРИЧНИХ МЕРЕЖАХ ФАЗОВИХ ОСЦИЛЯТОРІВ. II

**О. А. Бурилко**

*Ін-т математики НАН України*
*вул. Терещенківська, 3, Київ, 01004, Україна*
*e-mail: burylko@yahoo.co.uk*

The present paper is the second part of a brief review of the development of the Kuramoto model of coupled phase oscillators. We consider several systems that are generalizations of the classical Kuramoto model and given on symmetric oscillatory networks for different functions of interaction between elements. We describe the collective dynamics and bifurcations of transitions between different modes of interacting elements, namely: full and partial synchronizations, the global anti-phase mode, and a slow switching mode between clusters. We show the interconnection between symmetries of the network and the existence of invariant manifolds of the system, cluster states and more complicated collective modes. We also describe dynamics of the model with central element, the system with circulant and block structure of the network. The coexistence of conservative and dissipative dynamics as well as the existence of chimera states and modes of struggle for synchronization are demonstrated.

Дана стаття є другою частиною короткого огляду розвитку моделі Й. Курамото зв'язаних фазових осциляторів. Розглянуто декілька систем, які є узагальненнями класичної моделі Курамото та задані на симетричних осциляторних мережах при різних функціях взаємодії між елементами. Описано колективну динаміку та біфуркації переходів між різними режимами взаємодіючих елементів: повну та часткову синхронізації, режим глобальної антифази, режим повільного перемикання між кластерами. Показано взаємозв'язок симетрій мережі з існуванням інваріантних многовидів системи, кластерних станів та більш складних колективних режимів. Також описано динаміку моделі з центральним елементом, системи з циркулянтною та блочною структурою мережі. Продемонстровано співіснування консервативної та дисипативної динамік, а також існування химерних станів та режимів боротьби за синхронізацію.

**1. Вступ.** Дана стаття є продовженням роботи [1] про різні колективні режими у моделях зв'язаних осциляторів, заданих на симетричних мережах. У попередній частині було коротко окреслено історію дослідження колективної динаміки (різноманітних типів синхронних режимів) у складних системах зв'язаних елементів та мотивацію виникнення математичних моделей таких систем. Детально розглядалася одна з найпростіших та найпопулярніших моделей зв'язаних елементів, а саме: *модель Курамото зв'язаних фазових осциляторів* [2, 3]. Також розглядалися різні узагальнення стандартної моделі Курамото *ідентичних глобально зв'язаних* фазових осциляторів. Системи такого типу мають максимальну кількість симетрій, які є причиною існування інваріантних областей, інваріантних многовидів, різноманітних кластерних режимів та гетероклінічних циклів. У даній частині роботи розглядаються моделі фазових осциляторів, заданих на симетричних мережах, але вже з *неглобальною* взаємодією між елементами. Будуть описані деякі важливі властивості колективної динаміки систем з центральним елементом, систем з циркулянтним зв'язком та систем нерозрізнюваних елементів. Втрата глобальної взаємодії у таких мережах природньо призводить до втрати певних симетрій, відповідних кластерних режимів, а також до руйнування канонічних інваріантних областей. Фазова замкненість траєкторій глобально зв'язаних систем також втрачається при розриванні зв'язків між осциляторами. У кожному з трьох згаданих вище випадків системи мають свої особливості та притаманні лише їм топологічні структури та режими колективної взаємодії. Метою даної частини роботи є, значною мірою, демонстрація цікавих колективних явищ, що виникають у осциляторних мережах із різною архітектурою зв'язків. Відмітимо, що кожне з продемонстрованих тут явищ для простих систем фазових осциляторів є досить універсальним і має місце також для досить складних фізичних та нейронних мереж з подібною структурою взаємодії.

Узагальнена модель Курамото $N$ зв'язаних фазових осциляторів має такий вигляд:

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} K_{ij}\Gamma_{ij}(\theta_i - \theta_j), \quad i = 1, \ldots, N, \tag{1}$$

де $\theta_i \in [0, 2\pi) = \mathbb{T}^1$ — фазові змінні, $\omega_i$ — власні частоти осциляторів, $K_{ij}$ — параметри (сили) зв'язків між осциляторами, $\Gamma_{ij}(x)$ — гладкі $2\pi$-періодичні функції зв'язку. Кожна змінна $\theta_i$ пробігає одновимірне коло і, отже, фазовим простором системи є тор $\mathbb{T}^N$. Праві частини загальної системи (1) залежать від фазових різниць $\theta_i - \theta_j$, що свідчить про наявність у системи симетрії фазового зсуву вздовж кола $\mathbb{T}^1$, яка задається дією $\theta_i \mapsto \theta_i + \varepsilon$. Таким чином, разом з оригінальною системою (1) зручно досліджувати систему у фазових різницях

$$\varphi_i = \theta_1 - \theta_{i+1}, \quad i = 1, \ldots, N-1, \tag{2}$$

яка має такий вигляд:

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = \Delta_i + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\left(K_{1,j}\Gamma_{1,j}(\varphi_{j-1}) - K_{i+1,j}\Gamma_{i+1,j}(\varphi_{j-1} - \varphi_{i-1})\right), \quad i = 1, \ldots, N-1,$$

де $\Delta_i = \omega_1 - \omega_{i+1},\ i = 1, \ldots, N-1$, та $\varphi_0 = 0$. Для зручності досліджень, для редукції системи (1) окрім фазових різниць (2) можна користуватися будь-яким набором з $N-1$ лінійно незалежних фазових різниць $\varphi_{ij} = \varphi_i - \varphi_j$, оскільки динаміки різних зведених систем є топологічно еквівалентними між собою.

Як зазначалось у ч. 1 роботи, математичне задання мереж динамічно взаємодіючих між собою елементів (осциляторів, нейронів тощо) завжди має *три основні складові*: 1) опис динаміки *індивідуального* (не зв'язаного з іншими) *вузла* за допомогою рівнянь або систем рівнянь; 2) опис *архітектури взаємодії між окремими елементами мережі*, що найчастіше можливо за допомогою графу зв'язків; 3) опис *впливу одного елемента на інший у кожній ланці зв'язки*, що відбувається за допомогою додаткових виразів у правих частинах системи індивідуального елемента або за допомогою додаткових рівнянь чи систем рівнянь. У даній роботі здебільшого будуть розглянуті системи *рівноправних* між собою елементів, для яких перераховані вище складові 1 – 3 є симетричними. А саме: розглядаємо *ідентичні* осцилятори з однаковими власними частотами

$$\omega_i = \omega, \quad i = 1, \ldots, N \tag{3}$$

(всі вузли системи однакові), задані на *симетричних* мережах (матриця зв'язків $K = (K_{ij})_{i,j=1}^N$ має певні симетрії) та з *однаковою* функцією взаємодії $\Gamma_{ij}(x) = g(x)$ (однаковий зовнішній вплив на кожен елемент). Винятком із даної ситуації є система з центральним елементом, де параметри центрального осцилятора відрізняються від параметрів інших рівноправних між собою осциляторів. Очевидно, що система у фазових різницях для моделі ідентичних осциляторів має $\Delta_i = 0,\ i = 1, \ldots, N$.

У ч. 1 даної роботи було наведено означення різних типів колективної динаміки для системи зв'язаних фазових осциляторів. Нагадаємо деякі з них. Будемо говорити, що:

– два осцилятори $\theta_i$ та $\theta_j$ є *фазово синхронізованими*, якщо $|\theta_i(t) - \theta_j(t)| \to 0$ при $t \to \infty$;

– $\theta_i$ та $\theta_j$ знаходяться в *протифазі*, якщо $|\theta_i(t) - \theta_j(t)| \to \pi$ при $t \to \infty$;

– $\theta_i$ та $\theta_j$ є *фазово замкненими*, якщо $|\theta_i(t) - \theta_j(t)| \leq \mathrm{const} < 2\pi$ для довільних $t$;

– $\theta_i$ та $\theta_j$ є *фазово незамкненими*, якщо попередня умова не виконується;

– $\theta_i$ та $\theta_j$ є *десинхронізованими*, якщо вони не є фазово замкненими (різниця може перевищувати $2\pi$ для великих значень $t$);

– система має *режим повної синхронізації*, якщо всі $N$ осциляторів синхронізовані між собою;

– система має *$m$-кластер* або *часткову синхронізацію*, якщо $m$ осциляторів синхронізовані, $1 < m < N$;

– система є десинхронізованою, якщо має принаймні два десинхронізовані осцилятори;

– система (1) має *режим повільного перемикання*, якщо відповідна система у фазових різницях має гетероклінічний цикл.

Інші потрібні означення будуть даватися безпосередньо перед використанням.

У даній роботі будуть розглянуті осциляторні моделі, задані на мережах з досить простими симетріями, які легко описати. У наступному пункті буде описано осциляторну модель, задану на зіркоподібній мережі з центральним керуючим елементом, та біологічну мотивацію її виникнення. У п. 3 буде розглянуто осциляторну модель, задану на циркулянтній мережі, яка за умови кососиметричності матриці взаємодії має часово-оборотну симетрію, що, в свою чергу, приводить до співіснування консервативної та дисипативної динамік у системі. У п. 4 розглядається більш явище, ніж тип моделі. А саме: обговорюються поняття химерних станів у системах взаємодіючих елементів. Усі розглядувані тут моделі та явища є досить відомими та досліджуються у великій кількості наукових робіт. Наведений у статті огляд не може претендувати на повноту, а лише дає попередню уяву про колективну динаміку в осциляторних моделях різного типу; також наведено літературу (вибірково), де такі моделі вивчаються досить детально.

**2. Модель з центральним елементом.** У даному пункті ми розглядаємо систему типу Курамото, задану на осциляторній мережі з центральним блоком (елементом), радіально зв'язаним з периферичними елементами. Мережі з центральним елементом з'являються як частини більш складних мереж в таких різноманітних областях, як системи зв'язку, соціальні мережі та нейронна структура мозку ссавців. В останньому випадку вони широко розповсюджені завдяки конвергентній організації сполук в ієрархії структур мозку [4, 5].

Такі мережі можуть відігравати важливу роль у моделюванні мультисенсорної інтеграції [6, 7] та уваги [8, 9].

***2.1. Нейронна модель пам'яті та уваги.*** Увага є здатністю ссавців виділяти з великого обсягу інформації, що надходить одночасно, деяку частину (зазвичай найбільш цікаву або важливу), яка повинна бути піддана більш детальній обробці. Система уваги є ієрархічною, тобто в ній є певна підсистема, що називається *центральним виконуючим елементом*, яка організовує включення того чи іншого об'єкта у фокус уваги [8, 10 – 12]. Експериментальні дані [13] показують, що взаємодія центрального елемента системи уваги з нейронними ансамблями, що являють собою зорові об'єкти, здійснюються шляхом синхронізації на частотах у гамма-діапазоні. В роботах [14 – 17] запропоновано та проаналізовано модель уваги, що базується на фазовому автопідлаштуванні частоти в системі фазових осциляторів. Згідно з цією моделлю у фокус уваги включається той об'єкт, який кодується в корі коливальною активністю, що є синхронізованою з активністю центрального елемента. Цю модель було використано для реалізації послідовного вибору об'єктів у фокус уваги [9] та одночасного відслідковування руху декількох цільових об'єктів [18, 19]. Вивчення систем з центральним елементом може бути корисним для розуміння ролі синхронізації в когнітивних функціях. Моделі фазових осциляторів забезпечують зручний та математично придатний інструмент для таких досліджень.

У мережах з центральним блоком глобальна взаємодія елементів реалізується через *центральний осцилятор (ЦО)*, який має прямі та зворотні зв'язки з усіма іншими осциляторами, які називаються *периферичними осциляторами (ПО)*. Крім з'єднань із ЦО, ПО можуть мати локальні зв'язки зі своїми сусідами, які є, як правило, набагато слабшими, ніж з ЦО [9, 19 – 21]. Будемо вважати, що ЦО має індекс $0$, а периферичні — індекси $i = 1, \ldots, N$. Ми розглядаємо модель, динаміку якої задано системою звичайних диференціальних рівнянь:

$$\frac{d\theta_0}{dt} = \omega_0 + \sum_{i=1}^{N} f(\theta_i - \theta_0), \tag{4}$$

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega + g(\theta_0 - \theta_i), \quad i = 1, \ldots, N, \tag{5}$$

де $(\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_N) \in \mathbb{T}^{N+1}$ — фазові змінні на $(N+1)$-вимірному торі, $\theta_i \in [0, 2\pi)$, $\omega$ — власна частота (ідентичних) ПО, $f(x)$ та $g(x)$ — функції впливу ПО на ЦО та навпаки, відповідно. Вважаємо, що функції $f(x)$, $g(x)$ є непарними, $2\pi$-періодичними та гладкими. З таких припущень, зокрема, випливає

$$f(0) = f(\pi) = g(0) = g(\pi) = 0. \tag{6}$$

Система (4), (5) є частковим випадком більш загальної системи (1) з матрицею зв'язків $K = (K_{ij})_{i,j=0}^{N}$, де $K_{i0} = K_{0j} = 1$, $i, j = 1, \ldots, N$, та $K_{ij} = 0$ в інших випадках, а також функціями зв'язків $\Gamma_{0j}(x) = f(x)/N$, $j \neq 0$, $\Gamma_{i0}(x) = g(x)/N$, $i \neq 0$. Віднімаючи рівняння (4) від (5), отримуємо систему у фазових різницях

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = -\sum_{j=1}^{N} f(\varphi_j) - g(\varphi_i), \quad i = 1, \ldots, N, \tag{7}$$

де $\varphi_i = \theta_i - \theta_0,\ i = 1, \ldots, N$. Позначимо

$$f'(0) = a_1, \qquad f'(\pi) = a_2, \qquad g'(0) = b_1, \qquad f'(\pi) = b_2. \tag{8}$$

Система (7) має симетрію перестановок $\mathbf{S}_N$, що є спільною властивістю з оригінальною системою (у змінних $\theta_i$) глобально зв'язаних ідентичних осциляторів. Головною відмінністю є те, що дана редукована система вже не має симетрії фазового зсуву. Незважаючи на те що система (7) має інваріантні кластерні режими $\varphi_i = \varphi_j,\ i \neq j$ (що відповідають кластерам $\theta_i = \theta_j$ оригінальної системи (4), (5)), дані кластери вже не виділяють замкнену інваріантну область $\mathcal{C}$ у $\mathbb{T}^N$ (опис інваріантних областей у ч. 1 даної роботи [1]), оскільки $\varphi_i = 0$ не є інваріантними множинами системи в даному випадку. На відміну від системи з глобальним зв'язком, система з зіркоподібним зв'язком має *фазово незамкнені режими*, що відповідають негомотопічним нулю траєкторіям.

***2.2. Антифазні стани в моделі з центральним елементом.*** Точки $\Phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_N)$ з координатами $\varphi_i \in \{0, \pi\},\ i = 1, \ldots, N$, є положеннями рівноваги системи (7), (8) (проте система може мати й інші положення рівноваги). Позначимо через $\Phi_k$ точки, що мають $k$ координат, рівних $0$, та $(N-k)$ координат, рівних $\pi$. Дана точка відповідає режиму, при якому $k$ ПО виграли боротьбу за синхронізацію з ЦО, а $N-k$ інших ПО її програли (знаходяться у протифазі до ЦО). З точки зору моделювання уваги стійкі режими $\Phi_k$ можуть бути добре інтерпретовані, оскільки описують ситуації, коли $k$ об'єктів (властивостей) попали в фокус уваги, а інші — ні. У цих позначеннях точка $\Phi_N = \Phi_{\rm sync}$ — режим повної синхронізації, $\Phi_0$ — режим антифази всіх ПО з ЦО, $\Phi_1$ — режим *"переможець отримає все"* (лише один ПО виграв змагання за синхронізацію з ЦО).

Згідно з симетрією, всі точки $\Phi_k$ мають однакові властивості. Стійкість та біфуркаційні властивості цих точок можна описати, використовуючи позначення (8). Відповідно до [20] точка $\Phi_k$ є асимптотично стійкою, якщо для відповідних значень $k$ виконуються умови

$$\begin{aligned}
&k = 0: && b_2 > 0, \quad a_2 > -b_2/N,\\
&k = 1: && b_2 > 0, \quad L_1 > 0, \quad L_2 > 0,\\
&2 \le k \le N-2: && b_1 > 0, \quad b_2 > 0, \quad L_1 > 0, \quad L_2 > 0,\\
&k = N-1: && b_1 > 0, \quad L_1 > 0, \quad L_2 > 0,\\
&k = N: && b_1 > 0, \quad a_1 < -b_1/N,
\end{aligned} \tag{9}$$

де

$$L_1 = kb_2a_1 + (N-k)b_1a_2 + b_1b_2, \qquad L_2 = ka_1 + (N-k)a_2 + (b_1 + b_2).$$

Для того щоб стійка точка $\Phi_k$ була вузлом, крім нерівностей (9) потрібно вимагати також виконання співвідношення

$$\left(\frac{ka_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{(N-k)a_2}{2}\right)^2 \ge 0.$$

В іншому випадку ці точки будуть стійкими фокусами.

Поверхні $L_1 = 0$ та $L_2 = 0$ є біфуркаційними поверхнями у просторі параметрів $(a_1, a_2, b_1, b_2)$. Кожна з цих поверхонь відповідає або біфуркації Андронова – Хопфа, або вилковій біфуркації точки $\Phi_k$ залежно від співвідношення параметрів та розмірності фазового простору. Зауважимо, що в багатьох випадках згадані вище локальні біфуркації є частинами глобальних гетероклінічних біфуркацій та ведуть до складних гетероклічних циклів. У просторах розмірності $N \geq 3$ залежно від вигляду функцій $f(x)$, $g(x)$ ці біфуркації приводять також до аналогів біфуркацій сідло-фокусу Шильнікова та біфуркацій типу Шильнікова – Хопфа. Більш детально такі біфуркації для конкретних функцій $f(x)$, $g(x)$ розглянуто в роботах [20, 22].

***2.3. Модель з двогармонічним зв'язком.*** Більш детально опишемо випадок, коли функції зв'язків є двогармонічними, а саме:

$$f(x) = a(\sin x + r\sin(2x)), \qquad g(x) = b(\sin x + p\sin(2x)),$$

де $a,\ b,\ r,\ p$ — параметри. В даному випадку система у фазових змінних (7) має вигляд

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = -\sum_{j=1}^{N} a(\sin\varphi_j + r\sin(2\varphi_j)) - b(\sin\varphi_i + p\sin(2\varphi_i)), \quad i = 1, \ldots, N. \tag{10}$$

Використовуючи симетрії мережі зв'язків та непарності функцій $f,\ g$, можна знайти інваріантні многовиди системи (10), а також більш детально описати її біфуркаційні властивості. Дана система має два типи інваріантних кластерних многовидів:

– $m$-вимірні многовиди

$$\mathcal{M}_m = \{(\varphi_1, \ldots, \varphi_N) \colon \varphi_{k_1} = \varphi_{k_2} = \cdots = \varphi_{n-m+1}\}, \quad m = 1, \ldots, N,$$

що відповідають $(n-m+1)$-кластерам периферичних осциляторів з урахуванням їхньої $\mathbf{S}_N$ симетрії,

– $m$-вимірні многовиди

$$\mathcal{Q}_m = \big\{(\varphi_1, \ldots, \varphi_N) \colon \varphi_{k_i} + \varphi_{k_j} = 0, \varphi_{k_l} \in \{0, \pi\}\big\},$$

$$i = 1, \ldots, m, \quad j \neq i, \quad l = 2m+1, \quad m = 1, \ldots, [N/2],$$

(де $[x]$ — ціла частина числа $x$), що виникають відповідно до симетрії непарності правих частин системи.

Система (10) має такі біфуркації точок $\Phi_k$ (серед інших в основному глобальних біфуркацій):

– біфуркації Андронова – Хопфа в точці $\Phi_k$, що задається в параметричному просторі поверхнею

$$AH(\Phi_k) = \{(a, b, r, p) \colon 4bp + 2Nar + (2k - N)a = 0\}, \quad k = 1, \ldots N-1;$$

– вилкові біфуркації, що залежно від параметра $k$ задаються виразами

$$PF(\Phi_k) = \big\{(a, b, r, p) \colon a(N(4pr + 2r - 2p - 1) + $$
$$+ 4k(p - r)) + b(4p^2 - 1) = 0\big\}, \quad k = 1, \ldots N-1,$$

$$PF(\Phi_N) = \{(a, b, r, p) \colon b(2p + 1) + Na(2r + 1) = 0\},$$

$$PF(\Phi_0) = \{(a, b, r, p) \colon b(2p - 1) + Na(2r - 1) = 0\}$$

та приводять до появи (зникнення) двох нових точок усередині інваріантного многовиду $\mathcal{M}_m$;

– вилкові біфуркації, що відбуваються на біфуркаційних поверхнях:

$$PF_*(\Phi_k) = \{(a, b, r, p) \colon p = -1/2\}, \quad k = 1, \ldots, N,$$

$$PF^*(\Phi_k) = \{(a, b, r, p) \colon p = 1/2\}, \quad k = 0, \ldots, N - 1,$$

у транскритичних до інваріантних многовидів напрямках та приводять до появи $k - 1$ для $PF_*(\Phi_k)$ та $N - k - 1$ для $PF^*(\Phi_k)$ пар нових положень рівноваги з кожної особливої точки $\Phi_k$;

– вироджена біфуркація "перемикання", що відбувається на гіперплощині

$$SW(\Phi_k) = \{(a, b, r, p) \colon b = 0\}, \quad k = 0, \ldots, N,$$

яка змінює напрямок впливу центрального осцилятора на периферичні.

Велика кількість описаних вище колективних властивостей зберігається і для більш загальної системи з зірко-подібною структурою зв'язків, але з різними функціями впливу $f_1, \ldots, f_N$ периферичних осциляторів на центральний. Відповідна система у фазових різницях має такий вигляд:

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = -\sum_{j=1}^{N} f_j(\varphi_j) - g(\varphi_i), \quad i = 1, \ldots, N. \tag{11}$$

Дана система втрачає частину симетрій залежно від співвідношень функцій $f_i$ між собою. Дана система також має (крім інших) ті ж положення рівноваги $\Phi_k$ при виконанні умов (6). Крім того, система (11) має інваріантні многовиди $\mathcal{M}_m$, $\mathcal{Q}_m$ для довільних функцій $f_1, \ldots, f_N$, $g$. Важливою є *ієрархічна структура* системи (11) відносно своїх інваріантних многовидів $\mathcal{M}_m$, що наявна на відміну від більшості осциляторних систем, заданих на мережах з іншою архітектурою. Це означає, що будь-яка $m$-вимірна система (11) має ту ж динаміку, що й динаміка на деякому інваріантному многовиді $\mathcal{M}_m$ загальної $N$-вимірної системи (11) ($m < N$) з новими непарними функціями $\widetilde{f_i}$, що є лінійними комбінаціями старих функцій $f_i$. Дана властивість дозволяє автоматично описувати динаміку системи на її інваріантних многовидах, використовуючи вже отримані результати для цієї ж системи менших розмірностей. Детальні дослідження маловимірних систем такого типу з наведенням великої кількості фазових портретів, біфуркаційних та схематичних діаграм наведено в роботах [20, 22].

У роботах [20, 23] досліджуються колективна динаміка систем із центральним елементом у випадках, коли периферичні елементи взаємодіють між собою, тобто коли система (4), (5) має більш загальний вигляд:

$$\frac{d\theta_0}{dt} = \omega_0 + \sum_{i=1}^{N} f(\theta_i - \theta_0),$$

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega + g(\theta_0 - \theta_i) + \sum_{k \in \mathcal{N}_i} h(\theta_k - \theta_i), \qquad i = 1, \ldots, N,$$

де $h(x)$ — функція локальної взаємодії між ПО, $\mathcal{N}_i$ — множина індексів взаємодії ПО між собою. Очевидно, що системи зі слабкими периферичними зв'язками більш точно моделюють реальні нейронні процеси. Особливу увагу в згаданих роботах приділено питанню впливу архітектури периферичних зв'язків та сили взаємодії між різними ПО на загальну колективну динаміку системи. Зокрема, показано, що стійкий режим повної синхронізації ($\Phi_N$ для системи у фазових різницях) залишається стійким і при досить слабких зв'язках між периферичними елементами незалежно від конфігурації зв'язків, і стійкість такого режиму тим важче порушити, чим більшу кількість ПО залучено в мережу. Натомість, стійкість антифазних режимів може бути легко зруйнована при появі незначних зв'язків між периферичними елементами.

***2.4. Консервативний хаос.*** Осциляторна зіркоподібна система з трьома та більше периферичними осциляторами може демонструвати досить складну хаотичну поведінку. Можна вказати зв'язок між векторним полем (4), (5) та добре відомим ABC-потоком (Arnold – Beltrami – Childress flow), який вперше досліджувався в роботі В. Арнольда [24]. Розглянемо систему

$$\begin{aligned}
\frac{d\varphi_1}{dt} &= A \sin\varphi_3 + C\cos(\varphi_2 - \delta),\\
\frac{d\varphi_2}{dt} &= B \sin\varphi_1 + A\cos(\varphi_3 - \delta),\\
\frac{d\varphi_3}{dt} &= C \sin\varphi_2 + B\cos(\varphi_1 - \delta).
\end{aligned} \tag{12}$$

Система (12) є ABC потоком із параметрами $A,\ B,\ C$ при $\delta = 0$ та співпадає з системою у фазових різницях (7) для моделі з трьома ПО і функціями зв'язків $f(x) = g(x) = -\sin x$ при $A = B = C = 1,\ \delta = \pi/2$. Хаотична поведінка ABC-потоку вивчалась і описана в літературі з різних точок зору [25 – 28]. Система має так званий консервативний хаос, коли хаотична траєкторія заповнює майже весь фазовий тор $\mathbb{T}^3$ за винятком одно- та двовимірних інваріантних многовидів цієї системи. Подібну поведінку мають фазові потоки системи (4), (5) трьох ПО при певному розподілі параметрів. Таким чином задана система має три інваріантні площини $\mathcal{M}_2$ вигляду $\varphi_i = \varphi_j$, що розділяють фазовий простір $\mathbb{T}^3$ на дві інваріантні області, заповнені хаотичними фазово незамкненими траєкторіями [22]. Фазовий простір також пронизаний одновимірними інваріантними множинами $\mathcal{M}_1\colon \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3$ та $\mathcal{Q}_1$ вигляду $\varphi_i + \varphi_j = 0,\ \varphi_k \in \{0, \pi\},\ i, j, k = 1,\, 2,\, 3.$ Аналізуючи умови стійкості положень рівноваги (9), можна знайти таку відкриту область у просторі параметрів, що всі точки $\Phi_k \in \mathbb{T}^3$ системи є сідловими. В роботі [22] описано ситуацію, коли система має як положення рівноваги лише сідлові точки $\Phi_0,\ \Phi_3$ та сідло-вузлові точки $\Phi_1,\ \Phi_2$ (котрих по три, враховуючи симетрію), і всі ці точки з'єднані між собою в гетероклінічний цикл за допомогою одновимірних інваріантних многовидів $W^u(\Phi_k)$, $W^s(\Phi_k)$, частина з яких співпадає зі згаданими вище многовидами $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{Q}_1$, а інші (фокусні) належать многовидам типу $\mathcal{M}_2$. Весь фазовий простір у цьому випадку пронизаний сіткою гетероклінічних циклів. Ці гетероклінічні цикли є основою існування хаотичних траєкторій подібно до ситуації, описаної в роботі Л. Шильнікова про хаос в околі петлі сідло-фокуса [29]. Біфуркації коразмірності два, описані, зокрема, в роботах [30, 31], приводять до появи гетероклінічних циклів, вузлами яких є сідлові точки та сідлові цикли. Ці біфуркації є причиною деформації та стискання хаосу, який може займати вже не весь тороїдальний фазовий простір. Відмітимо, що рух фазової точки вздовж гетероклінічної траєкторії з різними вузлами $\Phi_k$ відповідає моделюванню перемикання уваги з одного об'єкта на інший у нейронній системі.

Згідно зі згаданою вище ієрархією структури відносно власних інваріантних многовидів система у фазових різницях розмірності $N \geq 4$ має хаотичну структуру всередині інваріантних многовидів $\mathcal{M}_m$, $m = 3, \ldots, N-1$, якщо вона має таку структуру при $N = 3$. Отже, для системи фазових осциляторів із центральним елементом можна підібрати функції зв'язку таким чином, що вона буде мати консервативний хаос, подібний до ABC-потоку, або хаотичний атрактор для довільних розмірностей $N \geq 3$.

***2.5. Інші моделі з центральним елементом.*** Виходячи з біологічної мотивації більш точного опису нейронних процесів пам'яті та уваги, в роботах [32, 33] запропоновано та досліджено осциляторну систему *з центральним елементом та адаптацією*, що є природнім узагальненням системи (4), (5). Тобто досліджувалася система зв'язаних осциляторів із центральним елементом та силами зв'язків $K_{ij} = K_{ij}(t)$, які вже є не константами, а невідомими функціями, що описуються додатковими диференціальними рівняннями. В даній моделі частота центрального осцилятора $\omega_0 = \omega_0(t)$ також задається додатковим диференціальним рівнянням, мета якого адаптувати частоту ЦО з частотою ПО, що з ним синхронізуються і який виявляється в даному випадку єдиним. Дана модель добре описує обчислювальний принцип *"переможець отримує все"*, який часто використовується в штучних нейронних мережах, а також при дослідженні нейронних процесів мозку [34 – 38].

Виходячи з фізичної та біологічної мотивації, розглядаються різноманітні системи з центральним елементом та з кількома хабами. Зокрема досліджувалися колективні режими в зіркоподібних мережах із дискретним часом [39], зіркоподібних системах Стюарта – Ландау [40], рекурентних нейронних мережах [41, 42], різних осциляторних і нейронних мережах із кількома хабами [7, 43 – 47].

**3. Консервативно-дисипативна динаміка в осциляторних моделях.** У даному пункті розглянемо осциляторні мережі, що мають циклічну симетрію. Такі мережі досліджуються з метою опису різноманітних природних явищ та демонстрації цікавих математичних ефектів. Ми опишемо випадок, коли взаємодія між кожною парою осциляторів є протилежно направленою, але має однакову силу. Така мережа має реверсивну симетрію, що, у свою чергу, є причиною співіснування двох протилежних динамік: консервативної та дисипативної в одному фазовому просторі.

***3.1. Осциляторна модель з циркулянтним зв'язком.*** Розглянемо трансляційно-інваріантне коло зв'язаних фазових осциляторів із періодичними крайовими умовами

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_i + \sum_{j=1}^{N} K_{j-i} g(\theta_i - \theta_j), \quad i = 1, \ldots, N, \tag{13}$$

де $\theta_i \in [0, 2\pi)$ — фазові змінні, $\omega_i$ — власні частоти, $g(x)$ — гладка $2\pi$-періодична функція зв'язку, $K_j$, $j = 1, \ldots, N$, — параметри сили взаємодії між осциляторами, а всі індекси визначаються за модулем $N$. Коефіцієнт $K_N = K_0$ визначає самовплив осцилятора на себе. Система (13) є частковим випадком системи (1), яку задано за допомогою *циркулянтної* матриці зв'язків

$$K = \mathrm{circ}(K_0, K_1, \ldots, K_{N-1}) = \begin{pmatrix} K_0 & K_1 & \ldots & K_{N-2} & K_{N-1} \\ K_{N-1} & K_0 & K_1 & \ddots & K_{N-2} \\ \vdots & K_{N-1} & K_0 & \ddots & \vdots \\ K_2 & \ddots & \ddots & \ddots & K_1 \\ K_1 & K_2 & \ldots & K_{N-1} & K_0 \end{pmatrix}, \tag{14}$$

(іншими словами $K_{ij} = K_{i-j}$) та однієї функції взаємодії між елементами $\Gamma_{ij}(x) = g(x)/N$.

Відповідна до (13) система у фазових змінних (2) має вигляд

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = \Delta_i + \sum_{j=1}^{N-1} K_j (g(\varphi_j) - g(\varphi_{i+j} - \varphi_i)), \quad i = 1, \ldots N-1, \tag{15}$$

де всі індекси визначаються за модулем $N$. Основні результати будемо формулювати саме для редукованої системи (13) у фазовому просторі $\mathbb{T}^{N-1}$.

Більш детально опишемо деякі властивості системи (13) у випадку ідентичних осциляторів, тобто при виконанні рівності (3). Циркулянтна структура зв'язків у мережі та ідентичність осциляторів індукують еквіваріантність системи відносно циклічної групи $\mathbb{Z}_N$, що задається дією

$$\gamma \colon (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N) \longmapsto (\theta_N, \theta_1, \ldots, \theta_{N-1}).$$

Циклічна симетрія системи (13), (3) приводить до існування інваріантних *рівномірно розподілених станів* (або *хвиль обертання*)

$$\Theta^{(k)}_{\mathrm{splay}}(t) = \left(\theta(t,k), \theta(t,k) - \frac{2\pi k}{N}, \ldots, \theta(t,k) - \frac{(N-1)2\pi k}{N}\right), \quad k = 0, \ldots, N-1,$$

де

$$\theta(t,k) = \left(\omega + \sum_{j=1}^{N} K_{j-i} g\left(\frac{2jk\pi}{N}\right)\right) t,$$

для довільних функцій зв'язку $g(x)$. Для відповідної (13), (3) системи у фазових різницях (15), (3) стани рівномірного розподілу частот $\Theta^{(k)}_{\mathrm{splay}}(t)$ відповідають положенням рівноваги

$$\Phi^{(k)}_{\text{splay}} = \left(\frac{2k\pi}{N}, \frac{4k\pi}{N}, \ldots, \frac{2(N-1)k\pi}{N}\right).$$

Частковим випадком стану рівномірного розподілу частот із хвильовим номером $k = 0$ є стан *повної синхронізації* всіх осциляторів системи

$$\Theta_{\text{sync}}(t) = \Theta^{(0)}_{\text{splay}}(t) = (\theta(t), \ldots, \theta(t)),$$

що для системи у фазових змінних є початком координат $\Phi_{\text{sync}} = \Phi^{(0)}_{\text{splay}} = (0, \ldots, 0)$. Відмітимо, що крім $\Phi^{(k)}_{\text{splay}}$ система (15), (3) може мати інші положення рівноваги залежно від функції зв'язку $g(x)$.

Дослідження положень рівноваги $\Phi^{(k)}_{\text{splay}},\ k = 0, \ldots, N-1,$ показує, що типовою біфуркацією для цих точок є біфуркація Андронова – Хопфа (вироджена або невироджена). При цьому, у випадку кососиметричності матриці сил взаємодії між елементами, синхронний стан $\Phi_{\text{sync}}$ є нейтральним у той час, як інші $\Phi^{(k)}_{\text{splay}}$ є атракторами або репелерами [48]. Останнє вказує на можливість співіснування консервативної динаміки в околі $\Phi_{\text{sync}}$ з дисипативною у системі при виконанні певних додаткових умов для функції взаємодії.

***3.2. Реверсивність осциляторної системи та співіснування консервативної та дисипативної динамік.*** Осциляторна система, задана на циркулянтній мережі, є джерелом багатьох нетривіальних колективних динамік. Усі, описані в [1], синхронні режими можливі для даної системи, оскільки *мережа глобально зв'язаних ідентичних елементів* є частковим випадком *циркулянтної мережі*. Також (як буде показано нижче) *кільцева мережа ідентичних елементів* є джерелом *химерних станів* у системі при наявності інших додаткових умов. У цьому пункті ми опишемо лише певні властивості такої системи у випадку, коли зв'язки в одному та іншому напрямках між кожними двома елементами є рівними за модулем, але протилежного знака. Наведемо деякі результати для систем у фазових різницях (15), зауважуючи те, що оригінальна система (13) має ті ж самі відповідні властивості.

Система у фазових різницях (15) *ідентичних* фазових осциляторів з *циркулянтною* та *кососиметричною* матрицею взаємодії $K$ (з $K_j = -K_{-j}$) має *часово-оборотну симетрію* $\mathcal{R}\colon \mathbb{T}^{N-1} \longrightarrow \mathbb{T}^{N-1}$, де

$$\mathcal{R}(\varphi_1, \ldots, \varphi_{N-1}) = (\varphi_{N-1}, \ldots, \varphi_1), \quad t \longmapsto -t.$$

Нагадаємо, що інволюція $\mathcal{R}$ є часово-оборотною симетрією системи $d\Phi/dt = G(\Phi)$, якщо

$$G(\mathcal{R}\Phi) = -\mathcal{R}(G\Phi)$$

та $\mathcal{R}^2 = id$, де $id$ означає ідентичне перетворення [49], тобто $\mathcal{R}$ відображає будь-який розв'язок $\Phi(t)$ у інший розв'язок $\mathcal{R}\Phi(-t)$ цієї ж системи зі зворотним напрямком фазового потоку. Системи з часово-оборотною симетрією є досить широким класом динамічних систем з притаманною лише їм геометрією фазового простору. Властивості реверсивних систем досить інтенсивно досліджуються кілька останніх десятиліть [50 – 57]. Класичні результати стосуються існування сімей періодичних розв'язків, еліптичних особливих точок та інваріантних торів. Детальну бібліографію робіт відносно вказаної тематики можна знайти в оглядовій роботі [58].

Однією з найбільш цікавих особливостей часово-оборотних систем є співіснування консервативної (гамільтоноподібної) та дисипативної динамік у одному фазовому просторі. Співіснування консервативної та дисипативної динамік описано для конкретних фізичних систем, зокрема, для тривимірної лазерної системи [59], масивів надпровідникових з'єднань Джозефсона [60, 61], системи анізотропно зв'язаних сфер (Stokeslet model) [62]. У роботах [63, 64] існування консервативно-дисипативної динаміки показано для ланцюгів та кілець осциляторних систем, а також вказано можливу фізичну інтерпретацію цього явища.

Система, що має часово-реверсивну симетрію, може бути цілком консервативною, без наявності атракторів і репелерів, фазовий простір якої заповнений сім'ями нейтральних періодичних, квазіперіодичних чи навіть хаотичних траєкторій і гетероклінічних циклів. Динаміка такої системи нагадує динаміку гамільтонової системи, хоча консервативна часово-оборотна система не зобов'язана бути парновимірною. З іншого боку, часово-оборотна система може бути й дисипативною з притягувальними та відштовхувальними елементами фазового простору. Дві описані динаміки можуть мати місце й для однієї і тієї ж реверсивної системи, але для різних значень її параметрів. Найбільш цікавим є третій тип реверсивних систем, фазовий простір яких розділений на дві області, перша з яких є консервативною і заповнена нейтральними траєкторіями, а друга — дисипативною та містить репелери й атрактори, а також траєкторії, що притягуються до перших і відштовхуються від других. Межею між консервативною та дисипативною областями є, як правило, гетероклінічний цикл або багатовимірна інваріантна множина гетероклінічних циклів (коли розмірність системи більша 2). Як правило, часово-реверсивна система з параметром може бути консервативно-дисипативною для більшості значень цього параметра і лише консервативною або лише дисипативною для граничних значень цього параметра. Детально згадані властивості для систем зв'язаних осциляторів (13) та (15) описано в [48].

Фіксованим простором інволюції $\mathcal{R}$ системи (15) є простір

$$\mathrm{Fix}\,\mathcal{R} = \{\Phi \in \mathbb{T}^{N-1} \colon \mathcal{R}\Phi = \Phi\} = \left\{\Phi \in \mathbb{T}^{N-1} \colon \varphi_i = \varphi_{N-i},\ 1 \le i \le \left[\frac{N-1}{2}\right]\right\}.$$

Його розмірність залежить від парності фазового простору системи $\dim(\mathrm{Fix}\,\mathcal{R}) = [N/2]$.

Наведемо кілька властивостей розв'язків системи залежно від їх перетинів з фіксованим підпростором $\mathcal{R}$.

Якщо деяка орбіта перетинає $\mathrm{Fix}\,\mathcal{R}$ у двох точках, то вона є *періодичною* та складається з двох частин, що відображаються з однієї в іншу за допомогою інволюції $\mathcal{R}$.

Кожна *неперіодична* траєкторія може перетинати $\mathrm{Fix}\,\mathcal{R}$ не більше одного разу;

*атрактори* та *репелери* оборотної системи не належать $\mathrm{Fix}\,\mathcal{R}$;

якщо оборотна система має *атрактор* $\mathcal{A}$, то вона має й *репелер* $\mathcal{R}\mathcal{A}$;

якщо траєкторія починається у *джерелі* та перетинає $\mathrm{Fix}\,\mathcal{R}$, то вона прямує до симетричного *стоку*, та ця траєкторія є *гетероклінічною*.

З суперпозиції симетрій $\mathbb{Z}_N$ та $\mathcal{R}$ випливає існування інших $N-1$ реверсивних симетрій $\mathcal{R}_i,\ i = 2, \ldots, N$. Таким чином, існують $N-1$ гіперплощин $\mathrm{Fix}\,\mathcal{R}_i = \gamma^i \mathrm{Fix}\,\mathcal{R}_1,\ \mathcal{R}_1 := \mathcal{R}$, що є інваріантними відносно трансформацій $\mathcal{R}_i$. Всі $\mathcal{R}_i$ перетинаються в точці $\Phi_{\mathrm{sync}}$, якщо $N$ є парним, та вони перетинаються вздовж одновимірної лінії $V_0 = (\varphi, 0, \varphi, 0, \ldots, \varphi, 0, \varphi)$,

$\varphi \in \mathbb{T}^1$, якщо $N$ є непарним. Описані вище перетини і є центрами консервативних областей системи (15).

У роботі [48], використовуючи теоретичні результати [62, 65], показано, що система (15) з *циркулянтною кососиметричною* матрицею взаємодії $K$ та функцією зв'язків $g(x)$ такою, що $g'(0) \neq 0$, має такі динамічні режими:

**А)** *Сім'ї періодичних розв'язків* в околі точки $\Phi_{\text{sync}}$. Існує однопараметрична сім'я періодичних розв'язків $\Phi_\sigma(t)$ в околі $\Phi_{\text{sync}}$, коли $N$ є непарним, та двопараметрична сім'я $\Phi_{(\sigma_1,\sigma_2)}(t)$ періодичних розв'язків, коли $N$ є парним, з періодом, близьким до $2\pi/\Omega_m$, де

$$\Omega_m = 2g'(0) \sum_{j=1}^{[(N-1)/2]} K_j \sin\left(\frac{2mj\pi}{N}\right).$$

**Б)** *Щільна множина інваріантних торів в околі* $\Phi_{\text{sync}}$. У будь-якому околі $\Phi_{\text{sync}}$ існують аналітичні $[(N-1)/2]$-вимірні квазіперіодичні тори з несумірними частотами, близькими до $\Omega_1, \ldots, \Omega_{[(N-1)/2]}$.

**В)** *Дисипативна динаміка*. Положення рівноваги $\Phi_{\text{splay}}^{(k)}$, $k \neq 0$, є стоком, якщо виконується умова

$$\sum_{j=1}^{[(N-1)/2]} K_j \left(g'\left(\frac{2\pi k}{N} j\right) - g'\left(-\frac{2\pi k}{N} j\right)\right)\left(1 - \cos\left(\frac{2mj\pi}{N}\right)\right) < 0, \quad m = 1, \ldots, N-1.$$

У цьому випадку $\Phi_{\text{splay}}^{(-k)}$ є джерелом.

Пункти А) та Б) описують консервативну динаміку в околі стану повної синхронізації у той час, як п. В) описує можливість дисипативної динаміки в околі рівномірно розподілених станів. Система (15) має співіснування режимів А) та Б) з режимом В) майже для довільних функцій зв'язку $g(x)$, оскільки майже завжди можна підібрати циркулянтну кососиметричну матрицю зв'язків, для якої виконуються всі необхідні додаткові нерівності.

Позначимо через $\mathcal{D}_0$ консервативну область в околі синхронної особливої точки $\Phi_0$. Питання структури межі $\partial\mathcal{D}_0$ згаданої області є досить складним у загальному випадку, оскільки залежить від параметрів матриці $K$ та функції $g(x)$. Проте, можна сказати, що $\partial\mathcal{D}_0$ є $(N-2)$-вимірною гіперповерхнею у фазовому просторі $\mathbb{T}^{N-1}$ системи (15), яка цілком складається з гетероклінічних циклів.

У двовимірному випадку область $\mathcal{D}_0$ обмежена $\mathbb{Z}_3$-симетричним гетероклінічним циклом та заповнена нейтральними періодичними траєкторіями, що концентрично охоплюють точку $\Phi_{\text{sync}}$. У тривимірному випадку область $\mathcal{D}_0$ обмежена тетраедроподібною поверхнею, яка складається з гетероклінічних циклів та цілком заповнена двопараметричною сім'єю періодичних орбіт, що охоплюють однопараметричну сім'ю положень рівноваги з координатами $(\varphi, 0, \varphi)$, $\varphi \in \mathbb{T}$. Згідно з викладеним у п. А) сім'ї періодичних орбіт є двовимірними для непарних $N$ та тривимірними для парних. Отже, для системи у фазових різницях, фазовий простір якої є $(N-1)$-вимірним, консервативна область цілком заповнена періодичними орбітами лише у дво- та тривимірному випадках $\mathbb{T}^{N-1}$. Для старших розмірностей $N \geq 5$ область $\mathcal{D}_0$ вже є заповненою квазіперіодичними або хаотичними розв'язками, в які "вплетено" дво- чи тривимірну поверхню періодичних орбіт.

Система (15) може мати декілька консервативних областей. Зокрема для парних розмірностей особлива точка $\Phi_{\text{splay}}^{N/2}$ також завжди є центром консервативної області. Так, для $N = 4$ фазовий простір має дві консервативні області навколо точок $\Phi_{\text{sync}}$ та $\Phi_{\text{splay}}^{(2)}$, а також дисипативну область, яка містить гетероклінічні траєкторії, що зв'язують притягувальну (відштовхувальну) особливу точку $\Phi_{\text{splay}}^{(1)}$ та відштовхувальну (притягувальну) особливу точку $\Phi_{\text{splay}}^{(3)}$ (як це показано в роботі [48]). У загальному випадку кількість консервативних областей збільшується зі збільшенням кількості гармонік функції зв'язку $g(x)$. Як правило, дисипативна область залишається однозв'язною незалежно від кількості консервативних "острівців" у системі.

Система (15) з *циркулянтною кососиметричною* матрицею зв'язків $K$ та з *непарною* функцією взаємодії між елементами $g(x)$ є *консервативною* (бездивергентною). Крім того, така система має перший інтеграл

$$E_1(\varphi_1, \ldots, \varphi_{N-1}) = \sum_{i=0}^{N-1} h(\varphi_i - \varphi_{i+1}),$$

де $h'(\varphi) = g(\varphi)$, $\varphi_N = \varphi_0 = 0$. У випадку парних $N$, непарної $g(x)$ та розрідженої кососиметричної матриці (14) з $K_j = 0$ для парних $j$, система (15) має також інший перший інтеграл

$$E_2(\varphi_1, \ldots, \varphi_{N-1}) = \sum_{i=1}^{N-1} (-1)^{i-1} \varphi_i.$$

Система (15) з *циркулянтною кососиметричною* матрицею $K$ та *непарною* функцією $g(x)$ є *градієнтною*, а отже, *дисипативною* в усьому просторі $\mathbb{T}^{N-1}$. Вказані два випадки для функції $g(x)$ є граничними. Для консервативно-дисипативної динаміки необхідно, щоб функція $g(x)$ була ні парною, ні непарною. Відмітимо, що система (15) з *симетричною матрицею* $K$ (як, зокрема у випадку глобального зв'язку, описаного в [1]) є *градієнтною* при *непарних* $g(x)$ та *бездивергентною* при *парних* $g(x)$. Тобто ситуація для симетричних та кососиметричних матриць є протилежною. Варто зауважити, що система з симетричним зв'язком не має консервативно-дисипативної динаміки при жодних функціях взаємодії.

***3.3. Кільцеві осциляторні мережі з протилежним зворотнім зв'язком.*** Частковим випадком системи (13) є система, задана на кільцевій мережі, де кожен осцилятор діє з однаковими силами на $l$ сусідів, що знаходяться за годинниковою стрілкою по колу від нього, та протилежними — на ті, що знаходяться проти годинникової стрілки. Вибравши дані сили $K_j = -K_j = 1$, $j = 1, \ldots, l$, $l < N/2$, систему ідентичних осциляторів можна записати у вигляді

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega + \sum_{j=1}^{l} g(\theta_i - \theta_{i+j}) - \sum_{j=N-l}^{N-1} g(\theta_i - \theta_{i+j}), \quad j = 1, \ldots N. \tag{16}$$

Тоді відповідна редукована система записується у вигляді

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = \sum_{j=1}^{l} \big(g(\varphi_j) - g(\varphi_{i+j} - \varphi_i)\big) - \sum_{j=N-1}^{N-l} \big(g(\varphi_j) - g(\varphi_{i+j} - \varphi_i)\big). \tag{17}$$

*Система трьох зв'язаних осциляторів* вигляду (16) з одногармонічною функцією зв'язку (Курамото – Сакагучі [66]):

$$g(x) = -\sin(x-\alpha), \tag{18}$$

де $\alpha$ — параметр фазового зсуву, є найпростішим прикладом системи зі співіснуванням консервативної та дисипативної динамік. У цьому випадку система у фазових різницях є двовимірною:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_1}{dt} &= -\sin(\varphi_1-\alpha) - b\sin(\varphi_2-\alpha) - b\sin(\varphi_1+\alpha) - \sin(\varphi_1-\varphi_2+\alpha), \\ \frac{d\varphi_2}{dt} &= -\sin(\varphi_1-\alpha) - b\sin(\varphi_2-\alpha) - \sin(\varphi_2+\alpha) - b\sin(\varphi_2-\varphi_1+\alpha). \end{aligned} \tag{19}$$

Дана система має циклічну симетрію $\mathbb{Z}_3$, що генерується дією $\gamma_{\mathbb{Z}_3}\colon (\varphi_1,\varphi_2) \mapsto (-\varphi_2, \varphi_1-\varphi_2)$, часово-оборотну симетрію $\mathcal{R}$, задану дією $\gamma_{\mathcal{R}}\colon (\varphi_1,\varphi_2,t) \mapsto (\varphi_2,\varphi_1,-t)$, та оборотну симетрію зсуву по параметру, задану дією $\gamma_\alpha\colon (\varphi_1,\varphi_2,\alpha,t) \mapsto (\varphi_1,\varphi_2,\alpha+\pi,-t)$. Суперпозиція $\mathbb{Z}_3$ та $\mathcal{R}$ приводить до існування трьох інволюцій $\mathcal{R}_i,\ i=1,2,3$, з відповідними фіксованими просторами $\mathrm{Fix}\,\mathcal{R}_1\colon \varphi_1=\varphi_2,\ \mathrm{Fix}\,\mathcal{R}_2\colon \varphi_2=0,\ \mathrm{Fix}\,\mathcal{R}_3\colon \varphi_1=0$.

Система (19) є консервативною при $\alpha=0,\ \alpha=\pi$ і має перший інтеграл $E(\varphi_1,\varphi_2) = \cos\varphi_1+\cos\varphi_2+\cos(\varphi_1-\varphi_2)$. При $\alpha=\pm\pi/2$ система є градієнтною (отже, дисипативною). Коли параметр $\alpha$ не є рівним вказаним вище значенням, тоді система має співіснування консервативної динаміки у деякій області фазового простору з дисипативною динамікою у решті цього простору. Консервативна область $\mathcal{D}_0$ формується навколо синхронного положення рівноваги $\Phi_{\mathrm{sync}}=(0,0)$. Ця область обмежена $\mathbb{Z}_3$-симетричним гетероклінічним циклом (криволінійним трикутником), який складається з трьох сідел: $S_1\,(\widetilde{\varphi},\widetilde{\varphi}) \in \mathrm{Fix}\,\mathcal{R}_1,\ S_2\,(-\widetilde{\varphi},0) \in \mathrm{Fix}\,\mathcal{R}_2,\ S_3\,(0,-\widetilde{\varphi}) \in \mathrm{Fix}\,\mathcal{R}_3$, де $\widetilde{\varphi}=\pi$-$2\alpha$, та їхніх одновимірних інваріантних многовидів $W^u(S_i)=W^s(S_{i+1}),\ i=1,2,3$. Область $\mathcal{D}_0$ заповнена однопараметричною сім'єю концентричних навколо точки $\Phi_{\mathrm{sync}}$ траєкторій. Дисипативна область $\mathbb{T}^2 \setminus \mathcal{D}_0$ динамічної системи формується навколо двох положень рівноваги $\Phi^{(1)}_{\mathrm{splay}}=(2\pi/3,4\pi/3),\ \Phi^{(2)}_{\mathrm{splay}}=(4\pi/3,2\pi/3)$, одна з яких є притягувальною, а інша — відштовхувальною при $\alpha\neq\pm\pi/2$. Вся дисипативна область заповнена гетероклінічними траєкторіями, що зв'язують точки $\Phi^{(1)}_{\mathrm{splay}}$ та $\Phi^{(2)}_{\mathrm{splay}}$.

Консервативна область $\mathcal{D}_0$, що займає весь фазовий простір $\mathbb{T}^2$ при $\alpha=0$, починає зменшуватися при збільшенні $|\alpha|$ і стягується у точку $\Phi_{\mathrm{sync}}$ (тобто зникає) при $|\alpha|=\pi/2$. Натомість, дисипативна область, якої не було при $\alpha=0$, народжується навколо $\Phi^{(1)}_{\mathrm{splay}}$, $\Phi^{(2)}_{\mathrm{splay}}$ при $|\alpha|\neq 0$, збільшується при збільшенні $|\alpha|$ і захоплює увесь фазовий простір, коли $|\alpha|$ досягає $\pi/2$. При подальшому збільшенні $|\alpha|$ від $\pi/2$ до $\pi$ всі процеси відбуваються симетрично у зворотному напрямку. Прослідкувати стиснення консервативної області легко, відслідковуючи рух трьох сідлових точок $S_i$ гетероклінічного циклу по фіксованих лініях реверсивної симетрії $\mathrm{Fix}\,\mathcal{R}_i$ зі зміною параметра $\alpha$. Відмітимо також, що значення $\alpha=0$ та $\alpha=\pi$ є біфуркаційними для особливих точок $\Phi^{(1)}_{\mathrm{splay}}$, $\Phi^{(2)}_{\mathrm{splay}}$, де відбувається вироджена біфуркація Андронова – Хопфа. У момент біфуркації точки $\Phi^{(1)}_{\mathrm{splay}}$, $\Phi^{(2)}_{\mathrm{splay}}$ охоплені нейтральними сім'ями концентричних періодичних орбіт. Значення $\alpha=\pm\pi/2$ є біфуркаційними для точки $\Phi_{\mathrm{sync}}$, де відбувається потрійна вироджена транскритична біфуркація вздовж кожної лінії $\mathrm{Fix}\,\mathcal{R}_i,\ i = 1, 2, 3$. У момент біфуркації точка $\Phi_{\mathrm{sync}}$ перетворюється з центра (для $\alpha \neq \pm\pi/2$) у вироджене сідло шести сідловими комірками.

*Система чотирьох зв'язаних осциляторів* вигляду (16) з функцією зв'язку (18) також демонструє консервативно-дисипативну динаміку, що має як спільні, так і принципово відмінні риси з системою меншої розмірності. Відповідна тривимірна система у фазових змінних (17) для $N = 4,\ l = 1$ має дві консервативні області $\mathcal{D}_0$ навколо синхронного стану $\Phi_{\mathrm{sync}} = (0, 0, 0)$ та $\mathcal{D}_2$ навколо стану подвійної антифази $\Phi^{(2)}_{\mathrm{splay}}(\pi, 0, \pi)$ (два осцилятори знаходяться в антифазі до двох інших). Інші дві фіксовані точки $\Phi^{(1)}_{\mathrm{splay}} = (\pi/2, \pi, 3\pi/2)$ та $\Phi^{(3)}_{\mathrm{splay}} = (3\pi/2, \pi, \pi/2)$ є атрактором та репелором для $\alpha \neq 0$ і $\alpha \neq \pi$. Дисипативна область $\mathbb{T}^3\backslash(\mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_2)$ формується з гетероклінічних траєкторій, що з'єднують $\Phi^{(1)}_{\mathrm{splay}}$ та $\Phi^{(3)}_{\mathrm{splay}}$.

Консервативні області $\mathcal{D}_0$ та $\mathcal{D}_2$ мають однакову структуру внаслідок симетрії $\mathbb{Z}_2$, відрізняючись лише протилежними напрямками векторного поля всередині областей. Кожна з цих областей обмежена тетраедроподібною поверхнею ($\partial\mathcal{D}_0$ та $\partial\mathcal{D}_2$ відповідно), чотири ребра якої складає $\mathbb{Z}_4$-симетричний гетероклінічний цикл, а два інші ребра повністю складаються з сідлових точок, що є виродженими сідлами (нейтрально стійкими вздовж ребер). Грані кожної з тетраедроподібних поверхонь $\partial\mathcal{D}_0,\ \partial\mathcal{D}_2$ заповнені однопараметричною сім'єю гетероклінічних траєкторій (дугами, що з'єднують дві сідлові точки одного зі згаданих вище двох ребер). Кожні дві гетероклінічні траєкторії формують гетероклінічний цикл. Отже, описана межа області $\partial\mathcal{D}_0$ (або $\partial\mathcal{D}_2$) складається з двох двовимірних множин двосідлових гетероклінічних циклів (дві пари склеєних граней), що з'єднані чотирисідловим гетероклінічним циклом у тетраедроподібну поверхню. Внутрішня частина $\partial\mathcal{D}_0$ (або $\partial\mathcal{D}_2$) заповнена двопараметричною сім'єю нейтральних граничних циклів, що містяться концентрично навколо нейтральних особливих точок прямої $V_0 = \bigcap_{i=1}^{4} \mathrm{Fix}\,\mathcal{R}_i = (\varphi_1, 0, \varphi_1)$ (відмітимо, що $\mathrm{Fix}\,\mathcal{R}_1 = \mathrm{Fix}\,\mathcal{R}_3,\ \mathrm{Fix}\,\mathcal{R}_2 = \mathrm{Fix}\,\mathcal{R}_4$). Кожна періодична траєкторія перетинає $\mathrm{Fix}\,\mathcal{R}_1$ у двох точках $(\overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2, \overline{\varphi}_1)$ та $(\overline{\varphi}_1 - \overline{\varphi}_2, -\overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_1 - \overline{\varphi}_2)$, а площину $\mathrm{Fix}\,\mathcal{R}_2$ — у точках $(-\overline{\varphi}_1, 0, \overline{\varphi}_2 - \overline{\varphi}_1)$ та $(\overline{\varphi}_2 - \overline{\varphi}_1, 0, -\overline{\varphi}_1)$, де $\overline{\varphi}_1,\ \overline{\varphi}_2$ — початкові значення траєкторії на $\mathrm{Fix}\,\mathcal{R}_1$.

Як і у випадку меншої розмірності при $\alpha = 0$ (та $\alpha = \pi$, симетрично), система (17) є повністю консервативною і, отже, $\mathcal{D}_0 \bigcup \mathcal{D}_2 = \mathbb{T}^3$. При збільшуванні параметра $|\alpha|$ від нуля кожна з консервативних областей стискається, звільняючи простір для дисипативної області. І при досягненні $|\alpha|$ значення $\pi/2$ обидві консервативні області стягнуться до особливих точок $\Phi^{(1)}_{\mathrm{splay}}$ та $\Phi^{(3)}_{\mathrm{splay}}$ (які в цей момент є виродженими сідлами), надаючи можливість дисипативній області максимально розширитись і заповнити весь фазовий простір.

*П'ять осциляторів* можуть бути зв'язані у кільцеву осциляторну мережу вигляду (16) двома способами: локально (кожен осцилятор з'єднаний лише з двома найближчими сусідами, $l = 1$) та глобально (кожен взаємодіє з усіма двома типами зв'язків, $l = 2$). У обох випадках $l = 1$ та $l = 2$ система у фазових різницях (17) має консервативно-дисипативну динаміку. Консервативна область $\mathcal{D}_0 \in \mathbb{T}^4$ сконцентрована навколо нейтральної синхронної точки $\Phi_{\mathrm{sync}}$. Вона обмежена $\mathbb{Z}_5$-симетричною гіперповерхнею (багатогранником) $\partial\mathcal{D}_0$, що цілком складається з гетероклінічних циклів. Межу $\partial\mathcal{D}_0$ можна описати за допомогою повного направленого графа, що базується на п'яти вершинах (сідлових особливих точках) $S_i$ та має десять ребер. Тривимірні грані $\partial\mathcal{D}_0$ цілком заповнені гетероклінічними траєкторіями, що з'єднують дві різні сідлові вершини $S_i$. В результаті утворюються дво- та тривимірні множини гетероклінічних циклів, сформовані гетероклінічними траєкторіями з однієї або кількох граней. Область $\mathcal{D}_0$ заповнена щільною двопараметричною множиною концентричних (навколо $\Phi_{\rm sync}$) квазіперіодичних торів, в яку вплітається 5 однопараметричних (однакових відносно симетрії $\mathbb{Z}_5$) множин періодичних орбіт. Наявність квазіперіодичних траєкторій суттєво відрізняє випадки $N \geq 5$ від випадків $N = 3$ та $N = 4$. Дисипативна область $\mathbb{T}^4 \setminus \mathcal{D}_0$ формується навколо положень рівноваги $\Phi^{(i)}_{\rm splay}$, $i = 1, \ldots, 4$, два з яких є атракторами, а два інших — репелерами, та цілком заповнена гетероклінічними траєкторіями, що зв'язують пари точок $\Phi^{(i)}_{\rm splay}$.

*Системи довільної кількості $N$ осциляторів* вигляду (16) та (17) також мають співіснування консервативної та дисипативної динамік для $g(x) = -\sin(x - \alpha)$ незалежно від кількості зв'язків між сусідами $l$. Є принципова відмінність структури консервативної області $\mathcal{D}_0 \in \mathbb{T}^{N-1}$ для (17) та її межі $\partial\mathcal{D}_0$ для парних та непарних $N$. Межа $\partial\mathcal{D}_0$ є $\mathbb{Z}_N$-симетричною та $(N-2)$-вимірною гіперповерхнею у $\mathbb{T}^{N-1}$ або гіпербагатогранником, що може бути описаний повним графом, який базується на сідлових точках $S_i$, $i = 1, \ldots, N$, як вершинах. Всі $N(N-1)/2$ одновимірні ребра $\partial\mathcal{D}_0$ є інваріантними многовидами сідел $S_i$ та формують гетероклінічні цикли у випадку непарних $N$. Лише $N(N-3)/2$ ребра $\partial\mathcal{D}_0$ є гетероклінічними траєкторіями у випадку парної кількості осциляторів, інші $N$ ребер цілком складаються з однопараметричних множин вироджених сідел. У випадку непарних $N$ всі внутрішні для $\mathcal{D}_0$ періодичні та квазіперіодичні орбіти концентруються навколо точки $\Phi_{\rm sync}$, у той час як для парних $N$ такі ж орбіти є сконцентрованими навколо однопараметричної множини особливих центральних точок $V_0 = (\varphi, 0, \varphi, 0, \ldots, \varphi, 0, \varphi)$, де $\varphi$ є параметром розташування особливої точки на прямій. Сім'я періодичних орбіт всередині $\mathcal{D}_0$ є однопараметричною для непарних $N$ та двопараметричною для парних. У випадку парних $N$ крім консервативної області $\mathcal{D}_0$ завжди є й інша симетрична область $\mathcal{D}_{N/2}$ навколо положення рівноваги $\Phi^{(N/2)}_{\rm splay}$. Зміна параметра $|\alpha|$ від 0 до $\pi/2$ проводить трансформацію від повністю консервативної системи до консервативно-дисипативної і, врешті, до повністю дисипативної (як і в описаних випадках малої розмірності). Подібна ситуація з негомотопічними областями спостерігається, зокрема, для іншого типу реверсивних систем у роботах [60, 61, 63]. Додатковий чисельний аналіз показує наявність хаотичних траєкторій у консервативній області (принаймні для $N \geq 6$), які перемішуються з періодичними та квазіперіодичними орбітами. Відмітимо, що хаотичні траєкторії у цьому випадку нейтрального типу, тобто подібні до класичних ABC-потоків [26, 67].

***3.4. Системи неідентичних елементів.*** Виявляється, що система (13) може мати консервативно-дисипативну динаміку й у разі часткового порушення симетрій. Така особлива динаміка зберігається при певних співвідношеннях між частотами осциляторів $\omega_i$ та симетріях функції $g(x)$.

Система (13) (а також (15)) з *циркулянтною кососиметричною* матрицею зв'язків $K$ та *непарною* функцією взаємодії $g(x)$ є *бездивергентною* для *довільних власних частот* $\omega_i$ та довільних розмірностей $N$. Тобто весь фазовий простір $\mathbb{T}^{N-1}$ системи (15) заповнений нейтральними (по відношенню одна до одної) траєкторіями (які можуть бути, в тому числі, й хаотичними). При цьому, на відміну від випадку ідентичних частот $\omega_i = \omega$, періодичні, квазіперіодичні орбіти чи гетероклінічні цикли можуть бути як гомотопічними нулю, так і ні.

Система може бути консервативно-дисипативною, коли збурення власних частот порушує циклічну симетрію $\mathbb{Z}_N$, але залишає принаймні одну часово-оборотну симетрію $\mathcal{R}$ (з $N$ наявних $\mathcal{R}_i$ для ідентичних осциляторів). Така симетрія $\mathcal{R}$ зберігається, якщо власні частоти $\omega_i$ є попарно-рівновіддаленими від якогось середнього значення. Позначимо через $\Phi_\Delta^{(k)}$ особливу точку, що утворилася зі стану розподілених фаз $\Phi_{\text{splay}}^{(k)},\ k = 0, \ldots, N-1$, при збуренні вектора частот $\Delta = (\Delta_1, \ldots, \Delta_{N-1}),\ \Delta_i = \omega_1 - \omega_i,\ i = 1, \ldots, N-1$. У даних позначеннях $\Phi_\Delta^{(0)}$ утворюється шляхом збурень $\Phi_{\text{sync}} = \Phi_{\text{splay}}^{(0)}$. Точка $\Phi_\Delta^{(k)}$ залишиться атрактором (репелером) при малих збуреннях $\Delta$ від положення $(0, \ldots, 0)$ у випадку, коли точка $\Phi_{\text{splay}}^{(k)}$ є атрактором (репелером). Таким чином, (15) з циркулянтною кососиметричною $K$ може мати консервативно-дисипативну динаміку, якщо для частотних різниць виконується співвідношення

$$\Delta_{N-i} = -\Delta_i, \quad i = 1, \ldots, [N/2], \tag{20}$$

та принаймні одна з точок $\Phi_\Delta^{(k)},\ k \neq 0$, є стоком або джерелом. Відмітимо, що при виконанні умови (20) та збуренні $\Delta$ і точка $\Phi_\Delta^{(0)}$ рухається вздовж $\operatorname{Fix}\mathcal{R}$, рухаючи за собою всю консервативну частину. Біфуркації параметрів $\Delta$ можуть привести до зникнення як консервативної, так і дисипативної областей.

Система (15) може мати багато консервативних “острівців”, якщо функція зв’язків $g(x)$ має вищі гармоніки у розкладі в ряд Фур’є. У випадку рівновіддалених власних частот консервативні області можуть бути топологічно нетривіальними, без центральних особливих точок всередині. Крім того, межі консервативних областей можуть мати дуже складну структуру, а декілька таких областей з різною топологією можуть знаходитися всередині одна одної [48].

У кінці даного пункту зазначимо, що значну кількість теоретичних результатів отримано також для циркулянтних мереж, вузли яких можуть задаватися складними баговимірними системами або системами з запізненням. Симетрія обертання таких мереж є джерелом багатої динамічної поведінки, включаючи обертальні хвилі [68 – 74], гетероклінічні цикли [75 – 80], симетричний хаос [68, 81 – 83], химерні стани [84, 85], компактони [64]. Як застосування в науці про нейрони, біфуркаційні механізми в кільцях зв’язаних нейронів типу Ходжкіна – Хакслі з гальмуючими та збуджуючими синапсами вивчалися в роботах [86 – 89], де були виявлені складні динамічні сценарії та мультистабільність. У роботах [48, 90, 91] показано зв’язок динаміки нескінченновимірних осциляторних систем, заданих на циркулянтних мережах з розв’язками комплексного рівняння Гінзбурга – Ландау та нелінійного рівняння Шрьодінгера.

**4. Химери в моделях зв’язаних осциляторів.** ***4.1. Поняття химерного стану.*** Даний пункт присвячено більш опису деякого досить нового цікавого колективного явища, ніж певної осциляторної моделі. У роботі [84] Й. Курамото та Д. Баттогтох уперше показали, що множина ідентичних осциляторів, заданих на кільцевій мережі, може під дією динамічної системи розділитися на дві групи таким чином, що всі осцилятори однієї групи є когерентними та фазово замкненими, у той час, як осцилятори іншої групи є некогерентними та десинхронізованими. Така колективна поведінка здається неймовірною, враховуючи те, що всі елементи мережі є рівноправними. Д. Абрамс та С. Строгатц назвали згодом таку колективну поведінку *химерним станом* (або просто *химерою*) [85], підкреслюючи назвою поєднання непоєднуваних елементів. Існування химерних станів стало предметом інтенсивного теоретичного та експериментального дослідження. Відмітимо, що за останні два десятиліття вийшло близько семисот робіт, присвячених даній тематиці. Чисельні дослідження показали, що химерні стани можуть виникати в системах на мережах дуже різної архітектури та для дуже різноманітних об'єктів, кожен з яких має складну індивідуальну динаміку. Було показано, що химерні стани виникають у механіці [92, 93], хімії [94], біології [95], науці про нейрони [96, 97], електроніці [98, 99], оптиці [100], електрохімії [101], соціології [102] та при дослідженні поведінки фінансового ринку [103]. Важливим для теоретичного дослідження химерних станів, на нашу думку, стала запропонована Е. Оттом та Т. Антонсеном теорія [104] (анзац Отта – Антонсена). Цікавим є й той факт, що перші експериментальні дослідження, які підтвердили існування химерних станів [94, 105], з'явилися приблизно через десятиріччя після першої теоретичної роботи [84]. Останнім часом дослідження химерних станів відбувається дуже інтенсивно, впроваджуються нові поняття динамічних режимів, пов'язаних з химерами, досліджуються химери на різноманітних мережах взаємодії елементів та з різними індивідуальними вузлами, химерні стани описуються все більш широкими класами динамічних систем [102, 106 – 112].

***4.2. Означення слабкої химери.*** Перші результати про когерентно-некогерентні режими наведено в роботі [84] для комплекснозначної осциляторної системи, заданої рівнянням типу Гінзбурга – Ландау з періодичними крайовими умовами. Ті ж химерні режими має й фазова частина рівняння Гінзбурга – Ландау, що задається рівнянням

$$\frac{\partial\theta(y,t)}{\partial t} = \omega + \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathcal{G}(y-\overline{y})\sin(\theta(y,t)-\theta(\overline{y},t)+\alpha)d\overline{y}, \tag{21}$$

де $y \in \mathbb{T}^1$ — просторова змінна, $\theta(y,t)$ — фаза осцилятора у позиції $y$, $\omega$ — частота, $\alpha$ — параметр фазового зсуву, $\mathcal{G}(y-\overline{y})$ є парною функцією (ядром), що забезпечує нелокальний зв'язок між осциляторами на колі залежно від відстані між ними $|y-\overline{y}|$. У перших роботах [84, 85] ядро мало відповідно вигляд $\mathcal{G}(y) = \kappa\exp(-\kappa|y|)/2$ та $\mathcal{G}(y) = (1+\kappa\cos y)/(2\pi)$, де $\kappa$ — параметр. Теоретичні дослідження щодо химерних станів підтверджуються чисельними експериментами для великої кількості зв'язаних осциляторів і параметра фазового зсуву $\alpha$, близького до $\pi/2$.

Від рівняння (21) можна перейти до скінченновимірної системи Курамото – Сакагучі з функцією $g(x) = -\sin(x-\alpha)$ вигляду

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega + \sum_{j=1}^{N} K_{ij}g(\theta_i-\theta_j), \quad i = 1,\ldots,N, \tag{22}$$

з циркулянтною симетричною матрицею $K = (K_{ij})_{i,j=1}^{N}$, елементи якої розподілені подібно до $\mathcal{G}(y)$, де $|y|$ — дискретний аналог відстані елемента матриці до діагонального елемента. Необхідною вимогою того, що колективний режим може вважатися химерою, є рівноправність усіх елементів мережі. Очевидно, що кільцева структура мережі не є найбільш загальною у цьому випадку і, крім того, дослідження показують наявність химер не лише для кільцевих мереж. У найбільш загальному випадку є сенс розглядати *нерозрізнювані осцилятори*, тобто такі, що є ідентичними та взаємозв'язаними у розумінні, що кожен із них має однакову кількість та силу зв'язків [113].

У перших теоретичних роботах щодо химер, як правило, розглядалися масиви нескінченної або великої кількості зв'язаних осциляторів. Для повного розуміння структури таких динамічних режимів важливо було б дослідити, яка мінімальна кількість елементів забезпечує існування химер та наскільки складним при цьому повинен бути кожен елемент мережі. У більшості робіт щодо химер, однак, автори не намагалися зробити строге аналітичне визначення стану химери, яке можна легко застосувати до маловимірних систем. Неявним визначенням химерних станів є приклади режимів, наведені у перших класичних роботах з цієї тематики [84, 85, 114]. Перше строге означення дещо звуженого поняття химери було дано у роботі [115].

Будемо казати, що осцилятори $i$ та $j$ на траєкторії системи (22) є *частотно синхронізованими*, якщо

$$\Omega_{ij} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \left(\theta_i(t) - \theta_j(t)\right) = 0,$$

де ми вибираємо неперервне зображення для $\theta_i(t),\ \theta_j(t)$. Множина $\mathcal{A}$ є *слабким химерним станом* [115] для для системи нерозрізнюваних фазових осциляторів, якщо вона є такою зв'язною ланцюгово-рекурентною [116] інваріантною відносно потоку множиною, що на кожній траєкторії з множини $\mathcal{A}$ існують такі індекси $i,\ j$ та $k$, що $\Omega_{ij} \neq 0$, а $\Omega_{ik} = 0$.

Наведене означення не накладає обмежень на динамічну поведінку та стійкість розв'язків, що відповідають слабким химерам. Воно також не претендує на опис химерних станів у широкому розумінні з урахуванням транзитивності та хаотичності відповідних розв'язків, а також при $N \to \infty$. Проте, воно є значним кроком для розуміння поведінки когерентно некогерентних режимів маловимірних систем та допоміжним інструментом для дослідження цих режимів у загальному випадку.

***4.3. Мінімальні химери в осциляторних системах.*** З означення випливає, що траєкторія слабкого химерного стану має бути фазово незамкненою. Останнє говорить про те, що мінімальною необхідною розмірністю системи (22) має бути *чотири*, оскільки тривимірна така система є глобально зв'язаною і має лише фазово замкнені траєкторії. На систему чотирьох фазових осциляторів із тієї ж причини відразу ж накладається інша умова: повинно бути принаймні *два типи різних зв'язків* $K_{ij}$. Більш нетривіальною умовою існування химер, що випливає з додаткових досліджень, є те, що функція взаємодії мусить мати принаймні дві гармоніки у розкладі в ряд Фур'є

$$g(x) = -\sin(x-\alpha) + r\sin(2x) \tag{23}$$

з параметрами $\alpha$ та $r$.

У роботі [115] побудовано осциляторну мережу саме чотирьох фазових осциляторів $\theta_1, \ldots, \theta_4$, яка задовольняє всі зазначені вище умови. Така система має сильні зв'язки між двома парами осциляторів $K_{i,i+2} = K_{i+2,i} = 1$ та слабкі всі інші зв'язки $K_{i,i+1} = K_{i+1,i} = \varepsilon$, індекс визначається за модулем $4$. Очевидно, що тоді осциляторна мережа складається з нерозрізнюваних елементів. Система (22) у цьому випадку має вигляд

$$
\begin{aligned}
\frac{d\theta_1}{dt} &= \omega + (g(\theta_1-\theta_3)+g(0)) + \varepsilon\,(g(\theta_1-\theta_2)+g(\theta_1-\theta_4)\,,\\
\frac{d\theta_2}{dt} &= \omega + (g(\theta_2-\theta_4)+g(0)) + \varepsilon\,(g(\theta_2-\theta_3)+g(\theta_2-\theta_1)\,,\\
\frac{d\theta_3}{dt} &= \omega + (g(\theta_3-\theta_1)+g(0)) + \varepsilon\,(g(\theta_3-\theta_4)+g(\theta_3-\theta_2)\,,\\
\frac{d\theta_4}{dt} &= \omega + (g(\theta_4-\theta_2)+g(0)) + \varepsilon\,(g(\theta_4-\theta_1)+g(\theta_4-\theta_2)\,.
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Було доведено, що існує відкрита множина параметрів $(r, \alpha)$ така, що чотириосциляторна система (22), (23) має *стійкий слабкий химерний стан* для достатньо малих $|\varepsilon|$. Ідея конструювання мінімальної системи з химерною динамікою полягає в наступному. При $\varepsilon = 0$ мережа (24) складається з двох окремих осциляторних блоків (модулів) $(\theta_1, \theta_3)$ та $(\theta_2, \theta_4)$, що задаються ідентичними двовимірними системами. Двовимірна система має бістабільність синфазного режиму з протифазним при $r < -|\cos\alpha|/2$. Тому при відповідних початкових даних система (24) має два кластери (когерентні режими) $\theta_1 = \theta_3$ та $\theta_2 = \theta_4+\pi$, які можуть вільно обертатися по фазовому колу один відносно іншого (тому що блоки не зв'язані між собою при $\varepsilon = 0$), тобто бути некогерентними. Оскільки система є грубою при $\varepsilon = 0$, то когерентно-некогерентний режим зберігається й при таких збуреннях $\varepsilon$, що $|\varepsilon| < \varepsilon_0(r, \alpha)$. Відмітимо, для існування слабких химер параметр $\varepsilon$ повинен бути меншим за 1, тому що в протилежному випадку система є глобальною з ідентичною взаємодією між елементами.

Ідея конструювання блочних систем з химерами є досить плідною і дозволяє аналітично довести існування складних стійких химер для систем більшої розмірності. Розглянемо мережу з $N = mk$ осциляторів, що складається з $m$ блоків по $k$ осциляторів у кожному, і задається системою

$$
\frac{d\theta_{ij}}{dt} = \omega + \sum_{q=1}^{k}\left[K_{ij,iq}\,g(\theta_{ij}-\theta_{iq}) + \varepsilon K_{ij,pq}\sum_{p=1,p\neq i}^{m} K_{ij,iq}\,g(\theta_{ij}-\theta_{pq})\right],
$$

де $i = 1,\ldots,m,\ j = 1,\ldots,k$, а сили зв'язків $K_{ij,pq}$ вибрані так, щоб осцилятори у мережі були нерозрізнюваними. Використовуючи результати про мультистабільність у системі окремого незв'язаного $k$-вимірного блока, можна показати існування, наприклад, гетероклінічних химер [115, 117] або хаотичних [110].

У роботах [115, 118] детально досліджено існування, стійкість та біфуркації слабких химер для системи шести зв'язаних осциляторів (22) для трьох можливих (не блочних) конфігурацій мережі нерозрізнюваних елементів такої системи. Зручним методом дослідження таких маловимірних систем є знаходження можливих симетрій системи та відповідних їм інваріантних кластерних многовидів. Наприклад, для системи шести нерозрізнюваних осциляторів інваріантними є підпростори $(\theta_1,\ldots,\theta_6) = (\theta_1,\theta_2,\theta_1,\theta_1+\pi,\theta_2,\theta_1+\pi)$ та $(\theta_1,\ldots,\theta_6) = (\theta_1,\theta_1+\pi,\theta_2,\theta_1,\theta_1+\pi,\theta_2+\pi)$, але не лише вони. Слабким химерам у маловимірних системах можуть відповідати кілька осциляторних кластерів (принаймні два), що вільно один відносно одного рухаються по фазовому колу. Тому дослідженя химерних станів зводиться до дослідження розв'язків систем на многовидах меншої розмірності. Введення фазових різниць редукує розмірність вихідної системи на один, а також може редукувати і розмірність потрібного многовиду. Існуванню мінімальної химери відповідає негомотопічна нулю траєкторія на двовимірному тороїдальному многовиді системи у фазових різницях [115]. Існування інваріантного кластерного многовиду відповідає *когерентності* осциляторів у середині кластера, а негомотопічність нулю траєкторії на інваріантному торі у цьому випадку гарантує фазову незамкненість осциляторів із різних кластерів і, отже, некогерентність колективного режиму. Редукція до двовимірної системи дозволяє легше зрозуміти структуру траєкторій та біфуркаційні механізми появи мінімальних химер, досліджуючи ці питання спочатку всередині інваріантного многовиду, а потім у трансверсальних до нього напрямках. Слабка химера може бути гетероклінічною, якщо такою є відповідна траєкторія на інваріантному многовиді. В роботі [118] показано, що система шести нерозрізнюваних осциляторів може бути інтегровною і при цьому мати неперервну множину нейтральних химерних розв'язків. Відмітимо, що система п'яти локально зв'язаних на колі осциляторів Курамото – Сакагучі також може мати слабкий химерний стан вигляду $(\theta_1, \ldots, \theta_5) = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_2, \theta_1)$ для близьких до $\pi/2$ значень параметра фазового зсуву.

Як було згадано раніше, система *глобально* зв'язаних ідентичних фазових осциляторів, кожен із яких (разом зі зв'язком) задається одним рівнянням вигляду (1), не може мати химерних станів. У випадку, коли осцилятори представлені більш складними рівняннями (одна з умов порушується), химери можуть існувати і на глобальних мережах ідентичних зв'язків. Зокрема, в роботі [119] показано існування химер у моделі Курамото – Сакагучі з глобальним зв'язком та *запізненням*. У [120] описано химери у глобально зв'язних комплекснозначних осциляторах Стюарта – Ландау. У [121] продемонстровано існування химер у мережі чотирьох глобально зв'язаних лазерів.

У роботі [122] показано існування слабких химер у розширеній моделі Курамото – Сакагучі з інерцією

$$m\frac{d^2\theta_i}{dt^2} + \varepsilon\frac{d\theta_i}{dt} = \omega - \frac{K}{N}\sum_{j=1}^{N}\sin(\theta_i - \theta_j - \alpha), \quad i = 1, \ldots, N,$$

де $m$, $\varepsilon$ — додаткові параметри, для $N = 3$. Останній випадок порушує два пункти вимог, описаних вище, система є глобально зв'язаною, і мінімальна кількість осциляторів дорівнює трьом, але при цьому кожен осцилятор описується рівнянням другого порядку (або двовимірною системою). Робота [122] показує, що мінімальна кількість елементів (довільної природи) для існування химер у динамічній системі — три.

Дослідження химерних режимів проводяться у різних напрямках: побудова все більш складних мереж ідентичних елементів, де існують химери; перевірка існування химер у відомих мережах, але з іншими вузловими елементами; порівняння відповідних результатів для скінченно та нескінченновимірних систем; експериментальні дослідження та порівняння їх із теоретичними результатами та комп'ютерною симуляцією; опис химерних режимів, що мають додаткові властивості (хаотичні, фрактальні, гетероклінічні, транзитивні тощо), дослідження стійкості та біфуркацій химерних режимів. Зокрема, в роботі [123] дано класифікацію химерних станів за різними ознаками. Велика кількість останніх робіт по даній тематиці засвідчує, що химери є однією з найпопулярніших тем досліджень колективних режимів складних систем і мають дуже широкі перспективи для подальшого розвитку.

**5. Дискусія.** У даній роботі розглядалися системи зв'язаних ідентичних фазових осциляторів типу Курамото (1), заданих на мережах із різними типами симетрій. Показано, яким чином різні типи архітектури мереж та способів взаємодії між елементами впливають на існування різних типів колективної поведінки у системах. Зокрема, показано, що симетрії взаємодії між елементами завжди спонукають виникнення тих чи інших кластерних режимів. Зі свого боку кластерні режими відповідають інваріантним многовидам системи, коли кластери не руйнуються під дією векторного поля системи (що відбувається не для будь-яких мереж). Значну увагу приділено опису біфуркацій переходів між різними режимами колективної динаміки.

У першій частині даної роботи (див. [1]) описано декілька глобально зв'язаних осциляторних систем. Показано, що симетрія перестановок $\mathbf{S}_N$ усіх осциляторів відіграє вирішальну роль у формуванні динаміки системи. Наслідками симетрії перестановок є існування всіх кластерних інваріантних многовидів із довільною кількістю осциляторів, що зі свого боку приводить до виникнення канонічних інваріантних областей, які обмежують фазово замкнені траєкторії. Підгрупи групи симетрій $\mathbf{S}_N$ також спричиняють існування колективних режимів різного типу, таких, зокрема, як режим рівномірного розподілу елементів, режим глобальної протифази та різноманітні режими повільного перемикання (існування яких залежить також від параметрів функції взаємодії). Більшість указаних режимів є нестійкими до порушення ідентичності власних частот осциляторів $\omega_i$. Проте, симетричні мережі є найзручнішою відправною точкою для теоретичних досліджень і подальших досліджень несиметричних мереж при збуренні параметрів та застосуванні теорії біфуркацій.

У даній частині роботи розглядалися системи з неглобальною взаємодією між елементами, але при наявності певних симетрій. Продемонстровано, що відсутність певних зв'язків між елементами кардинально змінює їхню колективну поведінку. Зокрема, відсутність глобальної взаємодії у кожній з розглядуваних у даній частині систем призводить до відсутності симетрії перестановок, меншої кількості можливих кластерних режимів, відсутності замкнених інваріантних областей, появи фазово незамкнених орбіт. Відмова від глобального зв'язку у мережі призводить до відсутності певних колективних режимів, але приводить до появи ще більшої кількості нових режимів з дуже нетривіальними особливостями. В роботі показано, що осциляторна система з центральним елементом має мультистабільність протифазних режимів "боротьби за синхронізацію", а система нерозрізнюваних елементів може мати химерні стани або консервативно-дисипативну динаміку. Також показано, що парність чи непарність функції взаємодії може зробити осциляторну систему градієнтною чи консервативною. При цьому системи з глобальним та циркулянтно кососиметричним зв'язком мають протилежні властивості в цьому відношенні.

Відмітимо, що різноманітні моделі фазових осциляторів типу Курамото є найбільш простими динамічними системами з одновимірними вузлами та без додаткових рівнянь, що задають взаємодію між елементами. Незважаючи на це, такі системи мають дуже широкий спектр колективної динаміки, що відповідає більшості важливих режимів у більш складних системах. При цьому системи типу Курамото є одними з найзручніших для аналітичного дослідження режимів колективної поведінки. Здебільшого знайдені та добре описані режими для простих осциляторних моделей виявляються згодом у тій чи іншій (можливо видозміненій) формі у складних фізичних, хімічних чи нейронних системах. Сказане вище найкраще демонструє явище химерних станів, існування яких виявлено у різноманітних, і часто досить складних, природних системах. Дослідження простіших моделей взаємодіючих елементів часто показує напрямок та дає інструменти для дослідження більш складних та загальних систем із подібними особливостями побудови мереж. Метою даного огляду, крім опису деяких теоретичних результатів відносно складних симетричних динамічних систем, було також продемонструвати потенціал та широкі можливості дослідження й опису природних явищ колективної взаємодії, які мають у собі різноманітні осциляторні моделі типу Курамото.

### Література

1. *Бурилко О. А.* Колективна динаміка та біфуркації у симетричних мережах фазових осциляторів. I // Нелін. коливання. – 2019. – **22**, № 2. – С. 165 – 195.
2. *Kuramoto Y.* Self-entrainment of a population of coupled non-linear oscillators / H. Araki (ed.). Mathematical Problems in Theoretical Physics // Lect. Notes Phys. – 1975. – **39**. – P. 420 – 422.
3. *Kuramoto Y.* Chemical oscillations, waves, and turbulence. – Berlin: Springer, 1984.
4. *Damasio A.* The brain binds entities and events by multiregional activation from convergent zones // Neural Comput. – 1989. – **1**. – P. 123 – 132.
5. *Zhou C., Zemanova L., Zamora G., Hilgetag C. C., Kurths J.* Hierarchical organization unveiled by functional connectivity in complex brain networks // Phys. Rev. Lett. – 2006. – **97**. – 238103.
6. *Gómez-Gardeñes J., Zamora-López G., Moreno Y., Arenas A.* From modular to centralized organization of synchronization in functional areas of the cat cerebral cortex // PLoS One. – 2010. – **5(8)**. – e12313.
7. *Zamora-López G., Zhou C., Kurths J.* Cortical hubs form a module for multisensory integration on top of the hierarchy of cortical networks // Front. Neuroinform. – 2010. – **4(1)**.
8. *Cowan N.* Evolving conceptions of memory storage, selective attention, and their mutual constraints within the human information-processing system // Psycholog. Bull. – 1988. – **104(2)**. – P. 163 – 191.
9. *Borisyuk R., Kazanovich Y.* Oscillatory model of attention-guided object selection and novelty detection // Neural Netw. – 2004. – **17(7)**. – P. 899 – 915.
10. *Baddeley A.* Exploring the central executive // Quart. J. Exp. Psychology. A. – 1996. – **49(1)**. – P. 5 – 28.
11. *Baddeley A.* Fractionating the central executive. – New York: Oxford Univ. Press, 2002. – P. 246 – 260.
12. *Borisyuk R., Chik D., Kazanovich Y.* Visual perception of ambiguous figures: synchronization based neural models // Biol. cybernet. – 2009. – **100(6)**. – P. 491 – 504.
13. *Gregoriou G. G., Gotts S. J., Zhou H., Desimone R.* High-frequency, long-range coupling between prefrontal and visual cortex during attention // Science. – 2009. – **324(5931)**. – P. 1207 – 1210.
14. *Kryukov V. I.* An attention model based on the principle of dominanta // Synchronization and Chaos. – Manchester: Manchester Univ. Press, 1991. – P. 319 – 352.
15. *Kryukov V. I.* The role of the hippocampus in long-term memory: is it memory store or comporator? // Int. J. Neurosci. – 2008. – **7**. – P. 117 – 184.
16. *Kazanovich Y., Borisyuk R.* Dynamics of neural networks with a central element // Neural Netw. – 1999. – **12(3)**. – P. 441 – 454.

17. *Kazanovich Y., Borisyuk R.* Synchronization in oscillator systems with a central element and phase shifts // Prog. Theor. Phys. – 2003. – **110**. – P. 1047 – 1057.

18. *Itti L., Koch C.* Computational modelling of visual attention // Nat. Rev. Neurosci. – 2001. – **2**. – P. 194 – 203.

19. *Kazanovich Y., Borisyuk R.* An oscillatory neural model of multiple object tracking // Neural Comput. – 2006. – **18(6)**. – P. 1413 – 40.

20. *Kazanovich Y., Burylko O., Borisyuk R.* Competition for synchronization in a phase oscillator system // Phys. D. – 2013. – **261(0)**. – P. 114 – 124.

21. *Vlasov V., Pikovsky A., Macau E. E. N.* Star-type oscillatory networks with generic Kuramoto-type coupling: A model for "Japanese drums synchrony" // Chaos. – 2015. – **25(12)**.

22. *Burylko O., Kazanovich Y., Borisyuk R.* Bifurcations in phase oscillator networks with a central element // Phys. D. – 2012. – **241(12)**. – P. 1072 – 1089.

23. *Borisyuk R., Chik D., Kazanovich Y.* Selective attention model of moving objects // Neural Netw. World. – 2009. – **19(5)**. – P. 429 – 445.

24. *Arnold V. I.* Sur la topologie des équolements stationnaires des fluides parfaits // Acad C. R. Sci. Paris. – 1965. – **261**. – P. 17 – 20.

25. *Childress S.* New solutions of the kinematic dynamo problem // Math. J. Phys. – 1970. – **11**. – P. 3063 – 3076.

26. *Dombre T., Frisch U., Greene J. M., Hénon M., Mehr A., Soward A. M.* Chaotic streamlines in the abc flows // Fluid J. Mech. – 1986. – **167**. – P. 353 – 391.

27. *Galloway D., Frisch U.* A note on the stability of a family of space-periodic Beltrami flows // Fluid J. Mech. – 1987. – **180**. – P. 557 – 564.

28. *Ashwin P., Podvigina O.* Hopf bifurcation with cubic symmetry and instability of abc flow // Proc. Soc. R. Lond. A. – 2003. – **459**. – P. 1801 – 1827.

29. *Shilnikov L. P.* A case of the existence of a denumerable set of periodic motions // Sov. Math. Dokl. – 1965. – **6**. – P. 163 – 166.

30. *Champneys A. R., Kuznetsov Y. A.* Numerical detection and continuation of codimension-two homoclinic bifurcations // Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. – 1994. – **4(4)**. – P. 785 – 822.

31. *Shilnikov L. P., Shilnikov A., Turaev D., Chua L.* Methods of qualitative theory in nonlinear dynamics. I; II. – World Sci., 1998; 2001.

32. *Kazanovich Y., Borisyuk R.* Reaction times in visual search can be explained by a simple model of neural synchronization // Neural Netw. – 2017. – **87**. – P. 1 – 7.

33. *Burylko O., Kazanovich Y., Borisyuk R.* Winner-take-all in a phase oscillator system with adaptation // Sci. Rep. – 2018. – **8(1)**. – P. 416.

34. *Yuille A. L., Grzywacz N. M.* A winner-take-all mechanism based on presynaptic inhibition feedback // Neural Comput. – 1989. – **1**. – P. 334 – 347.

35. *Ermentrout B.* Complex dynamics in winner-take-all neural nets with slow inhibition // Neural Netw. – 1992. – **5**. – P. 415 – 431.

36. *Kaski S., Kohonen T.* Winner-take-all networks for physiological models of competitive learning // Neural Netw. – 1994. – **7**. – P. 973 – 984.

37. *Maass W.* Advances in neural information processing systems. – Cambridge, MA: MIT Press, 1999. – Vol. 11. – P. 293 – 299.

38. *Chen Y., McKinstry J. L., Edelman G. M.* Versatile networks of simulated spiking neurons displaying winner-take-all behavior // Front. Comput. Neurosci. – 2013. – **7**. – Article 16.

39. *Omelchenko I., Maistrenko Y., Mosekilde E.* Synchronization in ensembles of coupled maps with a major element // Discrete Dyn. Nat. Soc. – 2005. – **2005(3)**. – P. 239 – 255.

40. *Frasca M., Bergner A., Kurths J., Fortuna L.* Bifurcations in star-like network of Stuart – Landau oscillators // Int. Bifur. J. Chaos. – 2012. – **22**. – 1250173.

41. *Rutishauser U., Douglas R.* State-dependent computational using coupled recurrent networks // Prog. Theor. Phys. – 2009. – **21**. – P. 478 – 509.

42. *Rutishauser U., Douglas R. J., Slotine J. J.* Collective stability of networks of winner-take-all circuits // Neural Comput. – 2011. – **23**. – P. 735 – 773.

43. *Kitajima H., Kurths J.* Bifurcation in neuronal networks with hub structure // Phys. A. – 2009. – **388(20)**. – P. 4499 – 4508.

44. *Folias S. E., Yu S., Snyder A., Nikolić D., Rubin J. E.* Synchronisation hubs in the visual cortex may arise from strong rhythmic inhibition during gamma oscillations // European J. Neurosci. – **38(6)**. – 2013. – P. 2864 – 2883.

45. *Schmidt R., LaFleur K. J., de Reus M. A., van den Berg L. H., van den Heuvel M. P.* Kuramoto model simulation of neural hubs and dynamic synchrony in the human cerebral connectome // BMC Neurosci. – 2015. – **16**. – P. 54.

46. *Meena C., Murali K., Sinha S.* Chimera states in star networks // Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. – 2016. – **26(9)**. – 1630023.

47. *Vlasov V., Bifone A.* Hub-driven remote synchronization in brain networks // Sci. Rep. – 2017. – **7(1)**. – 10403.

48. *Burylko O., Mielke A., Wolfrum M., Yanchuk S.* Coexistence of Hamiltonian-like and dissipative dynamics in rings of coupled phase oscillators with skew-symmetric coupling // SIAM J. Appl. Dyn. Syst. – 2018. – **17(3)**. – P. 2076 – 2105.

49. *Sevryuk M. B.* Reversible systems // Lect. Notes Math. – Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1986. – Vol. 1211.

50. *Moser J.* Stable and random motions in dynamical systems // Princeton: Princeton Univ. Press, 1973.

51. *Devaney R. L.* Reversible diffeomorphisms and flows // Trans. Amer. Math. Soc. – 1976. – **218**. – P. 89 – 113.

52. *Parasyuk I. O.* Conservation of quasiperiodic motions of reversible multifrequency systems // Dokl. Akad. Nauk Ukr.SSR. – 1982. – **A9**. – P. 19 – 22 (In Russian).

53. *Broer H. W., Hnitema G. B., Sevryuk M. B.* Families of quasi-periodic motions in dynamical systems depending on parameters // Progr. Nonlinear Differential Equations Appl. – 1996. – **19**. – P. 171 – 211.

54. *Arnold V. I., Sevryuk M. B.* Oscillations and bifurcations in reversible systems // Nonlinear Phenomena in Plasma Physics and Hydrodynamics (Ed. R. Z. Sagdeev). – Moscow: Mir, 1986. – P. 31 – 64.

55. *Roberts J. A. G., Quispel G. R. W.* Chaos and time-reversal symmetry: order and chaos in reversible dynamical systems // Phys. Rep. – 1992. – **216**. – P. 63 – 177.

56. *Fiedler B, Turaev D.* Coalescence of reversible homoclinic orbits causes elliptic resonance // Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. – 1996. – **6**. – P. 1007 – 1027.

57. *Sevryuk M. B.* Quasi-periodic perturbations within the reversible context 2 in Kam theory // Indag. Math. (N.S.). – 2012. – **23(3)**. – P. 137 – 150.

58. *Lamb J. S. W., Roberts J. A. G.* Time-reversal symmetry in dynamical systems: A survey // Phys. D. – 1998. – **112**. – P. 1 – 39.

59. *Politi A., Oppo G. L., Badii R.* Coexistence of conservative and dissipative behavior in reversible dynamical systems // Phys. Rev. A. – 1986. – **33**. – P. 4055 – 4060.

60. *Tsang K. Y., Mirollo R. E., Strogatz S. H., Wiesenfeld K.* Reversibility and noise sensitivity of Josephson arrays // Phys. Rev. Lett. – 1991. – **66**. – P. 1094 – 1097.

61. *Tsang K. Y., Mirollo R. E., Strogatz S. H., Wiesenfeld K.* Dynamics of a globally coupled oscillator array // Phys. D. – 1991. – **48(1)**. – P. 102 – 112.

62. *Golubitsky M., Krupa M., Lim C.* Time-reversibility and particle sedimentation // SIAM J. Appl. Math. – 1991. – **51(1)**. – P. 49 – 72.

63. *Topaj D., Pikovsky A.* Reversibility vs. synchronization in oscillator lattices // Phys. D. – 2002. – **170(2)**. – P. 118 – 130.

64. *Pikovsky A., Rosenau P.* Phase compactons // Phys. D. – 2006. – **218(1)**. – P. 56 – 69.

65. *Sevryuk M. B.* On invariant tori of reversible systems in the neighbourhood of an equilibrium position // Russian Math. Surveys. – 1987. – **42(4)**. – P. 147 – 148.

66. *Sakaguchi H., Kuramoto Y.* A soluble active rotator model showing phase transitions via mutual entrainment // Prog. Theor. Phys. – 1986. – **76**. – P. 576 – 581.

67. *Arnold V. I.* Sur la topologie des écoulements stationnaires des fluides parfaits // Collected Works. – Springer, 1965. – P. 15 – 18.

68. *Zhang Y., Hu G., Cerdeira H. A.* How does a periodic rotating wave emerge from high-dimensional chaos in a ring of coupled chaotic oscillators? // Phys. Rev. E. – 2001. – **64(3)**. – 037203.

69. *Golubitsky M., Stewart I.* Nonlinear dynamics of networks: the groupoid formalism // Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.). – 2006. – **43(3)**. – P. 305 – 364.

70. *Wiley D. A., Strogatz S. H., Girvan M.* The size of the sync basin // Chaos. – 2006. – **16(1)**. – 015103.

71. *Yanchuk S., Wolfrum M.* Destabilization patterns in chains of coupled oscillators // Phys. Rev. E. – 2008. – **77(2)**. – P. 026212.

72. *Bonnin M.* Waves and patterns in ring lattices with delays // Phys. D. – 2009. – **238(1)**. – P. 77 – 87.

73. *Perlikowski P., Yanchuk S., Popovych O. V., Tass P. A.* Periodic patterns in a ring of delay-coupled oscillators // Phys. Rev. E. – 2010. – **82(3)**. – 036208.

74. *Golubitsky M., Stewart I.* Rigid patterns of synchrony for equilibria and periodic cycles in network dynamics // Chaos. – 2016. – **26(9)**.

75. *Krupa M.* Robust heteroclinic cycles // Nonlinear Sci. – 1997. – **7(2)**. – P. 129 – 176.

76. *Kuznetsov A. S., Kurths J.* Stable heteroclinic cycles for ensembles of chaotic oscillators // Phys. Rev. E. – 2002. – **66(2)**. – 026201.

77. *Feng B. Y., Hu R.* A survey on homoclinic and heteroclinic orbits // Appl. Math. E-Notes. – 2003. – **3**. – P. 16 – 37.

78. *Ashwin P., Burylko O., Maistrenko Y.* Bifurcation to heteroclinic cycles and sensitivity in three and four coupled phase oscillators // Phys. D. – 2008. – **237(4)**. – P. 454 – 466.

79. *Afraimovich V., Ashwin P., Kirk V. (Eds)* Robust heteroclinic and switching dynamics // Dyn. Syst. – 2010. – **25(3)**. – P. 285 – 286.

80. *Ashwin P., Coombes S., Nicks R.* Mathematical frameworks for oscillatory network dynamics in neuroscience // J. Math. Neurosci. – 2016. – **6(2)**. – P. 1 – 92.

81. *Daido H.* Strange waves in coupled-oscillator arrays: mapping approach // Phys. Rev. Lett. – 1997. – **78(9)**. – P. 1683 – 1686.

82. *Marino I. P., Pérez-Muñuzuri V., Pérez-Villar V., Sánchez E., Matías M. A.* Interaction of chaotic rotating waves in coupled rings of chaotic cells // Phys. D. – 1999. – **128(2-4)**. – P. 224 – 235.

83. *Perlikowski P., Yanchuk S., Wolfrum M., Stefanski A., Mosiolek P., Kapitaniak T.* Routes to complex dynamics in a ring of unidirectionally coupled systems // Chaos. – 2010. – **20**. – 013111.

84. *Kuramoto Y., Battogtokh D.* Coexistence of coherence and incoherence in nonlocally coupled phase oscillators // Nonlinear Phenom. Complex Syst. – 2002. – **5(4)**. – P. 380 – 385.

85. *Abrams D. M., Strogatz S. H.* Chimera states for coupled oscillators // Phys. Rev. Lett. – 2004. – **93**. – 174102.

86. *Belykh I., Shilnikov A.* When weak inhibition synchronizes strongly desynchronizing networks of bursting neurons // Phys. Rev. Lett. – 2008. – **101(7)**. – 078102.

87. *Shilnikov A., Gordon R., Belykh I.* Polyrhythmic synchronization in bursting networking motifs // Chaos. – 2008. – **18(3)**. – 037120.

88. *Kantner M., Yanchuk S.* Bifurcation analysis of delay-induced patterns in a ring of Hodgkin – Huxley neurons // Philos. Trans. Roy. Soc. A. – 2013. – **371**. – 20120470.

89. *Wojcik J., Schwabedal J., Clewley R., Shilnikov A.* Key bifurcations of bursting polyrhythms in 3-cell central pattern generators // PLoS ONE. – 2014. – **9(4)**. – e92918.

90. *Giannoulis J., Mielke A.* The nonlinear Schrödinger equation as a macroscopic limit for an oscillator chain with cubic nonlinearities // Nonlinearity. – 2004. – **17**. – P. 551 – 565.

91. *Yanchuk S., Perlikowski P., Wolfrum M., Stefanski A., Kapitaniak T.* Amplitude equations for collective spatio-temporal dynamics in arrays of coupled systems // Chaos. – 2015. – **25(3)**. – 033113.

92. *Martens E. A., Thutupalli S., Fourrière A., Hallatschek O.* Chimera states in mechanical oscillator networks // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. – 2013. – **110(26)**. – P. 10563 – 10567.

93. *Kapitaniak T., Kuzma P., Wojewoda J., Czolczynski K., Maistrenko Y.* Imperfect chimera states for coupled pendula // Sci. Rep. – 2014. – **4**. – 6379.

94. *Tinsley M. R., Nkomo S., Showalter K.* Chimera and phase-cluster states in populations of coupled chemical oscillators // Nat. Phys. – 2012. – **8**. – P. 662 – 665.

95. *Mathews Ch. G., Lesku J. A., Lima S. L., Amlaner Ch. J.* Asynchronous eye closure as an anti-predator behavior in the western fence lizard (sceloporus occidentalis) // Ethology. – 2006. – **112(3)**. – P. 286 – 292.

96. *Laing C. R., Chow C. C.* Stationary bumps in networks of spiking neurons // Neural Comput. – 2001. – **13(7)**. – P. 1473 – 1494.

97. *Bera B. K., Ghosh D., Lakshmanan M.* Chimera states in bursting neurons // Phys. Rev. E. – 2001. – **93(1)**. – 012205.

98. *Larger L., Penkovsky B., Maistrenko Y.* Virtual chimera states for delayed-feedback systems // Phys. Rev. Lett. – 2013. – **111**. – 054103.

99. *Motter A. E., Myers S. A., Anghel M., Nishikawa T.* Spontaneous synchrony in power-grid networks // Nat. Phys. – 2013. – **9**. – P. 191 – 197.

100. *Viktorov E. A., Habruseva T., Hegarty S. P., Huyet G., Kelleher B.* Coherence and incoherence in an optical comb // Phys. Rev. Lett. – 2014. – **112**. – 224101.

101. *Wickramasinghe M., Kiss I. Z.* Spatially organized dynamical states in chemical oscillator networks: Synchronization, dynamical differentiation, and chimera patterns // PLoS One. – 2013. – **8**. – e80586.

102. *González-Avella J. C., Cosenza M. G., San Miguel M.* Localized coherence in two interacting populations of social agents // Phys. A. – 2014. – **399**. – P. 24 – 30.

103. *Zhao S., Xie Q., Lu Q., Jiang X., Chen W.* Coherence and incoherence collective behavior in financial market // EPL (Europhys. Lett). – 2015. – **112(2)**. – 28002.

104. *Ott E., Antonsen T. M.* Long time evolution of phase oscillator systems // Chaos. – 2009. – **19(2)**. – 023117.

105. *Hagerstrom A. M., Murphy T. E., Roy R., Hövel P., Omelchenko I., Schöll E.* Experimental observation of chimeras in coupled-map lattices // Nat. Phys. – 2012. – **8**. – P. 658 – 661.

106. *Laing C. R.* Chimeras in networks of planar oscillators // Phys. Rev. E. – 2010. – **81**. – 066221.

107. *Omelchenko I., Maistrenko Y., Hövel P., Schöll E.* Loss of coherence in dynamical networks: spatial chaos and chimera states // Phys. Rev. Lett. – 2011. – **106**. – 234102.

108. *Sieber J., Omel'chenko O., Wolfrum M.* Controlling unstable chaos: stabilizing chimera states by feedback // Phys. Rev. Letts. – 2014. – **112**. – 054102.

109. *Panaggio M., Abrams D.* Chimera states: coexistence of coherence and incoherence in networks of coupled oscillators // Nonlinearity. – 2015. – **28(3)**. – P. R67 – R87.

110. *Bick C., Ashwin P.* Chaotic weak chimeras and their persistence in coupled populations of phase oscillators // Nonlinearity. – 2016. – **29(5)**. – 1468.

111. *Kasatkin D., Yanchuk S., Schöll E., Nekorkin V.* Self-organized emergence of multilayer structure and chimera states in dynamical networks with adaptive couplings // Phys. Rev. E. – 2017. – **96**. – 062211.

112. *Banerjee A., Sikder D.* Transient chaos generates small chimeras // Phys. Rev. E. – 2018. – **98**. – 032220.

113. *Ashwin P., Swift J. W.* The dynamics of n weakly coupled identical oscillators // J. Nonlinear Sci. – 1992. – **2**. – P. 69 – 108.

114. *Abrams D. M., Strogatz S. H.* Chimera states in a ring of nonlocally coupled oscillators // Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. – 2006. – **16(1)**. – P. 21 – 37.

115. *Ashwin P., Burylko O.* Weak chimeras in minimal networks of coupled phase oscillators // Chaos. – 2015. – **25(1)**. – 013106.

116. *Franke J. E., Selgrade J. F.* Abstract $\omega$-limit sets, chain recurrent sets, and basic sets for flows // Proc. Amer. Math. Soc. – 1976. – **60**. – P. 309 – 316.

117. *Bick C.* Heteroclinic switching between chimeras // Phys. Rev. E. – 2018. – **97(5)**. – 050201.

118. *Thoubaan M., Ashwin P.* Existence and stability of chimera states in a minimal system of phase oscillators // Chaos. – 2018. – **28**. – 103121.

119. *Yeldesbay A., Pikovsky A., Rosenblum M.* Chimera-like states in an ensemble of globally coupled oscillators // Phys. Rev. Lett. – 2014. – **112**. – 144103.

120. *Schmidt L., Schönleber K., Krischer K., Garcia-Morales V.* Coexistence of synchrony and incoherence in oscillatory media under nonlinear global coupling // Chaos. – 2014. – **24(1)**. – 013102.

121. *Böhm F., Zakharova A., Schöll E., Lüdge K.* Amplitude-phase coupling drives chimera states in globally coupled laser networks // Phys. Rev. E. – 2015. – **92**. – 069905.

122. *Maistrenko Y., Brezetsky S., Jaros P., Levchenko R., Kapitaniak T.* Smallest chimera states // Phys. Rev. E. – 2017. – **95**. – 010203.

123. *Kemeth F. P., Haugland S. W., Schmidt L., Kevrekidis I. G., Krischer K.* A classification scheme for chimera states // Chaos. – 2016. – **26**. – 094815.

*Одержано 14.06.19*