УДК 517.959

ПРО НАБЛИЖЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ ОДНІЄЇ АБСТРАКТНОЇ ЗАДАЧІ КОШІ

В. В. Городецький, О. В. Мартинюк

Чернів. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича
вул. Коцюбинського, 2, Чернівці, 58012, Україна
e-mail: v.gorodetskiy@chnu.edu.ua,
alfaolga1@gmail.com

We find approximate solutions of the Cauchy problem for a differential-operator equation of hyperbolic type with degeneration in a Hilbert space. In terms of these approximations, a characteristic of the Gevrey classes of a nonnegative self-adjoint operator is given.

Знайдено наближені розв'язки задачі Коші для диференціально-операторного рівняння гіперболічного типу з виродженням у гільбертовому просторі. У термінах таких наближень дано характеристику класів Жевре невід'ємного самоспряженого оператора.

Вступ. Багато задач математичної фізики можна подати у вигляді задачі Коші для еволюційного рівняння гіперболічного типу

$$u''(t) + t^{\gamma} Au(t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad u(0) = f, \quad u'(0) = g,$$

де A — невід'ємний самоспряжений оператор зі щільною областю визначення в сепарабельному гільбертовому просторі. У працях А. В. Бабина [1–4] методом вагового наближення функцій на півосі одержано зображення розв'язку зазначеної задачі (у випадку $\gamma = 0,\ g = 0$) у вигляді $u(t) = \lim_{n\to\infty} P_n(t, A)f$, де $P_n(t, \lambda)$ — поліном степеня n змінної λ при фіксованому t. У припущенні, що f належить до області визначення оператора $\operatorname{ch}(R\sqrt{A})$, за шукані поліноми у вказаних працях беруться поліноми, які наближують на півосі $(0, +\infty)$ функцію $\cos(t\sqrt{\lambda}),\ \lambda \geq 0$, з вагою $\operatorname{ch}(R\sqrt{\lambda}),\ \lambda \geq 0$. При цьому дається оцінка швидкості збіжності: похибка $\sup_{t\in[0,T]} \|u(t) - P_n(t, A)f\|$ спадає як $\exp(-\sigma n),\ \sigma > 0$.

У працях [5, 6] запропоновано інший метод побудови поліномів P_n, який базується на наближенні функцій на півосі частинними сумами їхніх рядів Фур'є, побудованими за ортогональними многочленами Лагерра, що утворюють ортонормований базис у просторі $L_2((0, \infty), \lambda^{\alpha} \exp(-\mu\lambda))$, де $\alpha > -1,\ \mu > 0$ — числа, залежні від початкового елемента f. Цей метод дав точнішу, ніж у працях [1–4], оцінку відхилення, але у вужчому класі початкових даних (класі H_a аналітичних векторів оператора A). У цій роботі одержано оцінку збіжності $\sup_{t\in[0,T]} \|u(t) - P_n(t, A)f\|$ у випадку, коли f належить до значно ширшого класу початкових даних, ніж H_a, а саме: до класу Жевре $G_{\{\beta\}}(A),\ 1 < \beta \leq 2$, $G_{\{1\}}(A) = H_a$, пов'язаного з оператором A. Одночасно дано характеристику класу Жевре $G_{\{\beta\}}(A),\ 1 < \beta \leq 2$, з точки зору наближення розв'язку $u(t)$ вказаної задачі Коші функціями вигляду $P_n(t, A)f \equiv u_n(t)$ у випадку, коли показник виродження $\gamma \neq 0$.

1. Узагальнені многочлени Лагерра. Символом $\widehat{L}_{\alpha,\mu,n}(\lambda),\ \lambda \in (0, +\infty),\ \alpha > -1,\ \mu > 0$ — фіксовані параметри, домовимося позначати узагальнені многочлени Лагерра, які утворюють ортонормований базис у гільбертовому просторі $L_2((0, \infty),\ \lambda^{\alpha} \exp(-\mu\lambda))$.

Легко переконатися в тому, що

$$\widehat{L}_{\alpha,\mu,n}(\lambda)=\sqrt{\mu^{1+\alpha}}\,\widehat{L}_{\alpha,1,n}(\mu\lambda), \tag{1}$$

де $\widehat{L}_{\alpha,1,n}$ — многочлени, ортонормовані з вагою $\lambda^{\alpha}\exp(-\lambda),\ \lambda>0.$ Врахувавши (1) та формулу Родріга для многочленів $\widehat{L}_{\alpha,1,n}$ (див. [7, с. 219]), знайдемо, що

$$\widehat{L}_{\alpha,\mu,n}(\lambda)=\frac{(-1)^n\sqrt{\mu^{1+\alpha}}}{\sqrt{n!\Gamma(n+\alpha+1)}}\,(\mu\lambda)^{-\alpha}e^{\mu\lambda}\left[(\mu\lambda)^{\alpha+n}e^{-\mu\lambda}\right]^{(n)}, \quad n\in\mathbb{Z}_+.$$

За системою многочленів $\widehat{L}_{\alpha,\mu,n},\ n\in\mathbb{Z}_+$, як і за довільною іншою ортонормованою системою, можна будувати ряди Фур'є. Нехай функція φ належить $L_2((0,\infty),\ \lambda^{\alpha}\exp(-\mu\lambda))$. Поставимо цій функції у відповідність ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(\alpha,\mu)\widehat{L}_{\alpha,\mu,n}(\lambda), \tag{2}$$

коефіцієнти якого визначаються формулою

$$a_n(\alpha,\mu)=\int\limits_0^{\infty}\lambda^{\alpha}e^{-\mu\lambda}\varphi(\lambda)\widehat{L}_{\alpha,\mu,n}(\lambda)d\lambda.$$

Ряд (2) завжди збігається до функції φ за нормою простору $L_2((0,\infty),\ \lambda^{\alpha}\exp(-\mu\lambda))$. Умови збіжності ряду (2) до функції φ у окремій точці $\lambda\in(0,\infty)$ мають такий вигляд [7, с. 255]:

1) якщо $\alpha>0$, функція $\varphi\in L_1((0,\infty),\ \lambda^{\alpha}\exp(-\mu\lambda))$ в околі фіксованої точки $\lambda\in(0,\infty)$ задовольняє умову Ліпшица і, крім того, існують інтеграли

$$\int\limits_0^1\lambda^{\alpha/2-1/4}|\varphi(\lambda)|d\lambda, \qquad \int\limits_1^{\infty}\lambda^{\alpha/2+1/2}e^{-\mu\lambda/2}|\varphi(\lambda)|d\lambda,$$

то ряд Фур'є за многочленами $\widehat{L}_{\alpha,\mu,n}$ функції φ збігається до цієї функції в точці λ, тобто

$$\varphi(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(\alpha,\mu)\widehat{L}_{\alpha,\mu,n}(\lambda); \tag{3}$$

2) якщо $-1<\alpha\le 0$, функція $\varphi\in L_1((0,\infty),\ \lambda^{\alpha}\exp(-\mu\lambda))$ в околі точки λ задовольняє умову Ліпшица та існують інтеграли

$$\int\limits_0^1\lambda^{\alpha/2-3/4}|\varphi(\lambda)|d\lambda, \qquad \int\limits_1^{\infty}\lambda^{\alpha/2}e^{-\mu\lambda/2}|\varphi(\lambda)|d\lambda,$$

то має місце розклад (3).

2. Класи Жевре самоспряженого оператора. Нехай A — невід'ємний самоспряжений оператор у сепарабельному гільбертовому просторі H зі щільною в H областю визначення $\mathcal{D}(A)$ та розкладом одиниці $E_\lambda,\ \lambda \geq 0$. Введемо деякі класи елементів, пов'язаних із оператором A. Позначимо $H_\infty(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{pr} H_n(A),\ H_n(A) = \mathcal{D}(A^n)$ $\big(\mathcal{D}(A^n)$ — область визначення оператора $A^n\big)$, $(\varphi,\psi)_{H_n} = (\varphi,\psi) + (A^n\varphi, A^n\psi)$,

$$G_{\beta,B}(A) := \Big\{\varphi \in H_\infty(A) \,|\, \exists c, B > 0\colon\ \|A^n\varphi\| \leq cB^n n^{n\beta}, n \in \mathbb{Z}_+, \beta > 0\Big\}.$$

Простір $G_{\beta,B}(A)$ є банаховим відносно норми

$$\|\varphi\|_{\beta,B} = \sup_n \Big(\|A^n\varphi\| \,/\, \Big(B^n n^{n\beta}\Big)\Big).$$

Простір $G_{\{\beta\}}(A) := \lim_{B\to\infty} \mathrm{ind}\, G_{\beta,B}(A)$ називається простором Жевре порядку β, побудованим за оператором A. Якщо $\beta = 1$, то $G_{\{1\}}(A)$ називають ще простором аналітичних векторів оператора A. Відомо (див. [7, с. 73–75], що $G_{\{\beta\}}(A) = \bigcup\limits_{\mu>0} \mathcal{D}\left(\exp\left(\mu A^{1/\beta}\right)\right)$, при цьому $\mathcal{D}\left(\exp\left(\mu A^{1/\beta}\right)\right)$ утворює банахів простір відносно норми

$$\|\varphi\|^2_{H_\mu} = \int\limits_0^\infty e^{2\mu\lambda^{1/\beta}}\, d(E_\lambda\varphi,\varphi).$$

Наприклад, якщо $H = L_2(I)$, де I — деякий інтервал дійсної осі, A — модуль оператора диференціювання [8], то клас Жевре $G_{\{\beta\}}(A)$ порядку β при $\beta > 1$ складається з усіх нескінченно диференційовних на I функцій φ, які задовольняють умову: $\exists c > 0\ \exists B > 0$ $\forall n \in \mathbb{Z}_+,\ \forall x \in I$:

$$\left|\varphi^{(n)}(x)\right| \leq cB^n n^{n\beta}, \quad \beta > 1.$$

Простір $G_{\{1\}}(A)$ у цьому випадку складається з усіх аналітичних на проміжку I функцій, тобто функцій, які допускають аналітичне продовження в певну область комплексної площини, яка містить інтервал I.

3. Задача Коші. Розглянемо диференціально-операторне рівняння

$$u''(t) + t^\gamma Au(t) = 0, \quad t \in [0,T], \tag{4}$$

де γ — дійсне невід'ємне число. Функція $u\colon [0,T] \to \mathcal{D}(A)$ називається розв'язком рівняння (4), якщо вона двічі сильно неперервно диференційовна і задовольняє рівняння (4). Як доведено в [9], для $\{f,g\} \subset \mathcal{D}(A)$ існує єдиний розв'язок рівняння (4), який задовольняє початкові умови

$$u(0) = f, \qquad u'(0) = g. \tag{5}$$

При цьому розв'язок задачі Коші (4), (5) зображається у вигляді

$$u(t) = G_1(t,A)f + G_2(t,A)g = \int\limits_0^\infty G_1(t,\lambda)dE_\lambda f + \int\limits_0^\infty G_2(t,\lambda)dE_\lambda g,$$

де

$$G_1(t,\lambda) = \pi\tau^\tau\lambda^{\tau/2}t^{1/2}(\Gamma(\tau)\sin\pi\tau)^{-1}J_{-\tau}\left(2\tau\lambda^{1/2}t^{1/(2\tau)}\right),$$

$$G_2(t,\lambda) = \Gamma(\tau)\tau^{1-\tau}t^{1/2}\lambda^{-\tau/2}J_\tau\left(2\tau\lambda^{1/2}t^{1/(2\tau)}\right).$$

Тут $\tau = (\gamma+2)^{-1}$, $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функція, $J_\nu(\cdot)$ — функція Бесселя першого роду порядку ν, $\nu \in \{-\tau, \tau\}$.

Зауважимо, що коли в (4) відсутнє виродження, тобто $\gamma = 0$, тоді $G_1(t,\lambda) = \cos(t\sqrt{\lambda})$, $G_2(t,\lambda) = \lambda^{-1/2}\sin(t\sqrt{\lambda})$, а

$$u(t) = \cos(t\sqrt{A})f + A^{-1/2}\sin(t\sqrt{A})g.$$

Відомо [7, с. 260–261], що розклад функції

$$F(\lambda) = (\lambda a)^{-\alpha/2}J_\alpha(2\sqrt{\lambda a}), \quad \lambda \in (0,\infty), \quad a > 0, \quad \alpha > -1,$$

в ряд Фур'є за многочленами $\widehat{L}_{\alpha,1,k}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, має вигляд

$$(\lambda a)^{-\alpha/2}J_\alpha(2\sqrt{\lambda a}) = e^{-a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k a^k}{\sqrt{k!\Gamma(k+\alpha+1)}}\,\widehat{L}_{\alpha,1,k}(\lambda).$$

Звідси одержуємо, що

$$(\lambda\mu a)^{-\alpha/2}J_\alpha(2\sqrt{\lambda\mu a}) = \frac{e^{-a}}{\sqrt{\mu^{1+\alpha}}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k a^k}{\sqrt{k!\Gamma(k+\alpha+1)}}\,\widehat{L}_{\alpha,\mu,k}(\lambda), \tag{6}$$

де $\mu > 0$ — фіксований параметр. Поклавши в (6) $\alpha = -\tau$, $\sqrt{\mu a} = \tau^{1/(2\tau)}$, дістанемо, що функція $G_1(t,\lambda)$ розкладається в ряд Фур'є за многочленами $\widehat{L}_{-\tau,\mu,k}$ таким чином:

$$G_1(t,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty}a_k(t,\mu,\gamma)\widehat{L}_{-\tau,\mu,k}(\lambda), \quad \lambda > 0, \tag{7}$$

де

$$a_k(t,\mu,\gamma) = \frac{\pi e^{-\delta}(-1)^k\delta^k}{\Gamma(\tau)\sin\pi\tau\sqrt{\mu^{1-\tau}k!\Gamma(k-\tau+1)}}, \quad \delta = \frac{t^{\gamma+2}}{\mu(\gamma+2)^2}.$$

Аналогічно знаходимо, що функція $G_2(t,\lambda)$ розкладається в ряд Фур'є за многочленами $\widehat{L}_{\tau,\mu,k}$, і цей розклад має вигляд

$$G_2(t,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty}b_k(t,\mu,\gamma)\widehat{L}_{\tau,\mu,k}(\lambda), \quad \lambda > 0, \tag{8}$$

де

$$b_k(t,\mu,\alpha) = \frac{t\tau\Gamma(\tau)e^{-\delta}(-1)^k\delta^k}{\sqrt{\mu^{1+\tau}k!\Gamma(k+\tau+1)}}.$$

Позначимо через $P^{(1)}_{\mu,t,n}$, $P^{(2)}_{\mu,t,n}$ відповідно n-ті частинні суми рядів Фур'є функцій G_1, G_2 (див. (7), (8)) за многочленами $\widehat{L}_{-\tau,\mu,k}$, $\widehat{L}_{\tau,\mu,k}$; при цьому $P^{(1)}_{\mu,t,n}(\lambda) \to G_1(t,\lambda)$, $P^{(2)}_{\mu,t,n} \to \to G_2(t,\lambda)$ при $n \to \infty$ у кожній точці $\lambda \in (0,\infty)$ [7, с. 255].

Для того щоб сформулювати основне твердження, нам буде потрібний такий допоміжний результат.

Лема. *Нехай* $\mu > 0,\ 1 < \beta < 2$ — *фіксовані параметри. Тоді виконуються нерівності*

$$\sup_{\lambda\ge 0}\left(\exp\left(-\mu\lambda^{1/\beta}\right)\left|\widehat{L}_{-\tau,\mu,n}(\lambda)\right|\right) \le \omega_0 L_0^n (n!\Gamma(n-\tau+1))^{1/2} n^{n(\beta-2)}, \qquad (9)$$

$$\sup_{\lambda\ge 0}\left(\exp\left(-\mu\lambda^{1/\beta}\right)\left|\widehat{L}_{\tau,\mu,n}(\lambda)\right|\right) \le \omega_1 L_0^n (n!\Gamma(n+\tau+1))^{1/2} n^{n(\beta-2)}, \qquad (10)$$

де $n \in \mathbb{Z}_+,\ \omega_0 = \sqrt{\mu^{1-\tau}}\max\left\{(\Gamma(1-\tau))^{-1}, (2\pi)^{-1}(1-\tau)^{\tau-1/2}\right\},\ L_0 = \mu_0\left(e+\beta^\beta\mu^{-\beta}e^{2-\beta}\right)$, $\mu_0 = \max\{1,\mu\},\ \omega_1 = \sqrt{\mu^{1+\tau}}\max\left\{(\Gamma(1-\tau))^{-1}, (2\pi)^{-1}(1+\tau)^{-1}e^{-\tau}\right\}$.

Доведення. Насамперед зауважимо, що оскільки $1/\beta < 1$, то скористатися відомими асимптотичними властивостями многочленів Лагерра не можна. Для того щоб одержати потрібні оцінки, використаємо таке зображення многочленів $\widehat{L}_{\alpha,1,n}$ [10] (див. також [7, с. 229]):

$$\widehat{L}_{\alpha,1,n}(\lambda) = (-1)^n\frac{(n!\Gamma(n+\alpha+1))^{1/2}}{n!}\sum_{k=0}^n C_n^k\frac{(-\lambda)^k}{\Gamma(k+\alpha+1)}, \quad \alpha > -1.$$

Нехай $\alpha = -\tau$. Зауважимо, що коли $\tau = (\gamma+2)^{-1},\ \gamma \ge 0$, тоді $\tau \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$, тобто $-\tau \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right)$. Врахувавши співвідношення $\widehat{L}_{-\tau,\mu,n}(\lambda) = \sqrt{\mu^{1-\tau}}\,\widehat{L}_{-\tau,1,n}(\mu\lambda)$, знайдемо, що

$$\varphi(n) \equiv \sup_{\lambda\ge 0}\left(\exp\left(-\mu\lambda^{1/\beta}\right)|\widehat{L}_{-\tau,\mu,n}(\lambda)|\right) \le \sqrt{\mu^{1-\tau}}\,\frac{(n!\Gamma(n-\tau+1))^{1/2}}{n!}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{\Gamma(1-\tau)} + \mu_0^n\sum_{k=1}^n\frac{C_n^k}{\Gamma(k-\tau+1)}\sup_{\lambda\ge 0}\left(\lambda^k\exp\{-\mu\lambda^{1/\beta}\}\right)\right),$$

$$\mu_0 = \max\{1,\mu\}.$$

З урахуванням формули Стірлінга

$$\Gamma(\lambda+1) = \sqrt{2\pi}\lambda^{\lambda+1/2}\exp\left(-\lambda+\theta/(12\lambda)\right), \quad 0<\theta<1, \quad \lambda>0,$$

та співвідношення $\sup_{\lambda\ge 0}\left(\lambda^k\exp(-\mu\lambda^{1/\beta})\right) = \left(\beta^\beta\mu^{-\beta}e^{-\beta}\right)^k k^{k\beta}$ знайдемо, що

$$\varphi(n) \le \sqrt{\mu^{1-\tau}}\,\frac{(n!\Gamma(n-\tau+1))^{1/2}}{n!\Gamma(1-\tau)} + \frac{(n!\Gamma(n-\tau+1))^{1/2}}{n!}\,\mu_0^n\sum_{k=1}^n\frac{C_n^k\left(\beta^\beta\mu^{-\beta}e^{-\beta}\right)^k}{\Gamma(k-\tau+1)}k^{k\beta} \le$$

$$\le \sqrt{\mu^{1-\tau}}(n!\Gamma(n-\tau+1))^{1/2}\left(\frac{1}{\Gamma(1-\tau)} + \frac{1}{2\pi}\,e^{n-\tau}\mu_0^n n^{n(\beta-2)}\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{k=1}^n\frac{C_n^k\left(\beta^\beta\mu^{-\beta}e^{-\beta}\right)^k}{e^{-k}(1-\tau/k)^k(1-\tau/k)^{-\tau+1/2}}\right).$$

Оскільки $(1-\tau/k)^{-\tau+1/2} \ge (1-\tau)^{-\tau+1/2},\ (1-\tau/k)^k \ge e^{-\tau},\ k\in\mathbb{N}$, то

$$\varphi(n) \le \sqrt{\mu^{1-\tau}}(n!\Gamma(n-\tau+1))^{1/2}\left(\frac{1}{\Gamma(1-\tau)} + \frac{(\mu_0 e)^n}{(1-\tau)^{1/2-\tau}}\sum_{k=1}^n C_n^k\left(\beta^\beta\mu^{-\beta}e^{1-\beta}\right)^k\right).$$

Покладемо $\omega_0 = \sqrt{\mu^{1-\tau}}\max\left\{(\Gamma(1-\tau))^{-1}, (2\pi)^{-1}(1-\tau)^{\tau-1/2}\right\}$. Тоді

$$\varphi(n) \leq \omega_0 (n!\Gamma(n-\tau+1))^{1/2}(\mu_0 e)^n n^{n(\beta-2)} \sum_{k=0}^{n} C_n^k (\beta^\beta \mu^{-\beta} e^{1-\beta})^k =$$

$$= \omega_0 (n!\Gamma(n-\tau+1))^{1/2} n^{n(\beta-2)} \left(\mu_0 e + \beta^\beta \mu^{-\beta} e^{2-\beta} \mu_0\right)^n,$$

що й потрібно було довести. Нерівність (10) доводиться аналогічно.

Теорема 1. *Якщо* $\{f,g\} \subset G_{\{\beta\}}(A),\ 1<\beta<2,$ *то*

$$\forall T>0\ \ \exists c = c(f,\mu,g,T,\gamma,\beta)>0\ \ \exists L = L(f,g,T,\gamma,\beta)>0\colon$$

$$\sup_{t\in[0,T]} \left\| u(t) - P^1_{\mu,t,n}(A)f - P^{(2)}_{\mu,t,n}(A)g \right\| \leq cL^{n+1}(n+1)^{(n+1)(\beta-2)}. \tag{11}$$

Навпаки, якщо для деякого $T>0$ *існують сталі* $c>0,\ \mu>0$ *такі, що для* $u(t),\ t\in[0,T]$, *з* $u(0)=f\in H_\infty(A),\ u'(0)=0$ *виконується (11), то* $f\in G_{\{\beta\}}(A),\ 1<\beta<2.$

Доведення. Нехай $\{f,g\} \subset G_{\{\beta\}}(A) = \bigcup_{\mu>0} \mathcal{D}\left(\exp\left(\mu A^{1/\beta}\right)\right),\ 1<\beta<2.$ Тоді $f \in \mathcal{D}\left(\exp\left(\mu_1 A^{1/\beta}\right)\right)$ з деяким $\mu_1>0$, а $g \in \mathcal{D}\left(\exp\left(\mu_2 A^{1/\beta}\right)\right)$ з деяким $\mu_2>0$. Нехай $\mu = \min\{\mu_1,\mu_2\}$. Тоді, очевидно, $\{f,g\} \subset \mathcal{D}\left(\exp\left(\mu A^{1/\beta}\right)\right)$. Зафіксуємо $\mu>0$. Згідно з основною спектральною теоремою для самоспряжених операторів

$$\begin{aligned}
&\left\| u(t) - P^{(1)}_{\mu,t,n}(A)f - P^{(2)}_{\mu,t,n}(A)g \right\| \leq \\
&\leq \left\| G_1(t,A)f - P^{(1)}_{\mu,t,n}(A)f \right\| + \left\| G_2(t,A)g - P^{(2)}_{\mu,t,n}(A)g \right\| = \\
&= \left(\int_0^\infty \left(G_1(t,\lambda) - P^{(1)}_{\mu,t,n}(\lambda)\right)^2 e^{-2\mu\lambda^{1/\beta}} e^{2\mu\lambda^{1/\beta}} d(E_\lambda f,f) \right)^{1/2} + \\
&\quad + \left(\int_0^\infty \left(G_2(t,\lambda) - P^{(2)}_{\mu,t,n}(\lambda)\right)^2 e^{-2\mu\lambda^{1/\beta}} e^{2\mu\lambda^{1/\beta}} d(E_\lambda g,g) \right)^{1/2} \leq \\
&\leq \sup_{\lambda\geq 0} \left(\exp\left(-\mu\lambda^{1/\beta}\right) \left| G_1(t,\lambda) - P^{(1)}_{\mu,t,n}(\lambda) \right| \right) \|f\|_{H_\mu} + \\
&\quad + \sup_{\lambda\geq 0} \left(\exp\left(-\mu\lambda^{1/\beta}\right) \left| G_2(t,\lambda) - P^{(2)}_{\mu,t,n}(\lambda) \right| \right) \|g\|_{H_\mu} \\
&\equiv \varphi_1(t,n)\|f\|_{H_\mu} + \varphi_2(t,n)\|g\|_{H_\mu},
\end{aligned}$$

де

$$\|f\|_{H_\mu} = \left(\int_0^\infty \exp\left(2\mu\lambda^{1/\beta}\right) d(E_\lambda f,f) \right)^{1/2} < \infty,$$

$$\|g\|_{H_\mu} = \left(\int_0^\infty \exp(2\mu\lambda^{1/\beta}) d(E_\lambda g,g) \right)^{1/2} < \infty.$$

Оскільки $P^{(1)}_{\mu,t,n} \to G_1(t,\lambda)$ при $n \to \infty$ у кожній точці $\lambda \in (0,\infty)$, то, взявши до уваги вигляд полінома $P^{(1)}_{\mu,t,n}$, а також нерівність (9), одержуємо

$$\varphi_1(t,n) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k(t,\mu,\gamma)| \sup_{\lambda\geq 0}\left(\exp\left(-\mu\lambda^{1/\beta}\right)\left|\widehat{L}_{-\tau,\mu,k}(\gamma)\right|\right) \leq$$

$$\leq c_1 \sum_{k=n+1}^{\infty} (BL_0)^k k^{k(\beta-2)} \leq c_2 (BL_0)^{n+1}(n+1)^{(n+1)(\beta-2)},$$

де

$$c_2 = c_1 \sum_{k=1}^{\infty} (BL_0)^{k-1} k^{(k-1)(\beta-2)} < \infty, \qquad c_1 = \pi\omega_0(\Gamma(\tau)\sin\pi\tau)^{-1}\mu^{-(1-\tau)/2},$$

$$B = T^{\gamma+2}\mu^{-1}(\gamma+2)^{-1}.$$

Отже, $\sup_{t\in[0,T]}\varphi_1(t,n) \leq c_2(BL_0)^{n+1}(n+1)^{(n+1)(\beta-2)}$.

Аналогічно, скориставшись нерівністю (10), знайдемо, що

$$\sup_{t\in[0,T]} \varphi_2(t,n) \leq c_3(BL_0)^{n+1}(n+1)^{(n+1)(\beta-2)},$$

де

$$c_3 = \frac{\omega_1 T\Gamma(\tau)}{\sqrt{\mu^{1+\tau}}} \sum_{k=1}^{\infty} (BL_0)^{k-1} k^{(k-1)(\beta-2)} < \infty.$$

Тому

$$\sup_{t\in[0,T]} \left\| u(t) - P^1_{\mu,t,n}(A)f - P^2_{\mu,t,n}(A)g \right\| \leq cL^{n+1}(n+1)^{(n+1)(\beta-2)},$$

де $c = c_2\|f\|_{H_\mu} + c_3\|g\|_{H_\mu}$, $L = BL_0$.

Навпаки, нехай для деякого $T > 0$ існують сталі $c, \mu > 0$ такі, що для $u(t)$, $t \in [0,T]$, з $u(0) = f \in H_\infty(A)$, $u'(0) = 0$ виконується нерівність (11). Тоді для $u(t)$ справедливе зображення

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t,\mu,\gamma)\widehat{L}_{-\tau,\mu,k}(A)f,$$

де

$$a_k(t,\mu,\gamma) = \frac{\pi e^{-\delta}(-1)^k\delta^k}{\Gamma(\tau)\sin\pi\tau\sqrt{\mu^{1-\tau}k!\Gamma(k-\tau+1)}}, \quad \delta = \frac{t^{\gamma+2}}{\mu(\gamma+2)^2};$$

при цьому

$$\sup_{t\in[0,T]} \|a_k(t,\mu,\gamma)\widehat{L}_{-\tau,\mu,k}(A)f\| = \sup_{t\in[0,T]} \left\| P^{(1)}_{\mu,t,k}(A)f - P^{(1)}_{\mu,t,k-1}(A)f \right\| \leq$$

$$\leq \sup_{t\in[0,T]} \left\| u(t) - P^{(1)}_{\mu,t,k}(A)f \right\| + \sup_{t\in[0,T]} \left\| u(t) - P^{(1)}_{\mu,t,k-1}(A)f \right\| \leq$$

$$\leq c(1+L)L^k k^{k(\beta-2)}.$$

Зафіксуємо довільним чином $t \in [0, T]$. Тоді з останньої нерівності випливає нерівність

$$\left\| \widehat{L}_{-\tau,\mu,k}(A) f \right\| \le c_0 \sqrt{k!\Gamma(k-\tau+1)} \tilde{L}_0^k k^{k(\beta-2)}, \tag{12}$$

де $c_0 = c(1+L)\pi^{-1} e^{\delta} \Gamma(\tau) |\sin \pi\tau| \sqrt{\mu^{1-\tau}}$, $\tilde{L}_0 = L/\delta$. Далі скористаємося тим, що

$$\widehat{L}_{-\tau,\mu,n}(\lambda) = \sqrt{\mu^{1-\tau}} \widehat{L}_{-\tau,1,n}(\mu\lambda) = \sqrt{\mu^{1-\tau}} (-1)^n \frac{(n!\Gamma(n-\tau+1))^{1/2}}{n!} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{(-\mu\lambda)^k}{\Gamma(k-\tau+1)}.$$

Звідси випливає співвідношення

$$\widehat{L}_{-\tau,\mu,n}(A) f = \sqrt{\mu^{1-\tau}} (-1)^n \frac{(n!\Gamma(n-\tau+1))^{1/2}}{n!} \times$$

$$\times \left(\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k \frac{(-\mu)^k}{\Gamma(k-\tau+1)} A^k f + \frac{(-\mu)^n}{\Gamma(n-\tau+1)} A^n f \right).$$

Тоді

$$A^n f = \frac{n!\Gamma(n-\tau+1)}{\mu^n \sqrt{\mu^{1-\tau}}} \frac{\widehat{L}_{-\tau,\mu,n}(A) f}{(n!\Gamma(n-\tau+1))^{1/2}} - \frac{\Gamma(n-\tau+1)}{(-\mu)^n} \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k \frac{(-\mu)^k}{\Gamma(k-\tau+1)} A^k f, \tag{13}$$

$$n \in \mathbb{Z}_+, \quad f \in H_\infty(A).$$

З (13) та (12) при $n = 0$ одержуємо, що $\|f\| \le c_0 \dfrac{\Gamma(1-\tau)}{\sqrt{\mu^{1-\tau}}}$. При $n = 1$ маємо

$$Af = \frac{\Gamma(2-\tau)}{\mu \sqrt{\mu^{1-\tau}} \sqrt{\Gamma(2-\tau)}} \widehat{L}_{-\tau,\mu,1}(A) f + \frac{\Gamma(2-\tau)}{\mu\Gamma(1-\tau)},$$

$$\|Af\| \le 2c_0 \frac{\Gamma(2-\tau)}{\mu\sqrt{\mu^{1-\tau}}} \tilde{\tilde{L}}_0^1 \cdot 1^{1(\beta-2)}, \qquad \tilde{\tilde{L}}_0 = \max\{1, \tilde{L}_0\}.$$

Аналогічно,

$$\|A^2 f\| \le \frac{2\Gamma(3-\tau)}{\mu^2 \sqrt{\mu^{1-\tau}} (2!\Gamma(3-\tau))^{1/2}} \left\| \widehat{L}_{-\tau,\mu,2}(A) f \right\| +$$

$$+ \frac{\Gamma(3-\tau)}{\mu^2 \Gamma(1-\tau)} \|f\| + \frac{2\mu\Gamma(3-\tau)}{\mu^2 \Gamma(2-\tau)} \|Af\| \le$$

$$\le c_0 \frac{2\Gamma(3-\tau)\sqrt{2!\Gamma(3-\tau)}}{\mu^2 \sqrt{\mu^{1-\tau}} \sqrt{2!\Gamma(3-\tau)}} \tilde{L}_0^2 2^{2(\beta-2)} + c_0 \frac{\Gamma(3-\tau)\Gamma(1-\tau)}{\mu^2 \sqrt{\mu^{1-\tau}}\, \Gamma(1-\tau)} +$$

$$+ 2c_0 \frac{2\Gamma(3-\tau)\Gamma(2-\tau)}{\mu\Gamma(2-\tau)\mu\sqrt{\mu^{1-\tau}}} \tilde{L}_0^1 1^{1(\beta-2)} \le$$

$$\le 2^2 c_0 \frac{2\Gamma(3-\tau)}{\mu^2 \sqrt{\mu^{1-\tau}}} \tilde{\tilde{L}}_0^2 2^{2(\beta-2)},$$

і т. д. Методом математичної індукції доводимо правильність оцінок

$$\|A^n f\| \leq c_0 \frac{n!\Gamma(n-\tau+1)}{\mu^n\sqrt{\mu^{1-\tau}}}\, 2^n \tilde{\tilde{L}}_0^n n^{n(\beta-2)}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Застосувавши формулу Стірлінга, знайдемо, що

$$\|A^n f\| \leq 2c_0 e^{\tau}\pi e^2(1-\tau)\mu^{-(1-\tau)/2}(2e)^n\mu^{-n}\tilde{\tilde{L}}_0^n n^{2n} n^{n(\beta-2)} = \alpha B^n n^{n\beta},$$

$$\alpha = 2c_0 e^{\tau}\pi e^2(1-\tau)\mu^{-(1-\tau)/2}, \quad B = 2e\tilde{\tilde{L}}_0\mu^{-1}.$$

З останньої нерівності випливає належність елемента f до класу Жевре $G_{\{\beta\}}(A),\ 1 < < \beta < 2.$

Теорему 1 доведено.

На підставі доведеної теореми та результатів, наведених у [5, 6], робимо висновок, що у випадку, коли початковий елемент належить до класу Жевре $G_{\{\beta\}}(A),\ \beta \in [1,2)$, похибка $\sup_{t\in[0,T]}\|u(t)-P_n(t,A)f\|$ спадає як $L^n n^{n(\beta-2)}$, при цьому вказану оцінку швидкості збіжності покращити не можна. Доведена теорема не забезпечує відповідної збіжності, коли $f \in G_{\{2\}}(A)$. У цьому випадку справедливе таке твердження.

Теорема 2. *Якщо* $f \in G_{\{2\}}(A),\ g = 0,$ *то*

$$\forall T > 0\ \ \exists T_1 = T_1(f) \leq T\ \ \exists c = c(f,T) > 0\ \ \exists \rho = \rho(f,T),\ \ 0 < \rho < 1:$$
$$\sup_{t\in[0,T]}\left\|u(t) - P^{(1)}_{\mu,t,n}(A)f\right\| \leq c\rho^{n+1}. \tag{14}$$

Навпаки, якщо для деякого $T > 0$ *існують* $T_1 \in (0,T],\ c > 0,\ \rho \in (0,1)$ *такі, що для* $u(t)$, $t \in [0,T_1]$ *з* $u(0) = f \in H_\infty(A),\ u'(0) = 0$ *виконується (14), то* $f \in G_{\{2\}}(A)$.

Доведення цієї теореми аналогічне доведенню теореми 1.

Література

1. *Бабин А. В.* Представление решений дифференциальных уравнений в полиномиальной форме // Успехи мат. наук. – 1983. – **38**, № 2. – С. 228 – 229.
2. *Бабин А. В.* О полиномиальной разрешимости дифференциальных уравнений с коэффициентами из классов бесконечно дифференцируемых функций // Мат. заметки. – 1983. – **34**, № 2. – С. 249 – 260.
3. *Бабин А. В.* Решение задачи Коши при помощи весовых приближений экспонент многочленами // Функцион. анализ. и его прил. – 1983. – **17**, № 4. – С. 75 – 76.
4. *Бабин А. В.* Построение и исследование решений дифференциальных уравнений методами теории приближения функций // Мат. сб. – 1984. – **123**, № 2. – С. 147 – 174.
5. *Горбачук М. Л., Городецкий В. В.* О решениях дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве // Успехи мат. наук. – 1984. – **39**, № 4. – 140 с.
6. *Городецкий В. В., Горбачук М. Л.* О полиномиальном приближении решений дифференциально-операторных уравнений в гильбертовом пространстве // Укр. мат. журн. – 1984. – **36**, № 4. – С. 500 – 502.
7. *Суетин П. К.* Классические ортогональные многочлены. – М.: Наука, 1976. – 328 с.
8. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – К.: Наук. думка, 1984. – 283 с.
9. *Вайнерман Л. И.* Гиперболические уравнения с вырождением в гильбертовом пространстве // Сиб. мат. журн. – 1977. – **18**, № 4. – С. 736 – 746.
10. *Caton W. B., Hille E.* Laguerre polynomials and Laplace integrals // Duke Math. J. – 1945. – **12**, № 2. – P. 217 – 242.

Одержано 22.01.18