УДК 511.72+517.5

УЗАГАЛЬНЕННЯ ТРИБІН-ФУНКЦІЇ

М. В. Працьовитий

Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова
вул. Пирогова, 9, Київ, 01601, Україна;
Ін-т математики НАН України
вул. Терещенківська, 3, Київ, 01024, Україна
e-mail: pratsiovytyi@imath.kiev.ua

О. М. Барановський

Ін-т математики НАН України
вул. Терещенківська, 3, Київ, 01024, Україна
e-mail: baranovskyi@imath.kiev.ua

Ю. П. Маслова

Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова
вул. Пирогова, 9, Київ, 01601, Україна
e-mail: julia0609mas@gmail.com

We consider the Tribin-function and its generalization based on the Q_s^*-representation of real numbers, which is an s-symbol encoding of numbers and, generally speaking, a non-self-similar generalization of an s-adic representation. By definition, the function f associates the number $x = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$, where $\alpha_n \in L \equiv A_s \times A_s \times \ldots \times A_s \times \ldots$ and $A_s = \{0, 1, \ldots, s-1\}$ is an alphabet, $s \geq 3$, with the number $y = f(x) = \Delta^{G_2^*}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n\ldots}$,

$$\gamma_1 = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad \alpha_1 = 0, \\ 1 & \text{for} \quad \alpha_1 \neq 0, \end{cases} \qquad \gamma_{n+1} = \begin{cases} \gamma_n & \text{for} \quad \alpha_{n+1} = \alpha_n, \\ 1 - \gamma_n & \text{for} \quad \alpha_{n+1} \neq \alpha_n, \end{cases}$$

where the G_2^*-representation of numbers has the two-symbol alphabet $A_2 = \{0, 1\}$. We prove that the function f is well-defined, continuous, and nowhere monotonic. Its variational properties are also studied.

Розглядається Трибін-функція і її узагальнення, яке ґрунтується на Q_s^*-зображенні дійсних чисел, що є s-символьним кодуванням чисел і, взагалі кажучи, несамоподібним узагальненням s-кового зображення. А саме: числу $x = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$, де $(\alpha_n) \in L \equiv A_s \times A_s \times \ldots \times A_s \times \ldots$, $A_s = \{0, 1, \ldots, s-1\}$ — алфавіт, $s \geq 3$, функція f ставить у відповідність число $y = f(x) = \Delta^{G_2^*}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n\ldots}$,

$$\gamma_1 = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad \alpha_1 = 0, \\ 1, & \text{якщо} \quad \alpha_1 \neq 0, \end{cases} \qquad \gamma_{n+1} = \begin{cases} \gamma_n, & \text{якщо} \quad \alpha_{n+1} = \alpha_n, \\ 1 - \gamma_n, & \text{якщо} \quad \alpha_{n+1} \neq \alpha_n, \end{cases}$$

де алфавіт $A_2 = \{0; 1\}$, G_2^*-зображення чисел є двосимвольним. Обґрунтовується коректність означення функції f, її неперервність, ніде не монотонність, варіаційні властивості.

Вступ. Сьогодні в математиці наявні ефективні засоби для ґрунтовного вивчення неперервних функцій, які мають складні локальні властивості (структурні, варіаційні, інтегрально-диференціальні тощо). До таких, у першу чергу, ми відносимо ніде не монотонні та недиференційовні функції [1 – 6], звивисті функції [7], сингулярні функції [8, 9], функції канторівського типу, які не мають проміжків монотонності за виключенням проміжків сталості [10], тощо. Їхні множини рівнів та різного роду особливостей мають нетривіальні тополого-метричні і фрактальні властивості. Ці знаряддя забезпечують різні системи кодування (зображення) дійсних чисел з розвинутою геометрією зображень, метричною та ймовірнісною теоріями чисел [11, 12], а також теорія фракталів, що ґрунтується на ідеях самоподібності, самоафінності, автомодельності та структурної подібності. В останній час намітилася загальна схема дослідження їхніх властивостей, яка включає аналіз множин рівнів і вивчення розподілів значень функції при заданому розподілі аргументу.

У даній роботі ми узагальнюємо конструкцію класу неперервних ніде не диференційовних функцій [13, 14], якому належать раніше введені і частково вивчені функції Буша [15], Вундерліха [16], Трибін-функція [17 – 19]. Для цього ми використовуємо Q_s^*-зображення чисел, що є несамоподібним узагальненням класичного s-кового зображення і його самоподібного узагальнення — Q_s-зображення.

2. Q_s^*-зображення та його властивості. Нехай $1 < s$ — фіксоване натуральне число, $A_s \equiv \{0, 1, 2, \ldots, s-1\}$ — алфавіт, $L \equiv A_s \times A_s \times \ldots \times A_s \times \ldots$ — простір послідовностей елементів алфавіту,

$$Q_s^* = \|q_{ik}\| = \begin{pmatrix} q_{01} & q_{02} & \ldots & q_{0k} & \ldots \\ q_{11} & q_{12} & \ldots & q_{1k} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ q_{s-1,1} & q_{s-1,2} & \ldots & q_{s-1,k} & \ldots \end{pmatrix}$$

— задана нескінченна матриця з додатними елементами, яка має такі властивості:

1) $q_{ik} > 0,\ q_{0k} + q_{1k} + \ldots + q_{s-1,k} = 1\ \forall k \in N$ (стохастичність);

2) $\prod_{k=1}^{\infty} \max\{q_{0k}, q_{1k}, \ldots, q_{s-1,k}\} = 0$ (неперервність).

Покладемо $\beta_{0k} \equiv 0,\ \beta_{ik} \equiv q_{0k} + q_{1k} + \ldots + q_{i-1,k} = \beta_{i-1,k} + q_{i-1,k},\ i = \overline{1, s-1}$.

Відома теорема [9, 14] стверджує, що *для будь-якого $x \in [0; 1]$ існує така послідовність $(\alpha_k) \in L$, що*

$$x = \beta_{\alpha_1 1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\beta_{\alpha_k k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j j} \right) \equiv \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k \ldots}. \tag{1}$$

Останній символічний (скорочений) запис $\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k \ldots}$ називається *Q_s^*-зображенням числа x* і відповідного йому ряду (1) [9]. При цьому $\alpha_k = \alpha_k(x)$ називається *k-ю цифрою даного зображення числа x*.

Зауважимо, що однією з задач, яка приводить до Q_s^*-зображення, є задача про вираз функції розподілу випадкової величини ξ, цифри ξ_n s-кового зображення $\Delta^s_{\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_n \ldots}$ якої є незалежними випадковими величинами, що набувають значення $0, 1, 2, \ldots, s-1$ з імовірностями $q_{0n}, q_{1n}, q_{2n}, \ldots, q_{s-1,n}$ відповідно. Як окремий об’єкт розгляду Q_s^*-зображення введено в роботі [20].

Якщо всі стовпці матриці $\|q_{ik}\|$ однакові, тобто $q_{ik} = q_i$ для будь-якого $k \in N$, то Q_s^*-зображення називається Q_s*-зображенням*. Якщо, крім цього, $q_i = \dfrac{1}{s}$ для всіх $i \in A_s$, то Q_s-зображення числа називається s*-ковим* (для $s = 10$ — десятковим, для $s = 2$ — двійковим). Геометрія цих зображень (геометричний зміст цифр, властивості циліндрів, метричні відношення тощо) є добре вивченою [9]. Відомо, що числа зліченної підмножини відрізка [0;1] мають два різні Q_s^*-зображення, їх називають Q_s^**-раціональними* (це числа з зображеннями $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m c_{m+1}(0)} = \Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m[c_{m+1}-1](s-2)}$), решта чисел мають єдине Q_s^*-зображення і називаються Q_s^**-ірраціональними*.

Множина всіх чисел $x \in [0;1]$, які мають Q_s^*-зображення з першими цифрами $c_1, c_2, \ldots \ldots, c_m$ відповідно, називається *циліндром рангу* m з основою $c_1c_2\ldots c_m$ і позначається через $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m}$. Очевидною є рівність

$$\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m} = \Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m0} \cup \Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m1} \cup \ldots \cup \Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m[s-1]}.$$

Циліндр $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m}$ є відрізком з кінцями A і B, де

$$A = \beta_{c_11} + \sum_{k=2}^{m}\left(\beta_{c_kk}\prod_{j=1}^{k-1} q_{c_jj}\right), \qquad B = A + \prod_{j=1}^{m} q_{c_jj}.$$

А тому

$$\left|\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m}\right| = \prod\nolimits_{j=1}^{m} q_{c_jj} \qquad \text{і} \qquad \left|\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_mi}\right| = q_{i,m+1}\left|\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m}\right|.$$

Остання рівність називається *основним метричним відношенням*. Вона відіграє важливу роль у метричній та ергодичній теоріях дійсних чисел у даному зображенні.

Два циліндри одного рангу співпадають або не перекриваються. Більш того,

$$\max \Delta^{Q_s^*}_{c_1\ldots c_mi} = \min \Delta^{Q_s^*}_{c_1\ldots c_m[i+1]}.$$

Для будь-якої послідовності $(c_n) \in L$ виконується рівність

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m} = \Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m\ldots} \equiv x \in [0;1].$$

Зауважимо, що коли $s = 2$, тоді $q_{1k} = 1 - q_{0k}$, і це відображає специфіку випадку $s = 2$ і принципову відмінність його від інших. Лише в цьому випадку цифри є не тільки символами (значками) зображення числа, а й числом, оскільки $\beta_{\alpha_kk} = \alpha_k q_{[1-\alpha_k]k}$. Такі зображення заслуговують окремої уваги, ми позначаємо їх через G_2^*.

3. Лівосторонній оператор зсуву цифр зображення. *Лівосторонній оператор зсуву (ЛОЗ)* цифр Q_s^*-зображення чисел (1) визначається рівністю

$$\omega(x) = \omega\left(\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots}\right) = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_2(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots}.$$

Зрозуміло, що лівосторонній оператор зсуву є коректно означеною функцією на проміжку $\langle 0;1\rangle$ лише після домовленості використовувати тільки одне з двох існуючих зображень Q_s^*-раціональних чисел, а саме: зображення, що має період (0).

Нагадаємо, що зображення (кодування) називається самоподібним, якщо ЛОЗ є лінійною функцією на кожному з циліндрів 1-го рангу.

Лема 1. *Якщо Q_s^*-зображення є Q_s-зображенням, то функція ω аналітично подається у вигляді $\omega(x) = \frac{1}{q_{\alpha_1(x)}} x - \frac{\beta_{\alpha_1(x)}}{q_{\alpha_1(x)}}$ і є лінійною функцією на кожному з циліндрів 1-го рангу, а саме:*

$$\omega(x) = \begin{cases} \frac{1}{q_0} x, & \textit{якщо} \quad x \in \Delta_0^{Q_s}, \\ \frac{1}{q_1} x - \frac{q_0}{q_1}, & \textit{якщо} \quad x \in \Delta_1^{Q_s}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ \frac{1}{q_{s-1}} x - \frac{\beta_{s-1}}{q_{s-1}}, & \textit{якщо} \quad x \in \Delta_{s-1}^{Q_s}. \end{cases}$$

Дане твердження є наслідком рівностей

$$x = \Delta^{Q_s}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots} = \beta_{\alpha_1} + q_{\alpha_1}\left(\beta_{\alpha_2} + \sum_{k=3}^{\infty}\left(\beta_{\alpha_k}\prod_{j=2}^{k-1} q_{\alpha_j}\right)\right) = \beta_{\alpha_1} + q_{\alpha_1}\omega(x).$$

Лему 1 доведено.

Якщо покласти $\omega^n(x) \equiv \omega\left(\omega^{n-1}(x)\right)$, то

$$\omega^n(x) = \omega^n\left(\Delta^{Q_s}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots}\right) = \frac{x}{P} - \frac{b}{P},$$

де

$$P = \prod_{j=1}^{n} q_{\alpha_j}, \quad b = \beta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{n}\left(\beta_{\alpha_k}\prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j}\right).$$

Нагадаємо, що оператор лівостороннього зсуву цифр для різних систем зображення чисел відіграє важливу роль в ергодичній, метричній та ймовірнісній теоріях чисел. Так, задача про міру Лебега множини

$$E_n(x) = \{t\colon \omega^n(t) < x\}$$

і її асимптотичну поведінку була фактично першою задачею метричної теорії елементарних ланцюгових дробів. Вона була сформульована Гаусом і розв'язана Р. О. Кузьміним (сьогодні називається задачею Гауса – Кузьміна) [21, 22]. Для ланцюгових дробів маємо

$$\lim_{n\to\infty} E_n(x) = \frac{\lg(1+x)}{\lg 2}.$$

Теорема 1. *Якщо Q_s^*-зображення є Q_s-зображенням, то інваріантною мірою оператора лівостороннього зсуву цифр зображення є міра, що відповідає розподілу випадкової величини з незалежними однаково розподіленими Q_s-цифрами.*

Доведення. Розглянемо випадкову величину $\xi = \Delta^{Q_s}_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_n\ldots}$, де (ξ_n) — послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин, які набувають значень $0, 1, \ldots$ $\ldots, s-1$ з імовірностями $p_0, p_1, \ldots, p_{s-1}$ відповідно.

Оскільки будь-яку борелівську підмножину відрізка $[0; 1]$ можна як завгодно точно наближати Q_s-циліндрами (а саме: їхнім об'єднанням), то для доведення теореми досить показати, що

$$P\left(\omega^{-1}\left(\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}\right)\right) = P\left(\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}\right).$$

Але

$$P\left(\omega^{-1}\left(\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}\right)\right) = P\left(\bigcup_{i=0}^{s-1}\Delta^{Q_s}_{i\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}\right) = \sum_{i=0}^{s-1} P\left(\Delta^{Q_s}_{i\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}\right) = \sum_{i=0}^{s-1}\left(p_i\prod_{j=1}^{m}p_{\alpha_j}\right) =$$

$$= (p_0+p_1+\ldots+p_{s-1})\prod_{j=1}^{m}p_{\alpha_j} = \prod_{j=1}^{m}p_{\alpha_j} = P\left(\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}\right),$$

а це й треба було довести.

Зауваження 1. Для Q_s^*-зображення числа $x = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ введемо позначення

$$P_m(x) \equiv \prod_{j=1}^{m} q_{\alpha_j(x)j}, \tag{2}$$

$$A_m(x) = \beta_{\alpha_1(x)1} + \sum_{k=2}^{m}\left(\beta_{\alpha_k(x)k}\prod_{j=1}^{k-1}q_{\alpha_j(x)j}\right) = \beta_{\alpha_1(x)1} + \sum_{k=2}^{m}\left(\beta_{\alpha_k(x)k}P_{k-1}(x)\right). \tag{3}$$

Тоді для будь-якого $m \in N$ виконується рівність

$$x = A_m(x) + P_m(x)\cdot\omega^m(x),$$

де $\omega^m(x) = \omega\left(\omega^{m-1}(x)\right)$.

Аналогічно для G_2^*-зображення числа y маємо $y = A_m(y) + P_m(y)\cdot\omega^m(y)$.

Правостороннім оператором зсуву цифр Q_s^*-зображення чисел із параметром i називається функція, означена рівністю

$$\delta_i(x) = \delta_i\left(\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots}\right) = \Delta^{Q_s^*}_{i\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots}.$$

При $Q_s^* = Q_s$ функція $\delta_i(x)$ має аналітичний вираз

$$\delta_i(x) = \beta_i + q_i x.$$

Справді,

$$\delta_i\left(\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\right) = \beta_i + q_i\left(\beta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\beta_{\alpha_k}\prod_{j=1}^{k-1}q_{\alpha_j}\right)\right) = \beta_i + q_i x.$$

Очевидними є рівності $\omega(\delta_i(x)) = x$ і $\delta_{\alpha_1(x)}(\omega(x)) = x$.

Зауважимо, що рівняння $\delta_i(x) = \omega(x)$ має s розв'язків: $x_j^{(i)} = \Delta^{Q_s^*}_{(ji)}$, де $i \in A_s,\ j \in A_s$, тому функції

$$f_1(x) = \begin{cases}\omega(x), & \text{якщо} \quad x \le x_0^{(s-1)},\\ \delta_{s-1}(x), & \text{якщо} \quad x \ge x_0^{(s-1)},\end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases}\delta_0(x), & \text{якщо} \quad x \le x_{s-1}^{(0)},\\ \omega(x), & \text{якщо} \quad x \ge x_{s-1}^{(0)},\end{cases}$$

є зростаючими перетвореннями піввідрізка [0;1), які зберігають хвости Q_s^*-зображення чисел.

4. Об'єкт дослідження. Нехай маємо два Q_s^*-зображення чисел, перше s-символьне $(s \geq 3)$, а друге — двосимвольне, а саме: $\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ і $\Delta^{G_2^*}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n\ldots}$ є зображеннями чисел відрізка $[0;1]$, які визначені нескінченними стохастичними матрицями $\|q_{ik}\|$ і $\|g_{ik}\|$ відповідно, причому остання має два рядки, а перша — $s > 2$.

Розглядається функція f, яка числу $x = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ ставить у відповідність число

$$y = \Delta^{G_2^*}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n\ldots} = \delta_{\gamma_1 1} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\delta_{\gamma_k k}\prod_{j=1}^{k-1} g_{\gamma_j j}\right), \tag{4}$$

де $\delta_{0k} = 0,\ \delta_{1k} = g_{0k},\ \delta_{ik} = g_{0k} + g_{1k} + \ldots + g_{i-1,k} = \delta_{i-1,k} + g_{i-1,k},\ i = \overline{1, s-1},$

$$\gamma_1 = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad \alpha_1 = 0, \\ 1, & \text{якщо} \quad \alpha_1 \neq 0, \end{cases} \qquad \gamma_{n+1} = \begin{cases} \gamma_n, & \text{якщо} \quad \alpha_{n+1} = \alpha_n, \\ 1-\gamma_n, & \text{якщо} \quad \alpha_{n+1} \neq \alpha_n, \end{cases} \qquad n \in N. \tag{5}$$

Коректність означення функції є наслідком того, що значення її виразу для двох різних зображень Q_s^*-раціональної точки рівні. А це, власне, є необхідною умовою її неперервності, яку доведемо далі.

Очевидно, що мають місце рівності: $f(0) = f\left(\Delta^{Q_s^*}_{(0)}\right) = 0,\ f\left(\Delta^{Q_s^*}_{(i)}\right) = \Delta^{G_2^*}_{(1)} = 1$ при $i \neq 0,\ f\left(\Delta^{Q_*^s}_{(10)}\right) = \Delta^{G_2^*}_{(10)},\ f\left(\Delta^{Q_s^*}_{(01)}\right) = \Delta^{G_2^*}_{(01)}$.

Як виразити цифру $\gamma_m(y)$ G_2^*-зображення значення функції $y = f(x)$, знаючи набір цифр аргументу $\alpha_1(x), \alpha_2(x), \ldots, \alpha_m(x)$?

Введемо лічильник $\sigma_m(x) = \sigma_m\left(\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\right)$, який означає зміни цифр зображення, тобто кількість змін цифр у Q_s^*-зображенні числа x до m-го місця включно: $\sigma_m = \#\{i\colon \alpha_i \neq \alpha_{i+1},\ i = \overline{1, m-1}\}$. Згідно з означенням функції f виконується рівність

$$\sigma_m\left(\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\right) = \sigma_m\left(f\left(\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\right)\right) = \sigma_m\left(\Delta^{G_2^*}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n\ldots}\right).$$

Тоді

$$\gamma_m(y) = \begin{cases} 1, & \sigma_m \text{ — непарне і } \gamma_1 = 0 \text{ або } \sigma_m \text{ — парне і } \gamma_1 \neq 0, \\ 0, & \sigma_m \text{ — парне і } \gamma_1 = 0 \text{ або } \sigma_m \text{ — непарне і } \gamma_1 \neq 0. \end{cases}$$

Справедливе таке твердження.

Лема 2. 1) *Образом Q_s^*-циліндра $\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}$ при відображенні f є G_2^*-циліндр $\Delta^{G_2^*}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_m}$, де γ_i знаходяться за формулами (5);*

2)

$$\max_{x \in \Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m}} f(x) = \begin{cases} f\left(\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_{m-1}(c_m)}\right) = \Delta^{G_2^*}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_{m-1}(1)}, & \textit{якщо} \quad \gamma_m(y) = 1, \\ f\left(\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m(i)}\right) = \Delta^{G_2^*}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_{m-1}0(1)}, & \textit{якщо} \quad \gamma_m(y) = 0, \end{cases}$$

де $i \neq c_m$ (в останньому випадку максимумів $s-2$);

3)

$$\min_{x \in \Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m}} f(x) = \begin{cases} f\left(\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_{m-1}(c_m)}\right) = \Delta^{G_2^*}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_{m-1}(0)}, & \text{якщо} \quad \gamma_m(y) = 0, \\ f\left(\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m(i)}\right) = \Delta^{G_2^*}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_{m-1}1(0)}, & \text{якщо} \quad \gamma_m(y) = 1, \end{cases}$$

де $i \neq c_m$ (в останньому випадку мінімумів $s-2$).

Наслідок 1. *Коливання ψ_f функції f (різниця максимуму і мінімуму) на циліндрі $\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}$ дорівнює довжині циліндра $\Delta^{G_2^*}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_m} = f(\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m})$, а отже,*

$$\psi_f\left(\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}\right) = \left|\Delta^{G_2^*}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_m}\right| = \prod_{j=1}^{m} g_{\gamma_j j}.$$

Лема 3. *Кількість k прообразів циліндра $\Delta^{G_2^*}_{\gamma_1\ldots\gamma_m}$ обчислюється за формулою*

$$k = k\left(\Delta^{G_2^*}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_m}\right) = \begin{cases} (s-1)^{\sigma_m}, & \text{якщо} \quad \gamma_1 = 0, \\ (s-1)^{1+\sigma_m}, & \text{якщо} \quad \gamma_1 \neq 0, \end{cases} \tag{6}$$

де σ_m — кількість таких j, що $\gamma_j \neq \gamma_{j+1}$, $j = \overline{1, m-1}$.

Доведення. Скористаємося методом математичної індукції. Очевидно, що прообразом циліндра $\Delta^{G_2^*}_0$ є циліндр $\Delta^{Q_s^*}_0$, а циліндра $\Delta^{G_2^*}_1$ — циліндри $\Delta^{Q_s^*}_i$, де $i = \overline{1, s-1}$. Циліндри другого рангу мають такі прообрази:

$$\Delta^{G_2^*}_{00} \ — \ \Delta^{Q_s^*}_{00},$$

$$\Delta^{G_2^*}_{01} \ — \ \Delta^{Q_s^*}_{0i}, \quad i = \overline{1, s-1},$$

$$\Delta^{G_2^*}_{10} \ — \ \Delta^{Q_s^*}_{ij}, \quad i = \overline{1, s-1}, \quad j \neq i,$$

$$\Delta^{G_2^*}_{11} \ — \ \Delta^{Q_s^*}_{ii}, \quad i = \overline{1, s-1}.$$

У всіх розглянутих випадках твердження очевидно виконується. Припустимо, що воно виконується для $m = n$. Розглянемо випадок $m = n+1$, а саме: циліндр $\Delta^{G_2^*}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_m\gamma_{m+1}}$. Оскільки циліндр $\Delta^{G_2^*}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_m}$ має k прообразів, де число k обчислюється за формулою (6), то при $\gamma_{m+1} = \gamma_m$ прообразом циліндра $\Delta^{G_2^*}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_m\gamma_{m+1}}$ є кожен циліндр вигляду $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m c_m}$, де $f\left(\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m}\right) = \Delta^{G_2^*}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_m}$, тобто $k_{m+1} = k_m$. Іншими словами: при $\gamma_{m+1} = \gamma_m$ кожен прообраз циліндра $\Delta^{G_2^*}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_m}$ породжує єдиний прообраз циліндра $\Delta^{G_2^*}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_m\gamma_{m+1}}$, а саме: $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m c_m}$, де $f\Big(\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m}\Big) = \Delta^{G_2^*}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_m}$, тому $k\Big(\Delta^{G_2^*}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_m\gamma_{m+1}}\Big) = k\Big(\Delta^{G_2^*}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_m}\Big)$.

Якщо $\gamma_{m+1} \neq \gamma_m$ і $f\Big(\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m}\Big) = \Delta^{G_2^*}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_m}$, то

$$f\Big(\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m i}\Big) = \Delta^{G_2^*}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_m\gamma_{m+1}}, \quad i \neq c_m,$$

тобто

$$k\Big(\Delta^{G_2^*}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_m\gamma_{m+1}}\Big) = k\Big(\Delta^{G_2^*}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_m}\Big)(s-1).$$

Отже, має місце рівність (6).

Лему 3 доведено.

Наслідок 2. *Найбільшу кількість прообразів серед циліндрів m-го рангу має G_2^*-циліндр $\Delta^{G_2^*}_{1010\ldots c}$, де $c = 0$, якщо m парне, і $c = 1$, якщо m непарне.*

5. Неперервність функції.

Теорема 2. *Функція f, означена рівностями (4), (5), є неперервною в кожній точці відрізка* $[0; 1]$.

Доведення. Нехай $x_0 = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ — Q_s^*–ірраціональна точка відрізка [0;1]. Тоді для довільно вибраного $x \neq x_0$ існує число $m \in N$ таке, що $\alpha_{m+1}(x) \neq \alpha_{m+1}(x_0)$, але $\alpha_i(x) = \alpha_i(x_0)$ при $i \leq m$, причому $x \to x_0$ тоді і тільки тоді, коли $m \to \infty$. Оцінимо різницю

$$|f(x) - f(x_0)| = \left(\prod_{j=1}^{m} g_{\gamma_j j}\right) |\omega^m(x) - \omega^m(x_0)| \leq \prod_{j=1}^{m} g_{\gamma_j j} \to 0, \quad m \to \infty.$$

Отже, функція є неперервною в точці x_0 згідно з означенням.

Якщо x_0 є Q_s^*-раціональною точкою, тобто має два різні Q_s^*-зображення:

$$x_0 = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}\alpha_k(0)} = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}[\alpha_k-1](s-1)},$$

то досить повторити попередні міркування для двох різних випадків, коли $x \to x_0 + 0$, використовуючи перше зображення, і $x \to x_0 - 0$, використовуючи друге зображення. В обох випадках $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0$, що рівносильне неперервності функції в точці x_0 згідно з означенням.

6. Ніде не монотонність функції.

Теорема 3. *Функція, визначена рівностями (4), (5), є ніде не монотонною.*

Доведення. Досить показати, що для довільного циліндра будь-якого рангу (нехай $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m}$) знайдуться три такі точки $x_1, x_2, x_3 \in \Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m}$, що:

1) $x_1 < x_2 < x_3$;

2) $(y_2 - y_1)(y_3 - y_2) < 0$, де $y_i = f(x_i),\ i = 1, 2, 3$.

Вкажемо ці точки. Для цього розглянемо

$$x_1 = \Delta^{Q_s^*}_{c_1\ldots c_m 1(0)}, \quad x_2 = \Delta^{Q_s^*}_{c_1\ldots c_m 1(1)}, \quad x_3 = \Delta^{Q_s^*}_{c_1\ldots c_m 1(s-1)}.$$

Очевидно, що $f(x_1) = f(x_3)$, оскільки $A_{m+1}(y_1) = A_{m+1}(y_3)$, $P_{m+1}(y_1) = P_{m+1}(y_3)$ і $\omega^m(y_1) = \omega^m(y_3)$, але $y_1 = f(x_1) \neq f(x_2) = y_2$, оскільки при $\gamma_{m+1}(y_1) = b$, маємо $y_1 = y_3 = \Delta^{G_2^*}_{\gamma_1\ldots\gamma_m(b)}$, а $y_2 = \Delta^{G_2^*}_{\gamma_1\ldots\gamma_m b(1-b)}$.

Отже, $(y_2 - y_1)(y_3 - y_2) < 0$, що свідчить про немонотонність функції на циліндрі. Оскільки для довільного інтервалу відрізка [0;1] легко вказати циліндр, який повністю йому належить, то функція не має жодного як завгодно малого проміжку монотонності, тобто є ніде не монотонною.

7. Варіаційні властивості функції.

Теорема 4. *При довільних матрицях $Q_s^* = \|q_{ik}\|$ і $G_2^* = \|g_{jk}\|$ функція $y = f(x)$, означена рівностями (4), (5), є неперервною функцією необмеженої варіації.*

Доведення. Неперервність функції f встановлена вище. Оскільки коливання (тобто різниця максимумів і мінімумів) функції $f(x)$ на циліндрі дорівнює довжині його образу, то очевидно, що варіація $V(f)$ функції f є більшою, ніж сумарна довжина W_k образів усіх Q_s^*-циліндрів рангу k для будь-якого $k \in N$, тобто

$$V(f) > W_k = \sum_{\alpha_1=0}^{s-1} \sum_{\alpha_2=0}^{s-1} \ldots \sum_{\alpha_k=0}^{s-1} \left| f\left(\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}\right)\right|.$$

Оскільки існує лише один G_2^*-циліндр k-го рангу, а саме: $\Delta^{G_2^*}_{0\ldots0}$, що є образом єдиного Q_s^*-циліндра рангу k, а саме: $\Delta^{Q_s^*}_{0\ldots0}$, то

$$W_k > 2 - \left|f(\Delta^{Q_s^*}_{0\ldots0})\right| = 2 - \prod_{i=1}^{k} g_{0i} \equiv V_1.$$

Але послідовність

$$u_k = \prod_{i=1}^{k} g_{0i}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

є строго спадною і нескінченно малою, тому що:

1) $0 < g_{0i} < 1$ для довільного $i \in N$;

2) виконується рівність

$$\prod_{i=1}^{\infty} \max\{g_{0i}, g_{1i}\} = 0.$$

Отже, існує $k_1 \in N$ таке, що

$$2 - \prod_{i=1}^{k_1} g_{0i} \geq 1{,}5,$$

коли

$$\prod_{i=1}^{k_1} g_{0i} < 0{,}5.$$

Проведені міркування можна детальніше проілюструвати на циліндрах 1-го, 2-го та 3-го рангу. Маємо

$$W_1 = g_{01} + (s-1)g_{11} = 1 + (s-2)g_{11} = 2 - g_{01} + (s-3)g_{11};$$

$$\begin{aligned} W_2 &= g_{01}(g_{02} + (s-1)g_{12}) + g_{11}\left(g_{12}(s-1) + g_{02}(s-1)^2\right) = \\ &= g_{01}(1 + (s-2)g_{12}) + g_{11}(s-1)(1 + (s-2)g_{02}) = \\ &= g_{01} + (s-2)g_{01}g_{12} + g_{11}(s-1) + g_{11}(s-1)(s-2)g_{02} = \\ &= 1 + (s-2)g_{01}g_{12} + g_{11}(s-2) + g_{11}(s-1)(s-2)g_{02}; \end{aligned}$$

$$W_3 = 2 - g_{01}g_{02}g_{03} + 2g_{01}g_{12}g_{03} + 2g_{11}g_{02}g_{03} + 6g_{11}g_{02}g_{13} + 2g_{11}g_{12}g_{03}.$$

Остання рівність наведена для $s = 3$ (найбільш цікавого випадку).

Розглядаючи довільно вибраний Q_s^*-циліндр $\Delta^{Q_s^*}_{c_1 c_2 \ldots c_{k_1}}$ і його образ $\Delta^{G_2^*}_{d_1 d_2 \ldots d_{k_1}}$, скористаємося тими ж міркуваннями. Очевидно, що існує число $k_2 \in N$ таке, що

$$\sum_{\alpha_{k_1+1=0}}^{s-1} \sum_{\alpha_{k_1+2=0}}^{s-1} \ldots \sum_{\alpha_{k_1+k_2=0}}^{s-1} \left| f\left(\Delta^{Q_s^*}_{c_1 \ldots c_{k_1} \alpha_{k_1+1} \ldots \alpha_{k_1+k_2}}\right)\right| \geq \frac{3}{2} \left| f\left(\Delta^{Q_s^*}_{d_1 d_2 \ldots d_{k_1}}\right)\right|$$

з тієї ж причини (при цьому зауважимо, що може мати єдиний прообраз лише один G_2^*-циліндр). Тоді

$$V(f) > W_{k_1+k_2} \geq \left(\frac{3}{2}\right) W_{k_1} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^2.$$

Аналогічні міркування можна провести стосовно циліндрів (k_1+k_2)-го рангу та отримати

$$V(f) > W_{k_1+k_2+k_3} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^3$$

і т. д. Отже, при довільному $n \in N$ маємо

$$V(f) > \left(\frac{3}{2}\right)^n,$$

що рівносильне $V(f) = \infty$.

Теорему 4 доведено.

Зауваження 2. Аналогічними міркуваннями можна довести, що функція f має необмежену варіацію на будь-якому інтервалі області визначення, а це є необхідною умовою ніде не диференційовності. В даній роботі ми не висвітлювали диференціальні властивості функції.

Література

1. *Працьовитий М. В.* Ніде не монотонні сингулярні функції // Наук. часопис Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. науки. – 2011. – № 12. – С. 24 – 36.
2. *Працьовитий М. В., Калашніков А. В.* Самоафінні сингулярні та ніде не монотонні функції, пов'язані з Q-зображенням дійсних чисел // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 3. – С. 405 – 417.
3. *Працьовитий М. В., Василенко Н. А.* Одна сім'я неперервних ніде не монотонних функцій з фрактальними властивостями // Наук. часопис Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. науки. – 2013. – № 14. – С. 176 – 188.
4. *Pratsiovytyi M., Vasylenko N.* Fractal properties of functions defined in terms of Q-representation // Internat. J. Math. Analysis. – 2013. – **7**, № 61-67. – P. 3155 – 3169.
5. *Працьовитий М. В., Василенко Н. А.* Одна сім'я неперервних функцій з всюди щільною множиною особливостей // Наук. часопис Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. науки. – 2011. – № 12. – С. 152 – 167.
6. *Працьовитий М. В., Василенко Н. А.* Розподіли ймовірностей на графіках одного класу ніде не диференційовних функцій // Тр. Ин-та прикл. математики и механики НАН Украины. – 2013. – **26**. – С. 159 – 171.
7. *Козырев С. Б.* О топологической густоте извивающихся функций // Мат. заметки. – 1983. – **33**, вып. 1. – С. 71 – 76.
8. *Замрій І. В., Працьовитий М. В.* Сингулярність інверсора цифр Q_3-зображення дробової частини дійсного числа, його фрактальні та інтегральні властивості // Нелін. коливання. – 2015. – **18**, № 1. – С. 55 – 70.
9. *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. – Київ: Вид-во Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова, 1998. – 296 с.

10. *Працьовитий М. В., Свинчук О. В.* Розсіювання значень однієї фрактальної неперервної немонотонної функції канторівського типу // Нелін. коливання. – 2018. – **21**, № 1. – С. 116 – 130.

11. *Працьовитий М. В.* Системи числення зі змінною основою та змінним алфавітом (або розвинення чисел в ряди Кантора) // Студент. фіз.-мат. етюди. – 2009. – № 8. – С. 6 – 18.

12. *Працьовитий М. В.* Геометрія класичного двійкового зображення дійсних чисел. – Київ: Вид-во Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова, 2012. – 68 с.

13. *Працевитый Н. В.* Непрерывные канторовские проекторы // Методы исследования алгебраических и топологических структур. – Киев: Киев. гос. пед. ин-т, 1989. – С. 95 – 105.

14. *Турбин А. Ф., Працевитый Н. В.* Фрактальные множества, функции, распределения. – Киев: Наук. думка, 1992. – 208 с.

15. *Bush K. A.* Continuous functions without derivatives // Amer. Math. Monthly. – 1952. – **59**, № 4. – P. 222 – 225.

16. *Wunderlich W.* Eine überall stetige und nirgends differenzierbare Funktion // Elem. Math. – 1952. – **7**, № 4. – P. 73 – 79.

17. *Коваль В. В.* Самоафінні графіки функцій // Наук. часопис Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. науки. – 2004. – № 5. – С. 292 – 299.

18. *Панасенко О. Б.* Фрактальна розмірність графіків неперервних канторівських проекторів // Наук. часопис Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. науки. – 2008. – № 9. – С. 104 – 111.

19. *Працьовитий М. В.* Фрактальні властивості однієї неперервної ніде не диференційовної функції // Наук. зап. Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова. Фіз.-мат. науки. – 2002. – № 3. – С. 351 – 362.

20. *Торбин Г. М., Працевитый Н. В.* Случайные величины с независимыми Q^*-знаками // Случайные эволюции: теоретические и прикладные задачи. – Киев: Ин-т математики АН Украины, 1992. – С. 95 – 104.

21. *Хинчин А. Я.* Цепные дроби. – М.: Наука, 1978. – 166 с.

22. *Кац М.* Статистическая независимость в теории вероятностей, анализе и теории чисел. – М.: Изд-во иностр. лит., 1963. – 156 с.

Одержано 11.06.19