УДК 517.929

ЛІНІЙНІ ФУНКЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ З $\mathfrak{D}_h$-НЕСТІЙКИМИ РОЗВ'ЯЗКАМИ

В. Ю. Слюсарчук

Нац. ун-т вод. госп-ва та природокористування
вул. Соборна, 11, Рівне, 33000, Україна
e-mail: V.E.Slyusarchuk@gmail.com

We establish conditions for absolute instability of solutions of linear functional equations with self-adjoint operator coefficients.

Наведено умови абсолютної нестійкості розв'язків лінійних функціональних рівнянь зі самоспряженими операторними коефіцієнтами.

1. Основний об'єкт досліджень. Нехай H — гільбертів простір і $\|\cdot\|_H$ — норма в H, яка визначається рівністю

$$\|x\|_E = \sqrt{(x,x)},$$

де (x,y) — скалярний добуток x на y, $x,y \in H$, $L(H,H)$ — банахова алгебра лінійних неперервних операторів $A\colon H \to H$ з одиницею I та нормою

$$\|A\|_{L(H,H)} = \sup_{\|x\|_H = 1} \|Ax\|_H,$$

$\sigma(A)$ і $r(A)$ — спектр і спектральний радіус оператора $A\colon H \to H$ відповідно, h — довільне число з проміжку $(1,+\infty)$, $C([-h,-1],H)$ — банахів простір неперервних на $[-h,-1]$ функцій $x = x(\theta)$ зі значеннями в H і нормою

$$\|x\|_{C([-h,-1],H)} = \max_{\theta\in[-h,-1]} \|x(\theta)\|_H$$

і $\mathfrak{D}_h$ — множина всіх лінійних операторів $D\colon C([-h,-1],H) \to H$, норми яких збігаються з одиницею і кожний з яких визначається за допомогою інтеграла Рімана – Стільтьєса

$$Dx = \int\limits_{-h}^{-1} x(\theta)\, d\Upsilon(\theta),$$

де $\Upsilon(\theta)$ — неспадна функція з обмеженою змінною та значеннями в $\mathbb{R}$, задана на $[-h,-1]$, для якої $\Upsilon(\theta+0) = \Upsilon(\theta)$ для всіх $\theta \in [-h,-1)$.

Зауважимо, що коли $-h = x_0 < x_3 < x_2 < \ldots < x_n = -1$ — деяке розбиття відрізка $[-h,-1]$ і $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — довільні точки з відповідних елементів розбиття, тоді під $\displaystyle\int_{-h}^{-1} x(\theta)\, d\Upsilon(\theta)$ розуміється границя $\lim_{\max(x_i - x_{i-1})\to 0} \sum_{i=1}^{n} (\Upsilon(x_i) - \Upsilon(x_{i-1})) x(\xi_i)$. Ця границя існує і не залежить від розбиття відрізка $[-h,-1]$ на частини та вибору на них точок $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$.

Для довільної неперервної на $[-h,+\infty)$ функції $x(t)$ зі значеннями в H позначимо через x_t елемент $x_t(\theta)=x(t+\theta)$ простору $C([-h,-1],H)$.

Зафіксуємо довільні самоспряжені оператори $A_k\in L(H,H),\ k\geq 1,$ для яких

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|A_k\|_{L(H,H)}<+\infty. \tag{1}$$

Розглянемо лінійне функціональне рівняння

$$x(t)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k\mathcal{D}_k x_t,\quad t\geq 0, \tag{2}$$

де $\mathcal{D}_k\in\mathfrak{D}_h,\ k\geq 1.$

Нульовий розв'язок рівняння (2) будемо називати $\mathfrak{D}_h$*-нестійким*, якщо цей розв'язок нестійкий при всіх $\mathcal{D}_k\in\mathfrak{D}_h,\ k\geq 1.$ $\mathfrak{D}_h$-Нестійкий для кожного $h>1$ нульовий розв'язок рівняння (2) будемо називати *абсолютно нестійким* розв'язком.

Метою даної статті є встановлення умов $\mathfrak{D}_h$-нестійкості нульового розв'язку рівняння (2) при всіх $h>1.$

2. Формулювання основних результатів. Нагадаємо, що для $A\in L(H,H)$

$$r(A)=\sup_{\lambda\in\sigma(A)}|\lambda|.$$

Справедливі такі твердження.

Теорема 1. *Якщо нульовий розв'язок рівняння (2)* $\mathfrak{D}_h$*-нестійкий для кожного* $h>1,$ *то*

$$r\left(\sum_{k=1}^{\infty}A_k\right)>1. \tag{3}$$

Теорема 2. *Якщо*

$$\lambda_{\max}\left(\sum_{k=1}^{\infty}A_k\right)>1, \tag{4}$$

то нульовий розв'язок рівняння (2) $\mathfrak{D}_h$*-нестійкий для кожного* $h>1.$

Ці твердження обґрунтовуються в п. 4 і 5.

3. Допоміжні твердження. Наведемо деякі факти про самоспряжені оператори, що будуть використовуватися при дослідженні рівняння (2).

Нагадаємо, що оператор $A\in L(H,H)$ називається самоспряженим, якщо він збігається зі спряженим до нього оператором A^*, тобто $(Ax,y)=(x,Ay)$ для всіх $x,y\in H$ (теорія таких операторів викладена, наприклад, в [1–3]). Самоспряжений оператор $A\in L(H,H)$ характеризується тим, що його ермітова форма (Ax,x) $(x\in H)$ набуває лише дійсні значення. Спектр $\sigma(A)$ самоспряженого оператора A є непорожньою обмеженою замкненою множиною на дійсній осі. Позначимо через $[\lambda_{\min}(A),\lambda_{\max}(A)]$ найменший сегмент, що містить у собі спектр $\sigma(A).$ Відомо, що

$$\lambda_{\min}(A)=\inf\left\{(Ax,x)\colon \|x\|_H=1\right\},$$

$$\lambda_{\max}(A) = \sup\{(Ax, x) \colon \|x\|_H = 1\},$$

$$r(A) = \|A\|_{L(H,H)} = \max\{\lambda_{\max}(A), -\lambda_{\min}(A)\}.$$

Завдяки неперервній залежності скалярного добутку (x, y) від x і y величини $\lambda_{\min}(A)$, $\lambda_{\max}(A)$, $r(A)$ і $\|A\|_{L(H,H)}$ неперервно залежать від A.

Зазначимо, що сума самоспряжених операторів — самоспряжений оператор, лінійна комбінація їх із дійсними коефіцієнтами також є самоспряженим оператором. Завдяки неперервності скалярного добутку границя за нормою послідовності самоспряжених операторів є самоспряженим оператором. Добуток BA самоспряжених операторів A і B є самоспряженим оператором тільки тоді, коли $BA = AB$.

Для подальшого викладу важливі такі твердження.

Теорема 3 [2]. *Точка λ належить спектру самоспряженого оператора $A \in L(H, H)$ тоді і тільки тоді, коли існує послідовність нормованих векторів x_m, $m \geq 1$, для якої* $\lim_{m\to\infty} \|Ax_m - \lambda x_m\|_H = 0$.

Теорема 4. *Якщо для самоспряженого оператора $A \in L(H, H)$ справджується нерівність $r(A) \leq 1$, то $\sup_{m\geq 1} \|A^m\|_{L(H,H)} \leq 1$.*

Теорема 4 є наслідком леми Меррея (див. [1, с. 109, 110]).

4. Доведення теореми 1. Нехай нульовий розв'язок рівняння (2) абсолютно нестійкий. Тоді цей розв'язок також нестійкий, коли

$$\mathcal{D}_k x_t = \int\limits_{-h}^{0} x_t(\theta)\, d\Upsilon_k(\theta) = x(t-1), \quad k = \overline{1, n},$$

де

$$\Upsilon_k(\theta) = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad \theta = -1, \\ 0, & \text{якщо} \quad \theta \in [-h, -1). \end{cases}$$

У цьому випадку рівняння (2) набуває вигляду

$$x(t) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right) x(t-1), \quad t \geq 0. \tag{5}$$

Кожний неперервний розв'язок $x(t, \varphi)$ цього рівняння, побудований за початковою неперервною функцією $\varphi \colon [-1, 0) \to H$, подається у вигляді

$$x(t, \varphi) = \begin{cases} \varphi(t), & \text{якщо} \quad t \in [-1, 0), \\ \left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right)^{[t]+1} \varphi(\{t\} - 1), & \text{якщо} \quad t \geq 0, \end{cases} \tag{6}$$

де $[t]$ та $\{t\}$ — ціла і дробова частини числа t відповідно. У цьому випадку згідно з (5) для функції φ має виконуватися співвідношення

$$\varphi(-0) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right) \varphi(-1),$$

що гарантує неперервність розв'язку $x(t, \varphi)$ на $[0, +\infty)$.

Зазначимо, що завдяки (1) і самоспряженості операторів $A_k,\ k \geq 1,$ оператор $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ також є самоспряженим.

Припустимо, що співвідношення (3) не виконується, тобто

$$r\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq 1. \tag{7}$$

Тоді на підставі теореми 4 кожний розв'язок (6) рівняння (5) із обмеженою функцією $\varphi(t)$ є обмеженим на $[0, +\infty)$, що суперечить нестійкості нульового розв'язку цього рівняння.

Отже, припущення про виконання співвідношення (7) є хибним.

Теорему 1 доведено.

5. Доведення теореми 2. Нехай виконується співвідношення (4).

Зафіксуємо довільні оператори $\mathcal{D}_k \in \mathfrak{D}_h,\ k \geq 1,$ і число $h > 0.$ Нехай ці оператори визначаються рівностями $\mathcal{D}_n x = \displaystyle\int_{-h}^{-1} x(\theta)\, d\Upsilon_k(\theta),\ k \geq 1,$ де функції $\Upsilon_k(\theta),\ k \geq 1,$ мають ті ж самі властивості, що й функції, за допомогою яких визначаються елементи множини $\mathfrak{D}_h.$

Розглянемо рівняння (2) та операторну функцію

$$P(z) = I - \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-h}^{-1} e^{z\theta}\, d\Upsilon_k(\theta) A_k, \quad z \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Завдяки (1) і самоспряженості операторів $A_k,\ k \geq 1,$ значення функції $P(z)$ при $z \in \in [0, +\infty)$ є самоспряженими операторами і ця функція є неперервною на $[0, +\infty).$ Тому неперервною на $[0, +\infty)$ є функція $\lambda_{\min}(P(z)).$

Оскільки

$$\lambda_{\min}(P(0)) < 0$$

на підставі (4), (8) та рівності $\lambda_{\min}(P(0)) = \lambda_{\max}(-P(0))$ і

$$\lim_{z \to +\infty} \lambda_{\min}(P(z)) = 1$$

на підставі (8) та рівності $\lim\limits_{z \to +\infty} P(z) = I,$ то за теоремою Коші про проміжне значення [4] існує точка $z_0 \in (0, +\infty)$ така, що

$$\lambda_{\min}(P(z_0)) = 0.$$

Ця рівність означає, що

$$0 \in \sigma(P(z_0)). \tag{9}$$

Покажемо, що нульовий розв'язок рівняння (2) нестійкий.

Завдяки теоремі 3 та (9) існує послідовність нормованих векторів $a_p,\ p \geq 1,$ для якої

$$\lim_{p \to \infty} \big\| P(z_0) a_p \big\|_H = 0. \tag{10}$$

Розглянемо векторні функції $v_p = e^{z_0 t} a_p,\ p \geq 1,$ які є розв'язками відповідно рівнянь

$$v(t) - \sum_{k=1}^{\infty} A_k \int_{-h}^{-1} v(t+\theta)\, d\Upsilon_k(\theta) = e^{z_0 t} P(z_0) a_p, \quad p \geq 1.$$

Далі розглянемо визначені на $[-h,0)$ функції $\varepsilon_p=\varepsilon_p(t),\ p\geq 1,$ такі, що

$$\varepsilon_p(-0)-\sum_{k=1}^{\infty}A_k\int\limits_{-h}^{-1}\varepsilon_p(\theta)\,d\Upsilon_k(\theta)=P(z_0)a_p,\quad p\geq 1,$$

і

$$\lim_{p\to\infty}\sup_{t\in[-h,0)}\|\varepsilon_p(t)\|_H=0. \tag{11}$$

Завдяки (10) такими функціями можуть бути, наприклад, функції

$$\varepsilon_p(t)=\begin{cases}0, & \text{якщо}\quad t\in[-h,-1),\\ (t+1)P(z_0)a_p, & \text{якщо}\quad t\in[-1,0),\end{cases}\qquad p\geq 1,$$

відповідно.

Позначимо через $\gamma_p(t)$ розв'язок задачі

$$\begin{cases}\gamma(t)-\sum_{k=1}^{\infty}A_k\int_{-h}^{-1}\gamma(\theta)\,d\Upsilon_k(\theta)=e^{z_0t}P(z_0)a_p, & t\geq 0,\\ \gamma(\theta)=\varepsilon_p(\theta), & \theta\in[-h,0).\end{cases} \tag{12}$$

Тоді $v_p(t)-\gamma_p(t)$ — розв'язок рівняння (2).

Використовуючи (11) і (12), легко перевірити, що

$$\lim_{p\to\infty}\sup_{t\in[0,T]}\|\gamma_p(t)\|_H=0 \tag{13}$$

для кожного $T>0.$ Оскільки для розв'язків $v_p(t)-\gamma_p(t),\ p\geq 1,$ рівняння (2), очевидно, справджуються співвідношення

$$e^{z_0t}+\|\gamma_p(t)\|_H\geq\left\|e^{z_0t}a_p-\gamma_p(t)\right\|_H\geq e^{z_0t}-\|\gamma_p(t)\|_H$$

для всіх $p\geq 1$ і $t\geq 0,$ то на підставі (13) і того, що $z_0>0,$ нульовий розв'язок рівняння (2) нестійкий. Із довільності вибору в рівнянні (2) операторів $\mathcal{D}_k\in\mathfrak{D}_h,\ k\geq 1,$ і числа $h>1$ випливає абсолютна нестійкість нульового розв'язку цього рівняння.

Теорему 2 доведено.

6. Зауваження та літературні вказівки. 1. Виконання співвідношення (3) не є достатнім для абсолютної нестійкості нульового розв'язку рівняння (2). Це підтверджується прикладом функціонального рівняння

$$x(t)=-\int\limits_{-h}^{-1}x(t+\theta)\,d\Upsilon_1(\theta)-\frac{1}{4}\int\limits_{-h}^{-1}x(t+\theta)\,d\Upsilon_2(\theta),\quad t\geq 0, \tag{14}$$

де $\Upsilon_1(\theta)$ і $\Upsilon_2(\theta)$ — такі функції, що відповідні оператори $\mathcal{D}_1$ і $\mathcal{D}_2$ є елементами множини $\mathfrak{D}_h$ у випадку $H=\mathbb{R}.$

Для коефіцієнтів правої частини рівняння (14) виконується співвідношення

$$\left|-1-\frac{1}{4}\right| = \frac{5}{4} > 1,$$

і тому справджується співвідношення (3). Однак, нульовий розв'язок рівняння (14) не є абсолютно нестійким. Справді, якщо $h > 2$,

$$\Upsilon_1(\theta) = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad \theta = -1, \\ 0, & \text{якщо} \quad \theta \in [-h, -1), \end{cases}$$

і

$$\Upsilon_2(\theta) = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad \theta \in [-2, -1], \\ 0, & \text{якщо} \quad \theta \in [-h, -2), \end{cases}$$

то рівняння (14) набуває вигляду

$$x(t) = -x(t-1) - \frac{1}{4}\,x(t-2), \quad t \geq 0.$$

Нульовий розв'язок цього рівняння експоненціально стійкий, оскільки корені z_1 і z_2 відповідного характеристичного рівняння

$$z^2 + z + \frac{1}{4} = 0$$

збігаються з числом $-\frac{1}{2}$, абсолютне значення якого менше 1 [5].

2. Поняття $\mathfrak{D}_h$-нестійкого розв'язку функціонального рівняння розглянуто вперше, і теореми 1 і 2 про $\mathfrak{D}_h$-нестійкість при всіх $h > 1$ нульового розв'язку функціонального рівняння (2) є новими. Ці теореми аналогічні відповідним твердженням про абсолютну нестійкість розв'язків лінійних різницевих рівнянь зі самоспряженими операторними коефіцієнтами [6] і тісно пов'язані із задачами про абсолютну стійкість та нестійкість розв'язків диференціально-різницевих рівнянь, що розв'язувалися в [7 – 21] та інших працях.

Література

1. *Морен К.* Методы гильбертова пространства. – М.: Мир, 1965. – 571 с.
2. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. – М.: Наука, 1965. – 520 с.
3. *Садовничий В. А.* Теория операторов. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986. – 368 с.
4. *Дороговцев А. Я.* Математический анализ. Краткий курс в современном изложении. – Изд. 2-е. – Киев: Факт, 2004. – 560 с.
5. *Слюсарчук В. Ю.* Нестійкість розв'язків еволюційних рівнянь. – Рівне: Вид-во Нац. ун-ту вод. госп-ва та природокористування, 2004. – 416 с.
6. *Слюсарчук В. Ю., Слюсарчук Л. М.* Умови абсолютної нестійкості розв'язків різницевих рівнянь зі самоспряженими операторними коефіцієнтами // Нелін. коливання. – 2019. – **22**, № 1. – С. 118 – 129.
7. *Репин Ю. М.* Об условиях устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений при любых запаздываниях // Уч. зап. Урал. ун-та. – 1960. – С. 34 – 41.
8. *Гоздек В. С.* О галопировании тележек шасси при движении самолета по грунтовому аэродрому // Инж. журн. – 1965. – Вып. 4. – С. 743 – 745.

9. *Животовский Л. А.* Абсолютная устойчивость решений дифференциальных уравнений с несколькими запаздываниями // Тр. семинара по теории дифференц. уравнений с отклоняющимся аргументом. – 1969. – **23**. – С. 919 – 928.
10. *Слюсарчук В. Е.* Достаточные условия абсолютной асимптотической устойчивости линейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве с несколькими запаздываниями // Мат. заметки. – 1975. – **17**, № 6. – С. 919 – 923.
11. *Слюсарчук В. Е.* Об абсолютной устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве с запаздываниями // Мат. заметки. – 1975. – **18**, № 2. – С. 161 – 165.
12. *Слюсарчук В. Е.* Абсолютная асимптотическая устойчивость линейных дифференциальных уравнений с бесконечным числом запаздываний в банаховом пространстве // Дифференц. уравнения. – 1976. – **12**, № 5. – С. 840 – 847.
13. *Слюсарчук В. Е.* К вопросу об устойчивости решений бесконечных систем дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1976. – **12**, № 11. – С. 2019 – 2026.
14. *Слюсарчук В. Е.* К вопросу об абсолютной устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений запаздывающего типа в банаховом пространстве // Дифференц. уравнения. – 1978. – **14**, № 8. – С. 1526 – 1528.
15. *Слюсарчук В. Е.* Необходимые и достаточные условия абсолютной экспоненциальной устойчивости решений линейных скалярных дифференциальных уравнений нейтрального типа // Пробл. совр. теории период. движений. – 1982. – № 6. – С. 19 – 24.
16. *Слюсарчук В. Е.* Абсолютно устойчивые системы с запаздыванием // Дифференц. уравнения. – 1988. – **24**, № 8. – С. 1364 – 1373.
17. *Кореневский Д. Г.* Коэффициентный критерий абсолютной (не зависящей от отклонения аргумента) устойчивости систем линейных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа // Мат. физика и нелин. механика. – 1989. – Вып. 12. – С. 16 – 22.
18. *Слюсарчук В. Ю.* Абсолютна стійкість динамічних систем із післядією. – Рівне: Вид-во Нац. ун-ту вод. госп-ва та природокористування, 2003. – 366 с.
19. *Слюсарчук В. Ю.* Умови абсолютної нестійкості розв'язків диференціально-різницевих рівнянь // Нелін. коливання. – 2007. – **7**, № 3. – С. 430 – 436.
20. *Kovalev A. M., Martynyuk A. A., Boichuk O. A., Mazko A. G., Petryshyn R. I., Slyusarchuk V. Ye., Zuyev A. L., Slyn'ko V. I.* Novel qualitative methods of nonlinear mechanics and their application to the analysis of multifrequency oscillations, stability and control problems // Nonlinear Dyn. Syst. Theory. – 2009. – **9**, № 2. – P. 117 – 145.
21. *Слюсарчук В. Ю.* Необхідні та достатні умови абсолютної нестійкості розв'язків лінійних диференціально-різницевих рівнянь зі самоспряженими операторними коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2018. – **70**, № 5. – С. 715 – 724.

Одержано 05.07.18