УДК 517.956

# О РЕЛАКСАЦИОННЫХ МОДЕЛЯХ ПЕРЕНОСА

**Ж. О. Тахиров**

*Ин-т математики АН Республики Узбекистан*
*ул. М. Улугбека, 81, Ташкент, 100125, Узбекистан*
*e-mail: prof.takhirov@yahoo.com*

We study a new mathematical model of locally nonequilibrium processes of heat, mass, and momentum transfer taking into account relaxational phenomena on the basis of hyperbolic and parabolic equations. A method for establishing a priori Schauder-type estimates is proposed. The unique solvability of the problem with inner-boundary nonlocal conditions is proved.

Вивчається нова математична модель локально-нерівноважних процесів переносу тепла, маси та імпульсу з урахуванням релаксаційних явищ на основі рівнянь гіперболічних і параболічних типів. Пропонується спосіб установлення апріорних оцінок шаудерівського типу. Доведено однозначну розв'язність задачі з внутрішньо-граничними нелокальними умовами.

**1. Введение.** Классическая теория процессов переноса опирается на приближения локального термодинамического равновесия и сплошной среды. Принцип локальности, используемый при построении как классической термодинамики необратимых процессов, так и многих других термодинамических теорий, предполагает, что основные законы механики справедливы не только для системы в целом, но и для каждой из ее частей, какой бы малой она ни была.

В последние годы ввиду необходимости математического описания различных физических процессов в экстремальных условиях возрос интерес к изучению различного рода локально-неравновесных систем и процессов переноса (энергии, массы, импульса или их аналогов) в них.

Экстремальные условия — воздействие сверхкоротких концентрированных потоков энергии на вещество, высокий уровень градиентов и потоков переноса (в ударных волнах), большие характерные скорости или малые характерные времена процессов, низкие температуры, процессы в дисперсных системах — приводят к локально-неравновесному характеру протекания различных явлений.

В этих случаях время релаксации системы к локальному равновесию сравнимо с характерным временем самого процесса.

Существуют различные направления описания локально-неравновесных процессов переноса: термодинамические [1], кинетические [2], молекулярно-динамические [3], феноменологические [4] и др.

Одной из наиболее последовательных и детально разработанных термодинамических теорий, не опирающихся на принцип локального равновесия и учитывающих также пространственную нелокальность процессов переноса, является так называемая расширенная необратимая термодинамика (РНТ) [5]. Для описания состояния системы вдали от локального равновесия РНТ использует в качестве новых независимых переменных диссипативные потоки, т. е. поток тепла $q$, поток массы $J$ и тензор напряжения $P$. Таким образом, в локально-неравновесной системе энтропия $S$ является функцией не только классических переменных, но и диссипативных потоков. Если в системе существует какой-либо поток, то это означает направление движения носителей тепла или массы, т. е. такая система более упорядочена по сравнению с системой, в которой потоки отсутствуют. Включение диссипативных потоков в ряд независимых переменных приводит к тому, что эти потоки уже не определяются градиентом соответствующего потенциала переноса, а являются решениями эволюционных уравнений. Эти уравнения описывают процесс релаксации диссипативных потоков к своим локально-равновесным значениям.

Последовательное введение потоков высокого порядка приводит к иерархии уравнений для теплового потока, которая учитывают различные степени отклонения системы от локального термодинамического равновесия, а также к пространственно нелокальным эффектам.

Введение теплового потока $q$ в ряд независимых переменных и появление, как следствие, релаксационного члена в законе Максвелла – Каттанео [6] приводят к уравнению теплопроводности гиперболического типа.

Уравнение теплопроводности гиперболического типа сочетает в себе свойства как классического уравнения теплопроводности, описывающего чисто диссипативный способ передачи энергии, так и волнового уравнения, описывающего распространение незатухающих волн [7].

В [6] предложена формула для теплового потока $q$:

$$q = -kT_x - \tau q_t, \tag{1}$$

на основе которой получено гиперболическое уравнение теплопроводности

$$T_t + \tau T_{tt} = aT_{xx}, \tag{2}$$

где $k$ — коэффициент теплопроводности, $\tau$ — время релаксации теплового потока.

Исследованию различных краевых задач для (2) посвящено большое число работ (см., например, [8, 9]). Оказывается, и оно не обеспечивает адекватного описания реальных процессов. Например, решения описывают скачки температуры, что означает возникновение изотерм внутри исследуемой среды. Наблюдаются бесконечные тепловые потоки на фронте волны, а также появляются отрицательные температуры в обратной тепловой волне [10].

Следуя [10], проанализируем вывод новой модели локально-неравновесного теплопереноса с учетом релаксационных явлений.

Классический закон Фурье $q = -KT_x$ модифицируется и представляется в виде линейной комбинации производных теплового потока и скалярной величины градиента температуры по степеням малых параметров коэффициентов релаксации $\tau_1$ и $\tau_2$:

$$q + \tau_1 q_t + \tau_2^2 q_{tt} + \ldots = -K\big(T_x + \tau_1 T_{xx} + \tau_2^2 T_{xtt} + \ldots\big). \tag{3}$$

Комбинируя (3) с уравнением теплового баланса

$$c\rho T_t = -q_x, \tag{4}$$

получаем различного вида дифференциальные уравнения локально-неравновесного теплообмена. Если ограничиться двумя членами в правой и левой частях соотношения (3), то формула для теплового потока (с учетом релаксации как теплового потока, так и градиента температуры) принимает вид

$$q = -KT_x - K\tau T_{xt} - \tau q_t. \tag{5}$$

Оказывается, экспериментальные расчеты утверждают, что формула (5) не приводит к скачкам теплового потока и отрицательным его значениям. Комбинируя формулы (4) и (5), выводим гиперболическое уравнение

$$T_t + \tau T_{tt} = a(T_{xx} + \tau T_{xtt}). \tag{6}$$

Учет слагаемого с производной третьего порядка в (6) приводит к существенному не только количественному, но и качественному отличию получаемых результатов.

Аналогичные уравнения получены в некоторых работах (см., например, [11, 12]) при изучении движения жидкости.

Известно, что математические модели локально-неравновесного переноса не всегда согласуются между собой. Это говорит об отсутствии единого математического аппарата исследования. Следовательно, по мнению авторов, сами модели процессов требуют окончательного построения, детального математического обоснования и экспериментального подтверждения.

**2. Постановка задачи. Предварительные результаты.** В данной работе предлагается новый подход исследования модели и построения решения задачи для (6).

1. $a,\ \tau$ — постоянные положительные числа.

Введя новую функцию

$$T(t,x) + \tau T_t(t,x) = u(t,x), \tag{7}$$

получим из (6) параболическое уравнение для $u(x,t)$:

$$u_t(t,x) = u_{xx}(t,x). \tag{8}$$

Если для (6) заданы начально-краевые условия, то с помощью (7) легко восстанавливаются необходимые условия для $u(x,t)$. Полученные начально-краевые задачи для (8) аналитически решаются в [13].

Чтобы найти $T(x,t)$, рассматривается задача

$$\begin{cases} T(t,x) + \tau T_t(t,x) = u(t,x), \\ T(0,x) = T_0(x). \end{cases}$$

Ее решение имеет вид

$$T(t,x) = T_0(x)e^{\frac{t}{\tau}} + \int\limits_0^t e^{-(t-\eta)\frac{1}{\tau}}\, u(\eta,x)d\eta.$$

2. Изложенный выше подход можно применять при исследовании краевых задач для нелинейных уравнений специального вида.

Сначала задача сводится к нелинейной параболической задаче, далее с помощью априорных оценок доказывается однозначная разрешимость параболической задачи и тем самым первоначальной гиперболической задачи.

В области $Q = \{(t,x)\colon -l < x < l,\ 0 < t < t_0\}$ рассмотрим задачу с внутренне граничными нелокальными условиями для нелинейного гиперболического уравнения вида

$$T_t + \tau T_t = a\,(t, x, T + \tau t_t, T_x + \tau T_{tx}, T_{xx} + \tau T_{txx}), \quad (t,x) \in Q, \tag{9}$$

с начально-краевыми условиями

$$T(x,0) = 0, \qquad T_t(x,0) = 0, \quad -l \le x \le l, \tag{10}$$

$$T(t,-l) = m_1 T(t_1 - l_0), \qquad T(t,l) = m_2 T(t,l_0), \quad 0 \le t \le t_0. \tag{11}$$

С учетом (7) из (9) – (11) получим параболическую задачу

$$u_t = a(t,x,u,u_x,u_{xx}), \quad (t,x) \in Q, \tag{12}$$

$$u(0,x) = 0, \quad -l \le x \le l, \tag{13}$$

$$u(t,-l) = m_1 u(t_1 - l_0), \qquad u(t,l) = m_2 u(t,l_0), \quad 0 \le t \le t_0. \tag{14}$$

Предполагается, что выполнены следующие условия:

А. Условие параболичности: для $(t,x) \in Q,\ |u| \le M$ и любых $p$ и $r$

$$a_r(t,x,u,p,r) \ge a_0 > 0,$$

причем функция $a_r$ непрерывна по $r$.

Б. Условие подчинения младших членов: для $(t,x) \in Q,\ |u| \le M$ и произвольных действительных $\xi$

$$\pm a(t,x,u,\xi + g(t), \mp K\xi^2) \le H, \qquad K > 0, \quad H > 0.$$

В. Положительные постоянные $\delta,\ l_0,\ m_i,\ i = 1,2,$ удовлетворяют неравенствам $0 < l_0 \le \le l - 2\delta,\ m_i \le 1,\ i = 1,2.$

Основные начально-краевые задачи для (12) в классической постановке изучены в работах [14, 15]. В [14] изучены первая, вторая краевые задачи и задача Коши. В многомерном случае первая краевая задача исследована в [15]. Имеются существенные результаты по квазилинейным уравнениям [16]. В силу многочисленных приложений о основном сильно развиваются теория квазилинейных параболических уравнений и систем (см., например, работы [17 – 20]).

Если $m_i = 0$, то получаем первую краевую задачу, исследованную в [14]. Поэтому предполагаем, что $m_i \ne 0$.

Приведем некоторые известные результаты из [14], которые используются в дальнейшем.

**Теорема 1.** *Пусть функция $u(t,x)$ непрерывна в $Q$ вместе с производной $u_x(t,x)$ и удовлетворяет уравнению (12) всюду в $Q$, кроме, может быть, точек оси $t\colon 0 \le t \le T,\ x = 0$. Пусть также $|u(t,x) \le M$ и $\sup_Q |u_{xx}| < \infty$. Тогда для*

$$(t,x) \in Q^\delta = \big\{(t,x)\colon 0 < \delta \le t \le t_0,\ \delta - l \le x \le l - \delta\big\}$$

*имеем*

$$|u_x(t,x)| \le C(M, a_0, K, H, \delta). \tag{15}$$

**Теорема 2.** *Пусть в условиях теоремы 1* $u(0,x) \equiv 0$ *или* $u(t,l) \equiv 0$. *Тогда оценка (15) выполняется, соответственно, в* $Q_0^\delta = \{(t,x)\colon 0 \le t \le t_0, |x| \le l - \delta\}$ *или в* $Q_\delta^+ = \{(t,x)\colon 0 < \delta \le t \le t_0,\ \delta - l \le x \le l\}$. *Если же* $u|_\gamma = 0$, *то для* $(t,x) \in Q$ *имеем*

$$|u_x(t,x)| \le C(M, a_0, K, H).$$

Предполагается, что функция $a(t,x,u,p,r)$ удовлетворяет одному из следующих условий:

В. Для $(t,x) \in Q,\ |u| \le M,\ |p| \le p_0$ и произвольных $r$

$$|a_x(t,x,u,p,r)| + |a_n(\ldots)| + |ra_p(\ldots)| \le K_0 a_r(\ldots)\left(r^2+1\right),$$

а если еще и $|r| \le r_0$, то $|a_t(\ldots) + a_r(\ldots)| \le K_1$.

В$^*$. Для $(t,x) \in Q,\ |u| \le M,\ |p| \le p_0$ и произвольных $r$

$$\begin{cases} |a_x(\ldots)| \le K_0 a_r(\ldots)\left(r^2+1\right), \\ |a_t(\ldots)| \le K_0 a_r(\ldots)\left(|r|^{2+\varepsilon}+1\right), \\ |a_u(\ldots)| \le K_0 a_r(\ldots)\left(|r|^{1+\varepsilon}+1\right), \quad \varepsilon < 1, \end{cases}$$

и если еще $|r| \le r_0$, то $|a_p(\ldots) + a_r(\ldots)| \le K_1$.

Далее, предполагается, что функция $a(t,x,u,p,r)$ в (12) имеет первые производные, удовлетворяющие условию Гельдера на любом компакте.

**Теорема 3.** *Пусть функция* $u(t,x)$ *является решением уравнения (12), удовлетворяющего условиям А – В. Пусть* $|u(t,x)| \le M$ *и* $u(x,0) \equiv 0$. *Тогда*

$$|u|_{2+\gamma}^{Q_0^{2\delta}} \le C. \tag{16}$$

**3. Априорные оценки и глобальная разрешимость.**

**Лемма 1.** *Пусть функция* $a(t,x,u,p,r)$ *имеет производные по* $u,\ p,\ r$ *внутри* $Q$ *и для* $(t,x) \in Q$ *и произвольных* $u(t,x)$ *выполнены неравенства*

$$a_u(t,x,u,0,0) \le a_2, \qquad |a(t,x,0,0,0)| \le a_1.$$

*Тогда для решения задачи (12) – (14) справедлива оценка* $|u| \le M$.

***Доказательство.*** Перепишем уравнение (1) в виде

$$u_t = A_1 u_{xx} + A_2 u_x + A_3 u + f(t,x), \qquad 0 < t \le T, \quad |x| < l,$$

где

$$A_1(t,x,u,p,r) = \int_0^1 a_r(t,x,u,p,\tau r)d\tau,$$

$$A_2(t,x,u,p)=\int\limits_0^1 a_p(t,x,u,p,\tau p,0)d\tau,$$

$$A_3(t,x,u)=\int\limits_0^1 a_u(t,x,u\tau,0,0)d\tau,\quad f(t,x)=a(t,x,0,0,0).$$

Введем функцию $v(t,x)=e^{-mt}u(t,x),\ m>0,$ удовлетворяющую уравнению

$$(m-A_3)\,v+v_t=A_1v_{xx}+A_2v_x+fe^{-mt}. \tag{17}$$

Умножив (17) на $v(t,x),$ получим

$$(m-A_3)v^2+v_tv=A_1v_{xx}v+A_2v_xv+fe^{-mt}v. \tag{18}$$

Пусть $|v|$ принимает максимальное значение, отличное от нуля в некоторой внутренней точке. В точке положительного максимума и отрицательного минимума $vu_{xx}\le 0,\ v_x=0,$ $v_tv\ge 0.$

Следовательно, из (18) имеем

$$|v|\le\frac{\max_Q|f(t,x)|}{m-A_3},\quad m-A_3>0.$$

В силу нелокальных условий (14) и обозначении $u=e^{mt}v$ в области $Q$ находим

$$|u|\le\frac{\max|f(t,x)|e^{mT}}{m-a_2}\le\frac{a_1e^{mT}}{m-a_2}=M.$$

Лемма 1 доказана.

**Теорема 4.** *Пусть выполнены условия теорем 1 и 3 (формулы (15), (16)) и* $l_0<l-2\delta.$ *Тогда для* $(t,x)\in Q$ *справедлива оценка*

$$|u_x(t,x)|\le C(M,a_0,K,H). \tag{19}$$

***Доказательство.*** Достаточно малое число $\delta$ выбирается таким, что $0\le l_0<l-2\delta.$ Тогда в силу нелокальных условий (14) и оценки (16) получим гельдеровость функции $u_t(t\pm l)$ по $t$ с показателем $\gamma.$ Так как оценка для $|u_x|$ в области $Q_0^{2\delta}$ имеется, то мы должны оценить $|u_x|$ в областях

$$Q_+^*=\big\{(t,x)\colon 0\le t\le T,\ l-2\delta\le x\le l\big\},$$

$$Q_-^*=\big\{(t,x)\colon 0\le t\le T,\ l\le x\le -l+2\delta\big\}.$$

Выполним это сначала для области $Q_+^*.$ В задаче (12)–(14) произведем замену

$$v(t,x)=u(t,x)-g_1(t,x), \tag{20}$$

где

$$g_1(t,x)=\frac{(l-x)}{2\delta}\,u(t,l-2\delta)+\frac{(x-l+2\delta)}{2\delta}\,u(t,l).$$

С учетом (20) находим

$$v_x(t,x) = u_x(t,x) - g_2(t),$$

$$v_{xx}(t,x) = u_{xx}(t,x),$$

$$v_t(t,x) = u_t(t,x) - g_3(t,x),$$

где

$$g_2(t) = \frac{1}{2\delta}\left(u(t,l) - u(t,l-2\delta)\right),$$

$$g_3(t) = g_{1t}(t,x).$$

Уточним гладкости функций $g_i,\ i=\overline{1,3}$. В силу (16) и гельдеровости $u_t(t,l-2\delta),\ u_t(t,l)$ можем утверждать, что функции $g_i(t,x),\ i=1,2,$ имеют производную по $t,$ удовлетворяющую условию Гельдера, а по переменной $x$ они линейны. Функция $g_3(t,x)$ ограничена, по $t$ удовлетворяет условию Гельдера, а по $x$ линейна.

Для функции $v(t,x)$ в области $Q_+^*$ получим задачу

$$v_t = a(t,x,u,v_x+g_2(t),v_{xx}) - g_3(t,x) = \widehat{a}(t,x,v,v_xv_{xx}), \tag{21}$$

$$v(0,x)=0, \qquad v(t,l-2\delta)=0, \qquad v(t,l)=0. \tag{22}$$

К задаче (21), (22) применима теорема 2. Имеем

$$|v_x| \le C, \quad (t,x)\in Q_+^*, \tag{23}$$

Следовательно,

$$|u_x| \le C, \quad (t,x)\in Q_+^*.$$

В области $Q_+^*$ замена имеет вид

$$v(t,x) = u(t,x) - \frac{(l+x)}{2\delta}\,u(t,-l+2\delta) - \frac{(x+l-2\delta)}{2\delta}\,u(t,-l).$$

Аналогично устанавливается оценка

$$|u_x| \le C, \quad (t,x)\in Q_-^*. \tag{24}$$

Оценки (23), (24) вместе с оценкой (16) дают оценку (19).

Теорема 4 доказана.

**Теорема 5.** *Пусть выполнены условия $A,\ B$ и $B^*$. Пусть также $u(t,x)$ — решение уравнения (12), $|u(t,x)|\le M$ и выполнены граничные условия (13), (14). Тогда*

$$|u|_{2+\gamma}^{Q} \le C.$$

***Доказательство.*** Из оценки (19) следует, что $|u_x(t,x)| \le p_0$ в $Q$. Учитывая, что $|u_t(t,\pm l)| \le C,$ получаем $|u_{xx}(t,\pm l)| \le C.$ Действительно, переписав уравнение (12) в виде

$$u_t = a_r(t,x,u,p,\bar{r})u_{xx} + a(t,x,u,p,0),$$

находим
$$|u_{xx}(t,\pm l)| \le \frac{|u_t(t,\pm l)| + |a(t,x,u,p,0)|}{a_0} \le C.$$
Следовательно, $\max |u_{xx}| \le C$. Далее, как и в доказательстве теоремы 8 работы [14], находим
$$\max_Q |u_{xx}| \le C.$$

Рассмотрим теперь функцию $s = u_t (|s| \le s_0 = \mathrm{const})$, которая удовлетворяет в $Q$ линейному уравнению
$$s_t - a(t,x)s_{xx} + b(t,x)s_x = f(t,x), \tag{25}$$
где $a_0 \le a \le a_1,\ |b| \le b_0,\ |f| \le f_0$. Так как $u(t,x)$ удовлетворяет условиям (14), то
$$s(t,-l) = m_1 s(t_1 - l_0), \qquad s(t,l) = m_2 s(t,l_0). \tag{26}$$

Функция $s(t,x) \equiv ts(t,x)$ удовлетворяет уравнению (25) с правой частью $\bar f = tf(t,x) + s(t,x),\ |\bar f| \le Tf_0 + s_0$ и условиям (26), $\bar s(0,x) \equiv 0$. По теореме 4 $|\bar s_x| \le C$ в $Q$ и, следовательно,
$$|s_x(t,x)| \le \frac{c}{t}.$$

Из уравнения (12) $s(0,x) \equiv a(0,x,0,0,0)$, а значит,
$$|s(0,x_1) - s(0,x_2)| \le K_0 K_1 |x_1 - x_2|.$$

Далее, как и в доказательстве теоремы 8 работы [14], имеем $|u_t|^Q_{\frac16} \le C$. Теперь, чтобы получить оценку $|u|^Q_{1+\gamma} \le C$, поступаем следующим образом. Рассмотрим в области $Q^*_+$ задачу для линейного уравнения
$$u_t = a(t,x)u_{xx} + f(t,x),$$
$$u(0,x) = 0, \quad l - 2\delta \le x \le l.$$
Далее, как и в доказательстве теоремы 4, произведя замену $v = u(t,x) - g_1(t,x)$ (см. (20)), получим задачу
$$v_t = a(t,x)v_{xx} + \bar f(t,x), \tag{27}$$
$$v(0,x) = 0, \tag{28}$$
$$v(t,l) = 0, \qquad v(t,l-2\delta) = 0, \tag{29}$$
где
$$a_0 \le a(t,x) \le a_1, \qquad \bar f(t,x) = f(t,x) - g_3(t,x), \qquad |\tilde f| \le \tilde f_0.$$

Применяем к задаче (27) – (29) результаты для линейных уравнений:
$$|v|^{Q^*_+}_{1+\gamma} \le C.$$

Так как $\big|g_1(t,x)\big|^{Q}_{1+\gamma} \le C$, то

$$|u|^{Q^*_+}_{1+\gamma} \le C.$$

Тогда из последнего неравенства

$$|u_{xx}|^{Q^*_+}_{\gamma} \le C.$$

Точно такие же оценки справедливы и в области $Q^*_-$. Все эти оценки вместе дают утверждение теоремы 5.

**Теорема 6.** *Пусть выполнены условия теоремы 5, функция* $a(t,x,u,p,r)$ *имеет непрерывные производные, удовлетворяющие условию Гельдера на любом замкнутом множестве своих аргументов, и выполнены условия согласования*

$$a\big(0,(-1)^i,l,0,0,0\big) = m_i a\big(0,(-1)^i,l_0,0,0,0\big), \quad i = 1,2.$$

*Тогда в* $Q$ *существует единственное решение* $u(t,x) \in C^{2+\alpha}(Q)$ *задачи (12)–(14) (*$T(x,t)$ *для задачи (9)–(11)).*

***Доказательство.*** Сначала исследуется задач (12)–(14). Отметим, что единственность вытекает из принципа экстремума. Обозначим через $H^{2+\beta}$, $\beta \in (0,1)$, банахово пространство функций $u(t,x)$ на $Q$, удовлетворяющих граничным условиям (13), (14) и непрерывных вместе со своими ограниченными производными с нормой

$$|u|^{Q}_{H^{2+\beta}} = |u|^{Q}_{\beta} + |u_x|^{Q}_{\beta} + |u_{xx}|^{Q}_{\beta}.$$

Рассмотрим следующую задачу относительно функции $v(t,x)$:

$$v_t = (1-\tau)v_{xx} + \tau q v_{xx} + \tau[a(t,x,u,u_x,u_{xx}) - q u_{xx}], \tag{30}$$

$$v(0,x) = 0, \tag{31}$$

$$v(t,-l) = m_1 v(t,-l_0), \qquad v(t,l) = m_2 v(t,l_0), \quad 0 \le \tau \le 1, \tag{32}$$

где $q > 1$ — постоянная, $u \in H^{2+\beta}$. Эта задача определит в $H^{2+\beta}$ оператор

$$v = F(u;\tau).$$

Его неподвижные точки при $\tau = 1$ являются решениями задачи (12)–(14).

Неподвижные точки $u^\tau$ — решение задачи

$$u^\tau = \tau a\big(t,x,u^\tau,u^\tau_x,u^\tau_{xx}\big) + (1-\tau)u^\tau_{xx} \tag{33}$$

с условиями (13), (14).

Уравнение (33) удовлетворяет всем условиям доказанных выше теорем, в которых были установлены априорные оценки для решения задачи (12)–(14).

Действительно, проверим выполнение условий А, Б:

А) здесь $\tilde a = \tau a + (1-\tau)u_{xx}$,

$$\tilde a_r = \tau a + (1-\tau) \ge \tilde a_0 > 0;$$

Б) в этом случае

$$\pm\tilde{a}\left(t,x,u,\xi+g(t),\mp K\xi^2\right)=\pm\tau a\left(t,x,u,\xi+g(t),\mp K\xi^2\right)\pm(1-\tau)\left(\mp K\xi^2\right)=$$

$$=\pm\tau a\left(t,x,u,\xi+g(t),\mp K\xi^2\right)-(1-\tau)K\xi^2\le H.$$

Докажем выполнение всех условий принципа Лерэ – Шаудера. Равномерная ограниченность в норме $H^{2+\beta}$ всех возможных решений $u^\tau$ задачи (33), (13), (14) устанавливается по результатам для линейных уравнений. Если функция $a(t,x,u,p,r)$ удовлетворяет условию Гельдера по $t$ с показателем $\dfrac{\beta}{2}$, по $x$ с показателем $\beta$, а по остальным аргументам непрерывно дифференцируема, то свободный член в (30) удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\beta$. Тогда $|u|_{2+\beta}^Q\le C$.

Теперь докажем непрерывность $F(u;\tau)$ по $u$ в $H^{2+\beta}$ для любого фиксированного $\tau$. Выбирая два близких элемента $u_1$ и $u_2$ из $H^{2+\beta}$ и соответствующие им $v_1$ и $v_2$, находим

$$|u|_{2+\beta}^Q\le|v|_{2+\beta}^Q\le N_1|u_1-u_2|_{H^{2+\beta}}.$$

Аналогично доказывается непрерывность $F(u;\tau)$ по $\tau$. Действительно, пусть $\tau_1$ и $\tau_2$ соответствуют $v_1,\ v_2$, а $u(t,x)\in H^{2+\beta}$. Для $v=v_1-v_2$ получаем задачу с граничными условиями (31), (32) для уравнения $v_t=A_0v_{xx}+A_1(t,x)(\tau_1-\tau_2)$.

Отсюда для линейных уравнений имеем

$$|v|_{2+\beta}^Q\le N_2|\tau_1-\tau_2|.$$

Для того чтобы доказать, что $F(u;\tau)$ — вполне непрерывное преобразование любого фиксированного $\tau$, сначала докажем лемму 2.

**Лемма 2.** *Пусть* $\tau\in[0,1],\ u(t,x)$ *принадлежит* $C^{2+\beta}(Q)$ *и удовлетворяет уравнению*

$$u_t=\tau a\left(t,x,u,u_x,u_{xx}\right)+(1-\tau)u_{xx}. \tag{34}$$

*Тогда* $u_t\in C^{2+\beta}(Q),\ u_{xxx}\in C^{\beta}(Q)$.

***Доказательство.*** Рассмотрим в $Q\cap\{T-h\}$ функцию

$$u^h(t,x)=\frac{1}{h}\left[u(t+h,x)-u(t,x)\right],$$

$h>0$ — достаточно малое число. Возьмем от обеих частей уравнения (34) разностное отношение по $t$:

$$u^h(t,x)=(1-\tau)u^h_{xx}+\frac{\tau}{h}\int\limits_0^1\frac{d}{d\eta}\,a\Big[t+h,x,\eta u(t+h,x)+(1-\eta)u(t,x),$$

$$\eta u_x(t+h,x)+(1-\tau)u_x(t,x)\eta u_{xx}(t+h,x)+(1-\tau)u_{xx}(t,x)\Big]d\eta+$$

$$+\frac{\tau}{h}\big[a(t+h,x,u(t,x),u_x(t,x),u_{xx}(t,x))-a(t,x,u(t,x),u_x(t,x),u_{xx}(t,x))\big].$$

Далее это уравнение представим в следующей форме:

$$u_t^h(t,x) = (1-\tau)u_{xx}^h + \left(\tau\int\limits_0^1 a_r(\ldots)d\eta\right)u_{xx}^h +$$

$$+\left[\tau\int\limits_0^1 a_p(\ldots)d\eta\right]u_x^h + \left[\tau\int\limits_0^1 a_u(\ldots)d\eta\right]u^h + a^h, \tag{35}$$

функция $u^h(t,x)$ удовлетворяет условиям (13), (14).

Уравнение (35) может быть рассмотрено как линейное параболическое уравнение относительно $u^h(t,x)$ с коэффициентами и свободным членом, удовлетворяющими условию Гельдера. Из теории линейных уравнений следует, что при достаточно малых $h$ норма $u^h(t,x)$ в $C^{2+\beta}$ ограничена постоянной, не зависящей от $h$. Полагая $h\to 0$, отсюда заключаем, что $u_t \in C^{2+\beta}(Q)$.

Второе утверждение леммы доказано в теореме 13 работы [13] (гл. III).

Лемма 2 доказана.

Отсюда вытекает, что постоянные Гельдера по $(t,x)\in Q$ первого порядка функций $u_{xx},\ (v_{xx})$ ограничены, т. е. $|u|_{2+1}^Q$.

Используя этот результат, можем заключить, что $|v(t,x)|_{2+1}^Q \le C$, а множество таких $v$ компактно в $H^{2+\beta}$. При $\tau = 0$ задача (33), (13), (14) имеет единственное решение.

Таким образом, все условия принципа Лерэ – Шаудера выполнены. Следовательно, задача (9) – (11), (12) – (14) имеет решение и при $\tau = 1$.

Теорема 6 доказана.

### Литература


1. *Петров Н., Бракнос И.* Современные проблемы термодинамики. – М.: Мир, 1986. – 288 с.
2. *Bubnov V. A.* More concepts in theory of heat // Int. J. Heat Mass Transfer. – 1976. – **19**. – P. 175 – 184.
3. *Nunziato J. W.* On the heat conduction in materials with memory // Quart. Appl. Math. – 1971. – **29**. – P. 187 – 204.
4. *Соболев С. Л.* Автоволны в локально-неравновесных средах (средах с памятью) // Препринт ОНХФ АН СССР. – Черноголовка, 1989.
5. *Eu B. C.* Kinetic theory and nonequilibrium thermodynamics. – New York: Wiley, 1992.
6. *Лыков А. В.* Тепломассообмен (справ.). – М.: Энергия, 1978. – 480 с.
7. *Леванов Е. И., Сотский Е. Н.* Теплоперенос с учетом релаксации теплового потока // Математическое моделирование. – М.: Наука, 1987. – С. 155 – 190.
8. *Fusi L., Farina A.* On the solution of a hyperbolic one-dimensional free boundary problem for a Maxwell fluid // Adv. Math. Phys. – 2011. doi: 10.1155/2011/606757
9. *Mollica F. et al.* Modelling of biological materials. – Birkhäuser Basel, 2007. – 358 p.
10. *Кудинов В. А.* Математическое моделирование локально-неравновесных процессов переноса теплоты, массы, импульса с учетом релаксационных явлений: Автореф. дис. д-ра физ.-мат. наук. – Самара, 2017.
11. *Oldroyd J. G.* On the formulation of rheological equations of state // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. – 1950. – **200**. – P. 523 – 541.
12. *Fusi L., Farina A.* Pressure-driven flow of a rate type fluid with stress threshed in an infinite channel // Int. J. Nonlinear Mech. – 2011. doi: 10.1016/j/ijnonlinmec.2011.04.015

13. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – М.: Мир, 1968. – 428 с.

14. *Кружков С. Н.* Нелинейные параболические уравнения с двумя независимыми переменными // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1967. – **16**. – С. 329 – 346.

15. *Крылов Н. В.* Нелинейные эллиптические и параболические уравнения второго порядка. – М.: Наука, 1985. – 374 с.

16. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.

17. *Amann H.* Linear and quasilinear parabolic problems. – Birkhäuser Basel, 1995. – 338 p.

18. *Leung A. W.* Nonlinear systems of partial differential equations: Applications to life and physical sciences. – World Sci., 2009. – 544 p.

19. *Pao C. V.* Nonlinear parabolic and elliptic equations. – Boston, MA: Springer, 1992. – 777 p.

20. *Губин А. И., Малая Ю. А.* Математическое моделирование тепловых процессов при лазерной обработке материалов на основе нелинейного гиперболического уравнения теплопроводности // Технічна теплофізика та промислова теплоенергетика. – 2011. – Вип. 3. – С 72 – 84.

*Получено 14.06.19*