УДК 517.9

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ*

С. М. Чуйко, Е. В. Чуйко, Я. В. Калиниченко

Донбас. держ. пед. ун-т
вул. Генерала Батюка, 19, Слов'янськ, 84116, Україна
e-mail: chujko-slav@ukr.net
kalinichenkoddpu@ukr.net

We establish constructive conditions for the solvability of the linear boundary-value problem for a system of difference-algebraic equations and develop a scheme for the construction of solutions of this problem. We obtain sufficient conditions for the reducibility of the difference-algebraic system to a sequence of systems uniting difference and algebraic equations. We propose an original classification and a unified scheme for constructing solutions of the difference-algebraic boundary-value problem.

Знайдено конструктивні умови розв'язності та розроблено схему побудови розв'язків лінійної крайової задачі для системи різницево-алгебраїчних рівнянь. Отримано достатні умови зведення різницево-алгебраїчної системи до послідовності систем, які об'єднують різницеві та алгебраїчні рівняння. Наведено оригінальну класифікацію, а також єдину схему побудови розв'язків різницево-алгебраїчної крайової задачі.

1. Постановка задачи. Исследуем задачу о нахождении ограниченных решений

$$z(k) \in \mathbb{R}^n, \quad k \in \Omega := \{0, 1, 2, \ldots, \omega\},$$

линейной нетеровой $(n \neq \upsilon)$ краевой задачи для системы разностно-алгебраических уравнений [1, 2]

$$A(k)z(k+1) = B(k)z(k) + f(k), \quad \ell z(\cdot) = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}^{\upsilon}, \tag{1}$$

где $A(k), B(k) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ — ограниченные матрицы и $f(k)$ — действительные ограниченные вектор-столбцы, $\ell z(\cdot)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{\upsilon}$ — линейный ограниченный векторный функционал, определенный на пространстве ограниченных функций [1]. Задача о нахождении ограниченных решений $z(k)$ линейной краевой задачи для невырожденной системы разностных уравнений первого порядка

$$z(k+1) = A(k)z(k) + f(k), \quad \ell z(\cdot) = \alpha \in \mathbb{R}^{\upsilon}$$

решена А. А. Бойчуком в [1]; таким образом, поставленная разностно-алгебраическая задача (1) является обобщением задачи, решенной А. А. Бойчуком. При условии ограниченности матриц $A^{+}(k)B(k),\ A^{+}(k)f(k)$, а также

$$P_{A^*(k)} = 0 \tag{2}$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного Фонда фундаментальных исследований Украины (номер государственной регистрации 0118U003390).

© С. М. Чуйко, Е. В. Чуйко, Я. В. Калиниченко, 2019

система (1) приводится к традиционной системе линейных разностных уравнений

$$z(k+1) = A^+(k)B(k)z(k) + \mathfrak{F}_0(k, \nu_0(k)). \tag{3}$$

Здесь

$$\mathfrak{F}_0(k, \nu_0(k)) := A^+(k)f(k) + P_{A_{\rho_0}}(k)\nu_0(k), \quad \operatorname{rank} A(k) := \sigma_0 = m < n,$$

$A^+(k)$ — псевдообратная (по Муру – Пенроузу), $P_{A^*}(k)$ — матрица-ортопроектор:

$$P_{A^*}(k) \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{N}\left(A^*(k)\right),$$

$P_{A_{\rho_0}}(k)$ — $(n \times \rho_0)-$ матрица, составленная из ρ_0 линейно независимых столбцов $(n \times n)$-мерной матрицы-ортопроектора

$$P_A(k) \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{N}(A(k)),$$

$\nu_0(k) \in \mathbb{R}^{\rho_0}$ — произвольная ограниченная вектор-функция. Общее решение задачи Коши $z(0) = c \in \mathbb{R}^n$ для однородной части системы разностных уравнений (3)

$$z(k) = X_0(k)\, c, \quad c \in \mathbb{R}^n,$$

определяет нормальная фундаментальная матрица

$$X_0(k+1) = A^+(k)B(k)X_0(k), \quad X_0(0) = I_n.$$

Нормальная фундаментальная матрица представима в виде

$$X_0(k) = \prod_{j=1}^{k-1} A^+(j)B(j).$$

При условии (2) нормальная фундаментальная матрица $X_0(k)$ однородной части системы разностных уравнений (3) является, вообще говоря, вырожденной:

$$\det X_0(k) = 0.$$

Следовательно, для построения общего решения задачи Коши $z(0) = c \in \mathbb{R}^n$ для неоднородной вырожденной системы разностных уравнений (3) схема [1] не применима. В то же время оператор Грина задачи Коши для вырожденной системы разностных уравнений (3) может быть найден следующим образом:

$$K[\mathfrak{F}_0(j, \nu_0(j))](0) := 0, \quad K[\mathfrak{F}_0(j, \nu_0(j))](1) := \mathfrak{F}_0(1, \nu_0(1)), \ldots,$$

$$K[\mathfrak{F}_0(j, \nu_0(j))](k+1) := A^+(k)B(k)K[\mathfrak{F}_0(j, \nu_0(j))](k) + \mathfrak{F}_0(k, \nu_0(k)), \ldots.$$

В результате доказана следующая лемма.

Лемма 1. *Задача о нахождении ограниченных решений системы линейных разностно-алгебраических уравнений (1) при условии ограниченности матриц $A^+(k)B(k)$, $A^+(k)f(k)$, а также (2) имеет решение*

$$z(k) = X_0(k)\, c + K[f(j)](k), \quad c \in \mathbb{R}^n,$$

где $X_0(k)$ — нормальная фундаментальная матрица,

$$K[f(j)](k) := K[\mathfrak{F}_0(j, \nu_0(j))](k)$$

— оператор Грина задачи Коши для системы (1).

По аналогии с классификацией дифференциально-алгебраических уравнений [3] при условии (2) в случае ограниченности матриц $A^+(k)B(k),\ A^+(k)f(k)$ будем говорить, что система линейных разностно-алгебраических уравнений (1) является невырожденной. Заметим, что в отличие от традиционной системы линейных разностных уравнений решение системы линейных разностно-алгебраических уравнений (1) при условии (2) зависит от произвольной ограниченной вектор-функции.

Пример 1. Найдем решение системы разностно-алгебраических уравнений первого порядка

$$Az(k+1) = B\,z(k) + f(k), \quad k = 0, 1, 2, 3, \tag{4}$$

где

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad f(k) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Поскольку условие (2) выполнено, система (4) имеет решение вида

$$z(k) = X_0(k)\,c + K[f(j)](k), \quad c \in \mathbb{R}^4,$$

где $X_0(k)$ — нормальная фундаментальная матрица:

$$X_0(0) = I_4, \qquad X_0(1) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$X_0(2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad X_0(3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Кроме того,

$$K[f(j)](0) := 0, \qquad K[f(j)](1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$K[f(j)](2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad K[f(j)](3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

В данном случае матрица $A(k)$ прямоугольная, при этом $\rho_0 = 1 \neq 0,$ поэтому найденное решение зависит от произвольной непрерывной функции; в данном случае $\nu_0(k) := 0.$

Исследуем далее задачу о нахождении ограниченных решений системы линейных разностно-алгебраических уравнений (1) при условии $P_{A^*(k)} \neq 0.$ Предположим, что матрица $A(k)$ имеет постоянный ранг, а именно: $1 \leq \operatorname{rank} A(k) = \sigma_0.$ Как известно, любая $(m \times n)$-мерная матрица $A(k)$ может быть представлена в виде разложения [3]

$$A(k) = R_0(k) J_\sigma S_0(k),$$

где $R_0(k)$ и $S_0(k)$ — невырожденные матрицы. Невырожденная замена переменной

$$y(k+1) = S_0(k)z(k+1)$$

приводит систему (1) к виду

$$J_{\sigma_0} y(k+1) = C_0(k)y(k) + R_0^{-1}(k)f(k), \quad k \in \Omega, \tag{5}$$

где

$$C_0(k) := R_0^{-1}(k)B(k)S_0^{-1}(k-1) := \begin{pmatrix} C_{11}^{(0)}(k) & C_{12}^{(0)}(k) \\ C_{21}^{(0)}(k) & C_{22}^{(0)}(k) \end{pmatrix}.$$

Замена переменной

$$y(k) = \mathrm{col}\,(u(k), v(k)) \in \mathbb{R}^n, \qquad u(k) \in \mathbb{R}^{\sigma_0}, \quad v(k) \in \mathbb{R}^{n-\sigma_0}$$

приводит систему (5) к виду

$$\begin{gathered} u(k+1) = C_{11}^{(0)}(k)u(t) + C_{12}^{(0)}(k)v(k) + g_1^{(0)}(k), \\ C_{21}^{(0)}(k)u(k) + C_{22}^{(0)}(t)v(k) + g_2^{(0)}(k) = 0, \end{gathered} \tag{6}$$

где

$$R_0^{-1}(k)f(k) := \mathrm{col}\,\left(g_1^{(0)}(k), g_2^{(0)}(k)\right).$$

Кроме того $P_{D_0^*}(k)$ — матрица-ортопроектор:

$$P_{D_0^*}(k)\colon \mathbb{R}^{m-\sigma_0} \to \mathbb{N}\left(D_0^*(k)\right).$$

Уравнение (6) разрешимо тогда и только тогда, когда [4] $P_{D_0^*}(k)g_2^{(0)}(k) = 0$, при этом общее решение уравнения (6)

$$y(k) = P_{D_{\rho_0}}\varphi(k) - D_0^+(k)g_2^{(0)}(k), \quad D_0(k) := \left[C_{21}^{(0)}(k); C_{22}^{(0)}(k)\right] \in \mathbb{R}^{(m-\sigma_0)\times n}, \quad \varphi(k) \in \mathbb{R}^{\rho_0},$$

определяет $P_{D_{\rho_0}}(k)$ — $(n \times \rho_0)$-мерная матрица, составленная из ρ_0 линейно независимых столбцов $P_{D_0}(k)$ — матрицы-ортопроектора: $P_{D_0}(k)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{N}(D_0(k))$. Обозначая блоки матрицы $P_{D_{\rho_0}}(k)$ и произведения $D_0^+(k)g_2^{(0)}(k)$:

$$P_{D_{\rho_0}}(k) := \mathrm{col}\left(P_1^{(0)}(k), P_2^{(0)}(k)\right), \quad D_0^+(k)g_2^{(0)}(k) = -\mathrm{col}\,\left(f_1^{(1)}(t), f_2^{(1)}(t)\right),$$

приходим к задаче о построении решений $\varphi(k) \in \mathbb{R}^{\rho_0}$ линейной разностно-алгебраической системы

$$A_1(k)\varphi(k+1) = B_1(k)\varphi(k) + f_1(k), \quad \mathrm{rank}\, A_1(k) := \sigma_1, \tag{7}$$

где

$$A_1(k) := P_1^{(0)}(k) \in \mathbb{R}^{\sigma_0\times\rho_0}, \quad \sigma_1 = \sigma_0 \le \rho_0,$$

$$B_1(k) := C_{11}^{(0)}(k)P_1^{(0)}(k) + C_{12}^{(0)}(k)P_2^{(0)}(k).$$

Кроме того,

$$f_1(k) := C_{11}^{(0)}(k)f_1^{(1)}(k) + C_{12}^{(0)}(k)f_2^{(1)}(k) + g_1^{(0)}(k) - f_1^{(1)}(k+1).$$

При условии [3] ограниченности матриц $A_1^+(k)B_1(k)$ и вектор-столбцов

$$A_1^+(k)f_1(k), \quad S_0^{-1}(k-1)D_0^+(k)g_2^{(0)}(k),$$

а также

$$P_{A^*}(k) \neq 0, \quad P_{A_1^*}(k) \equiv 0, \quad P_{D_0^*}(k)g_2^{(0)}(k) = 0, \tag{8}$$

система (7) приводится к традиционной системе линейных разностных уравнений

$$\varphi(k+1) = A_1^+(k)B_1(k)\varphi(k) + \mathfrak{F}_1(k, \nu_1(k)), \quad \nu_1(k) \in \mathbb{R}^{\rho_1}, \tag{9}$$

где

$$\mathfrak{F}_1(k, \nu_1(k)) := A_1^+(k)f_1(k) + P_{A_{\varrho_1}}(k)\nu_1(k),$$

$\nu_1(k) \in \mathbb{R}^{\rho_1}$ — произвольная ограниченная вектор-функция. Кроме того, $P_{A_1^*(k)}$ — матрица-ортопроектор [4]:

$$P_{A_1^*}(k)\colon \mathbb{R}^{\sigma_0} \to \mathbb{N}\left(A_1^*(k)\right),$$

$P_{A_{\rho_1}}(k)$ — $(\rho_0 \times \rho_1)$-мерная матрица, составленная из ρ_1 линейно независимых столбцов $(\rho_0 \times \rho_0)$-мерной матрицы-ортопроектора:

$$P_{A_1}(k)\colon \mathbb{R}^{\rho_0} \to \mathbb{N}(A_1(k)).$$

Обозначим $U_1(t)$ нормальную фундаментальную матрицу

$$U_1(k+1) = A_1^+(k)B_1(k)U_1(k), \quad U_1(0) = I_{\rho_0}$$

полученной традиционной системы линейных разностных уравнений (9). Используя равенство

$$z(k) = S_0^{-1}(k-1)\left[P_{D_{\rho_0}}\varphi(k) - D_0^+(k)g_2^{(0)}(k)\right],$$

заключаем, что при условии (8) система (1) имеет решение вида

$$z(k, c_{\rho_1}) = S_0^{-1}(k-1)P_{D_{\rho_0}}U_1(k)c_{\rho_0} + S_0^{-1}(k-1)P_{D_{\rho_0}}K\left[\mathfrak{F}_1(s, \nu_1(s))\right](k) -$$
$$- S_0^{-1}(k-1)D_0^+(k)g_2^{(0)}(k), \quad c_{\rho_0} \in \mathbb{R}^{\rho_0},$$

где

$$K[\mathfrak{F}_1(j, \nu_1(j))](0) := 0, \quad K[\mathfrak{F}_1(j, \nu_1(j))](1) := \mathfrak{F}_1(0, \nu_1(0)), \ldots,$$

$$K[\mathfrak{F}_1(j, \nu_1(j))](k+1) := A_1^+(k)B_1(k)K[\mathfrak{F}_1(j, \nu_1(j))](k) + \mathfrak{F}_1(k, \nu_1(k)), \ldots.$$

По аналогии с классификацией импульсных краевых задач [4 – 7] в случае (8), при условии ограниченности матриц $A_1^+(k)B_1(k)$ и вектор-столбцов

$$A_1^+(k)f_1(k), \quad S_0^{-1}(k)D_0^+(k)g_2^{(0)}(k)$$

будем говорить, что для линейной разностно-алгебраической системы (1) имеет место вырождение первого порядка. Таким образом, доказана следующая лемма.

Лемма 2. *В случае вырождения первого порядка, при выполнении условия (8), в случае ограниченности матрицы $A_1^+(k)B_1(k)$ и вектор-столбцов*

$$A_1^+(k)f_1(k), \quad S_0^{-1}(k-1)D_0^+(k)g_2^{(0)}(k)$$

линейная разностно-алгебраическая система (1) имеет решение вида

$$z(k, c_{\rho_0}) = X_1(k)\, c_{\rho_0} + K[f(j), \nu_1(j)](k), \quad c_{\rho_0} \in \mathbb{R}^{\rho_0},$$

где

$$X_1(k) := S_0^{-1}(k-1)P_{D_{\rho_0}}U_1(k)$$

— фундаментальная матрица, $\nu_1(k) \in \mathbb{R}^{\rho_1}$ — произвольная ограниченная вектор-функция,

$$K[f(j), \nu_1(j)](k) := S_0^{-1}(k-1)P_{D_{\rho_0}}K\left[\mathfrak{F}_1(s, \nu_1(j))\right](k) - S_0^{-1}(k-1)D_0^+(k)g_2^{(0)}(k)$$

— обобщенный оператор Грина задачи Коши для разностно-алгебраической системы (1).

При условии

$$P_{A^*}(k) \neq 0, \quad P_{A_1^*}(k) = 0, \quad P_{D_0^*}\, g_2^{(0)}(k) = 0,$$

в случае неограниченности матриц $A_1^+(k)B_1(k)$ либо вектор-столбцов

$$A_1^+(k)f_1(k), \quad S_0^{-1}(k)D_0^+(k)g_2^{(0)}(k)$$

система (1) разрешима, но решение не является ограниченным.

Пример 2. Найдем решение системы разностно-алгебраических уравнений первого порядка

$$Az(k+1) = B(k)z(k) + f(k), \quad k = 0, 1, 2, 3, \tag{10}$$

где

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k+1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(k) := \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку условие $P_{A^*(k)} = 0$ не выполнено, система разностно-алгебраических уравнений (10) вырождена; при этом матрица $A(k)$ имеет постоянный ранг, а именно: $\operatorname{rank} A(k) := \sigma_0 = 2$. Матрица $A(k)$ может быть представлена в виде стандартного разложения

$$A(k) = R(k)J_\sigma S(k), \quad R(k) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S(k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $R(k)$ и $S(k)$ — невырожденные матрицы. Кроме того,

$$J_\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В данном случае матрица

$$A_1(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

— матрица полного ранга, при этом $P_{A_1}(k) \neq 0,\ P_{A_{\rho_1}}(k) \neq 0,$ поэтому искомое решение

$$z(k, c_3) = X_1(k)c_3 + K\left[f(j), \nu_1(j)\right](k), \quad c_3 \in \mathbb{R}^3,$$

зависит от произвольной непрерывной функции $\nu_1(k);$ здесь

$$X_1(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_1(1) = X_1(2) = X_1(3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Вырождение второго порядка. Исследуем задачу о нахождении ограниченных решений системы линейных разностно-алгебраических уравнений (1) при условии $P_{A_1^*(k)} \neq 0.$ Предположим, что матрица $A_1(k)$ имеет постоянный ранг, а именно: $1 \leq \operatorname{rank} A_1(k) = \sigma_1.$ Любая $(\sigma_0 \times \rho_0)$-мерная матрица $A_1(k)$ может быть представлена в виде стандартного разложения

$$A_1(k) = R_1(k) J_{\sigma_1} S_1(k),$$

где $R_1(k)$ и $S_1(k)$ — невырожденные матрицы [3]. Невырожденная замена переменной

$$\psi(k+1) = S_1(k)\varphi(k+1)$$

приводит систему (7) к виду

$$J_{\sigma_1}\psi(k+1) = C_1(k)\psi(k) + R_1^{-1}(k) f_1(k), \quad k \in \Omega, \tag{11}$$

где

$$C_1(k) := R_1^{-1}(k) B_1(k) S_1^{-1}(k-1) := \begin{pmatrix} C_{11}^{(1)}(k) & C_{12}^{(1)}(k) \\ C_{21}^{(1)}(k) & C_{22}^{(1)}(k) \end{pmatrix}.$$

Замена переменной

$$\psi(k) = \operatorname{col}\left(\xi(k), \zeta(k)\right) \in \mathbb{R}^{\rho_0}, \quad \xi(k) \in \mathbb{R}^{\sigma_1}, \quad \zeta(k) \in \mathbb{R}^{\rho_0 - \sigma_1}$$

приводит систему (11) к виду

$$\begin{gathered} \xi(k+1) = C_{11}^{(1)}(k)\xi(t) + C_{12}^{(1)}(k)\zeta(k) + g_1^{(1)}(k), \\ C_{21}^{(1)}(k)\xi(k) + C_{22}^{(1)}(t)\zeta(k) + g_2^{(1)}(k) = 0, \end{gathered} \tag{12}$$

где

$$R_1^{-1}(k) f_1(k) := \operatorname{col}\Big(g_1^{(1)}(k), g_2^{(1)}(k)\Big).$$

Кроме того, $P_{D_1^*}(k)$ — матрица-ортопроектор:

$$P_{D_1^*}(k) \colon \mathbb{R}^{\sigma_0 - \sigma_1} \to \mathbb{N}\left(D_1^*(k)\right).$$

Уравнение (12) разрешимо тогда и только тогда, когда $P_{D_1^*}(k)g_2^{(1)}(k)=0;$ при этом общее решение уравнения (12)

$$\psi(k)=P_{D_{\rho_1}}\mu(k)-D_1^+(k)g_2^{(1)}(k),\quad D_1(k):=\left[C_{21}^{(1)}(k);C_{22}^{(1)}(k)\right]\in\mathbb{R}^{(\sigma_0-\sigma_1)\times\rho_0},\quad \psi(k)\in\mathbb{R}^{\rho_0}$$

определяет матрица $P_{D_{\rho_1}}(k)$, составленная из ρ_1 линейно независимых столбцов $P_{D_1}(k)$ — матрицы-ортопроектора:

$$P_{D_1}(k)\colon \mathbb{R}^{\rho_0}\to\mathbb{N}(D_1(k)).$$

Обозначая блоки $(\rho_0\times\rho_1)$-мерной матрицы $P_{D_{\rho_1}}(k)$, а также произведения $D_1^+(k)g_2^{(1)}(k):$

$$P_{D_{\rho_1}}(k):=\mathrm{col}\left(P_1^{(1)}(k),P_2^{(1)}(k)\right),\quad D_1^+(k)g_2^{(1)}(k)=-\mathrm{col}\left(f_1^{(1)}(t),f_2^{(1)}(t)\right),$$

приходим к задаче о построении решений $\mu(k)\in\mathbb{R}^{\rho_1}$ линейной разностно-алгебраической системы

$$A_2(k)\mu(k+1)=B_2(k)\mu(k)+f_2(k),\quad \mathrm{rank}\,A_2(k):=\sigma_2, \tag{13}$$

где

$$A_2(k):=P_1^{(1)}(k)\in\mathbb{R}^{\sigma_1\times\rho_1},\quad \sigma_2\le\sigma_1\le\rho_0,$$

$$B_2(k):=C_{11}^{(1)}(k)P_1^{(1)}(k)+C_{12}^{(1)}(k)P_2^{(1)}(k).$$

Кроме того,

$$f_2(k):=C_{11}^{(1)}(k)f_1^{(2)}(k)+C_{12}^{(1)}(k)f_2^{(2)}(k)+g_1^{(1)}(k)-f_1^{(2)}(k+1).$$

При условии [3] ограниченности матриц $A_2^+(k)B_2(k)$ и вектор-столбцов

$$A_1^+(k)f_1(k),\quad S_0^{-1}(k-1)D_0^+(k)g_2^{(0)}(k),\quad A_2^+(k)f_2(k),\quad S_1^{-1}(k-1)D_1^+(k)g_2^{(1)}(k)$$

а также

$$P_{A^*}(k)\ne0,\quad P_{A_1^*}(k)\ne0,\quad P_{A_2^*}(k)\equiv0,\quad P_{D_0^*}(k)g_2^{(0)}(k)\equiv0,\quad P_{D_1^*}(k)g_2^{(1)}(k)\equiv0 \tag{14}$$

система (13) приводится к традиционной системе линейных разностных уравнений

$$\mu(k+1)=A_2^+(k)B_2(k)\mu(k)+\mathfrak{F}_2(k,\nu_2(k)),\quad \nu_2(k)\in\mathbb{R}^{\rho_2}, \tag{15}$$

где

$$\mathfrak{F}_2(k,\nu_2(k)):=A_2^+(k)f_2(k)+P_{A_{\rho_2}}(k)\nu_2(k).$$

Кроме того, $P_{A_2^*(k)}$ — матрица-ортопроектор [4]:

$$P_{A_2^*}(k)\colon\mathbb{R}^{\sigma_1}\to\mathbb{N}\left(A_2^*(k)\right),$$

$P_{A_{\rho_2}}(k)$ — $(\rho_1\times\rho_2)$-мерная матрица, составленная из ρ_2 линейно независимых столбцов $(\rho_1\times\rho_1)$-мерной матрицы-ортопроектора:

$$P_{A_2}(k)\colon\mathbb{R}^{\rho_1}\to\mathbb{N}(A_2(k)).$$

Обозначим $U_2(t)$ нормальную фундаментальную матрицу

$$U_2(k+1) = A_2^+(k)B_2(k)U_2(k), \quad U_2(0) = I_{\rho_1}$$

полученной традиционной системы линейных разностных уравнений (15). Используя равенство

$$\varphi(k) = S_1^{-1}(k-1)\left[P_{D_{\rho_1}}\mu(k) - D_1^+(k)g_2^{(1)}(k)\right],$$

заключаем, что при условии (14) система (1) имеет решение вида

$$\begin{aligned} z(k, c_{\rho_1}) = {} & S_0^{-1}(k-1)P_{D_{\rho_0}}S_1^{-1}(k-1)\times \\ & \times\left[P_{D_{\rho_1}}U_2(k)c_{\rho_1} + P_{D_{\rho_1}}K\left[\mathfrak{F}_2(j,\nu_2(j))\right](k) - D_1^+(k)g_2^{(1)}(k)\right] - \\ & - S_0^{-1}(k-1)D_0^+(k)g_2^{(0)}(k), \quad c_{\rho_1} \in \mathbb{R}^{\rho_1}, \end{aligned}$$

где

$$K[\mathfrak{F}_2(j,\nu_2(j))](0) := 0, \quad K[\mathfrak{F}_2(j,\nu_2(j))](1) := \mathfrak{F}_2(0,\nu_2(0)), \ldots,$$

$$K[\mathfrak{F}_2(j,\nu_2(j))](k+1) := A_2^+(k)B_2(k)K[\mathfrak{F}_2(j,\nu_2(j))](k) + \mathfrak{F}_2(k,\nu_2(k)), \ldots.$$

Таким образом, доказана следующая лемма.

Лемма 3. *При условии (14), в случае ограниченности матриц* $A_1^+(k)B_1(k)$, $A_2^+(k)B_2(k)$ *и вектор-столбцов*

$$A_1^+(k)f_1(k), \quad S_0^{-1}(k-1)D_0^+(k)g_2^{(0)}(k), \quad A_2^+(k)f_2(k), \quad S_1^{-1}(k-1)D_1^+(k)g_2^{(1)}(k)$$

линейная разностно-алгебраическая система (1) имеет решение вида

$$z(k, c_{\rho_1}) = X_2(k)\, c_{\rho_1} + K[f(j),\nu_2(j)](k), \quad c_{\rho_1} \in \mathbb{R}^{\rho_1},$$

зависящее от произвольной ограниченной вектор-функции $\nu_2(k) \in \mathbb{R}^{\rho_2}$; *здесь*

$$X_2(k) := S_0^{-1}(k-1)P_{D_{\rho_0}}S_1^{-1}(k-1)P_{D_{\rho_1}}U_2(k)$$

— фундаментальная матрица,

$$\begin{aligned} K[f(j),\nu_2(j)](k) := {} & S_0^{-1}(k-1)P_{D_{\rho_0}}S_1^{-1}(k-1)\times \\ & \times\left[P_{D_{\rho_1}}U_2(k)c_{\rho_1} + P_{D_{\rho_1}}K\left[\mathfrak{F}_2(j,\nu_2(j))\right](k) - D_1^+(k)g_2^{(1)}(k)\right] - \\ & - S_0^{-1}(k-1)D_0^+(k)g_2^{(0)}(k) \end{aligned}$$

— обобщенный оператор Грина задачи Коши для разностно-алгебраической системы (1).

Пример 3. Найдем решение системы разностно-алгебраических уравнений первого порядка

$$Az(k+1) = B(k)z(k) + f(k), \quad k = 0,1,2,3, \tag{16}$$

где

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(k) := \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку условие $P_{A^*(k)} = 0$ не выполнено, система разностно-алгебраических уравнений (16) вырождена; при этом матрица $A(k)$ имеет постоянный ранг, а именно: $\operatorname{rank} A(k) := \sigma_0 = 2.$ В данном случае матрица

$$A_1(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

не является матрицей полного ранга, при этом матрица

$$A_2(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

является матрицей полного ранга. Поскольку условие (14) выполнено, а также

$$P_{A_2}(k) \neq 0, \quad P_{A_{\rho_2}}(k) \neq 0,$$

то искомое решение

$$z(k, c_3) = X_2(k)c_3 + K\left[f(j), \nu_2(j)\right](k), \quad c_3 \in \mathbb{R}^3,$$

существует и зависит от произвольной ограниченной вектор-функции $\nu_2(k)$; здесь

$$X_2(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2(1) = X_2(2) = X_2(3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Положим $\nu_2(k) := \begin{pmatrix} 1 & k \end{pmatrix}^*$, при этом

$$K[f(j), \nu_2(j)](1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad K[f(j), \nu_2(j)](2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$K[f(j), \nu_2(j)](3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Обозначим

$$\chi_1 := \left\| P_{D_0^*}(k) g_2^{(0)}(k) \right\|.$$

Равенство $\chi_1 = 0$ является необходимым условием разрешимости линейной вырожденной разностно-алгебраической системы (1). При условии (14), в случае ограниченности матриц $A_2^+(k)B_2(k)$ и вектор-столбцов

$$A_1^+(k)f_1(k), \quad S_0^{-1}(k-1)D_0^+(k)g_2^{(0)}(k), \quad A_2^+(k)f_2(k), \quad S_1^{-1}(k-1)D_1^+(k)g_2^{(1)}(k)$$

будем говорить, что для линейной разностно-алгебраической системы (1) имеет место вырождение второго порядка. При условии (14), в случае неограниченности матриц $A_1^+(k)B_1(k),$ $A_2^+(k)B_2(k),$ либо вектор-столбцов

$$A_1^+(k)f_1(k), \quad S_0^{-1}(k-1)D_0^+(k)g_2^{(0)}(k), \quad A_2^+(k)f_2(k), \quad S_1^{-1}(k-1)D_1^+(k)g_2^{(1)}(k)$$

система (1) разрешима, но решение не является ограниченным.

3. Краевые задачи для систем линейных разностно-алгебраических уравнений. Исследуем задачу о нахождении ограниченных решений линейной нетеровой $(n \neq \upsilon)$ краевой задачи для системы линейных разностно-алгебраических уравнений [1, 2] (1). Заметим, что в отличие от традиционной системы линейных разностных уравнений решение системы линейных разностно-алгебраических уравнений (1), вообще говоря, зависит от произвольной ограниченной вектор-функции $\nu(k)$; положим эту функцию фиксированной. Обозначим матрицу $Q_1 := \ell X_1(\cdot) \in \mathbb{R}^{\upsilon \times n}$, а также

$$P_{Q_1} \colon \mathbb{R}^{\rho_0} \to \mathbb{N}(Q_1), \quad P_{Q_1^*} \colon \mathbb{R}^{\upsilon} \to \mathbb{N}\left(Q_1^*\right)$$

— матрицы-ортопроекторы. Подставляя общее решение задачи Коши $z(0) = c$ неоднородного линейного разностно-алгебраического уравнения (1) в краевое условие (1), приходим к уравнению

$$Q_1 c = \alpha - \ell K[f(j), \nu_1(j)](\cdot),$$

разрешимому тогда и только тогда, когда

$$P_{Q_1^*} \left\{\alpha - \ell K[f(j), \nu_1(j)](\cdot)\right\} = 0, \tag{17}$$

в этом случае решение $z(k)$ линейной нетеровой краевой задачи (1) определяет вектор

$$c_{\rho_0} = Q_1^+ \left\{\alpha - \ell K[f(j), \nu_1(j)](\cdot)\right\} + P_{Q_r} c_r, \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Здесь $Q_1^+ \in \mathbb{R}^{\rho_0 \times \upsilon}$ — псевдообратная по Муру – Пенроузу матрица; матрица $P_{Q_r} \in \mathbb{R}^{\rho_0 \times r}$ составлена из r линейно независимых столбцов матрицы-ортопроектора $P_{Q_1} \in \mathbb{R}^{\rho_0 \times \rho_0}$.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. *Задача о нахождении ограниченных решений системы линейных разностно-алгебраических уравнений (1) в случае вырождения первого порядка, при условии (8), в случае ограниченности матрицы $A_1^+(k)B_1(k)$ и вектор-столбцов*

$$A_1^+(k) f_1(k), \quad S_0^{-1}(k-1) D_0^+(k) g_2^{(0)}(k)$$

имеет решение вида

$$z(k, c_{\rho_0}) = X_1(k)\, c_{\rho_0} + K[f(j), \nu_1(j)](k), \quad c_{\rho_0} \in \mathbb{R}^{\rho_0},$$

где

$$X_1(k) := S_0^{-1}(k-1) P_{D_{\rho_0}} U_1(k)$$

— фундаментальная матрица, $\nu_1(k) \in \mathbb{R}^{\rho_1}$ — произвольная ограниченная вектор-функция,

$$K[f(j)](k) := K[\mathfrak{F}_0(j, \nu_0(j), \nu_1(j))](k)$$

— оператор Грина задачи Коши для системы разностно-алгебраических уравнений (1). Задача о нахождении ограниченных решений линейной нетеровой $(n \neq \omega)$ краевой задачи для системы линейных разностно-алгебраических уравнений (1) при условиях (8) и (17) имеет решение

$$z(k) = X_r(k)\, c_r + G[f(j), \nu_1(j), \alpha](k), \quad c_r \in \mathbb{R}^r,$$

где

$$X_r(k) := X_1(k) P_{Q_r}, \quad k \in \Omega := \{0, 1, 2, \ldots, \omega\}$$

— фундаментальная матрица решений однородной части краевой задачи (1) и

$$G[f(j),\nu_1(j),\alpha](k) := K[\mathfrak{F}_1(j,\nu_1(j))](k) + X_1(k)Q_1^+\{\alpha - \ell K[f(j),\nu_1(j)](\cdot)\}$$

— обобщенный оператор Грина линейной нетеровой краевой задачи для системы линейных разностно-алгебраических уравнений (1).

Пример 4. Найдем решение линейной краевой задачи для системы разностно-алгебраических уравнений первого порядка

$$Az(k+1) = Bz(k) + f(k), \quad z(0) - z(3) = 0, \quad k = 0,1,2,3, \tag{18}$$

где матрицы $A,\ B$ и вектор-функция $f(k)$ определены в примере 2.

В примере 2 найдено искомое решение системы (18)

$$z(k,c_3) = X_1(k)c_3 + K[f(j),\nu_1(j)](k), \quad c_3 \in \mathbb{R}^3,$$

зависящее от произвольной непрерывной функции $\nu_1(k)$. Положим $\nu_1(k) := 0$, как и в примере 2. Поскольку для матрицы

$$Q_1 := X_1(0) - X_1(3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

имеет место неравенство $P_{Q_1^*} \neq 0$, постольку для краевой задачи (18) имеет место критический случай; при этом выполнено условие разрешимости (17); здесь

$$P_{Q_1^*} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{Q_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{Q_r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решение краевой задачи (18)

$$z(k) = X_r(k)\,c_r + G[f(j),\nu_1(j),\alpha](k), \quad c_r \in \mathbb{R}^1,$$

определяет обобщенный оператор Грина краевой задачи (18)

$$G[f(j),\nu_1(j),\alpha](k) = K[f(j),\nu_1(j)](k),$$

а также

$$X_r(k) := X_1(k)P_{Q_r} = P_{Q_r}, \quad k \in \Omega := \{0,1,2,3\}$$

— фундаментальная матрица решений однородной части краевой задачи (18).

В некритическом случае $(P_{Q_1^*} = 0)$ условия существования и вид общего решения задачи о нахождении ограниченных решений системы линейных разностно-алгебраических уравнений (1) определяет следующее утверждение.

Следствие. *Задача о нахождении ограниченных решений системы линейных разностно-алгебраических уравнений (1) в случае вырождения первого порядка, при условии (8), в случае ограниченности матрицы* $A_1^+(k)B_1(k)$ *и вектор-столбцов*

$$A_1^+(k)f_1(k), \quad S_0^{-1}(k-1)D_0^+(k)g_2^{(0)}(k)$$

имеет решение вида

$$z(k, c_{\rho_0}) = X_1(k)\, c_{\rho_0} + K[f(j), \nu_1(j)](k), \quad c_{\rho_0} \in \mathbb{R}^{\rho_0},$$

где $\nu_1(k) \in \mathbb{R}^{\rho_1}$ *— произвольная ограниченная вектор-функция. Задача о нахождении ограниченных решений линейной нетеровой* $(n \neq \upsilon)$ *краевой задачи для системы линейных разностно-алгебраических уравнений (1) при условии (8) имеет решение*

$$z(k) = X_r(k)\, c_r + G[f(j), \nu_1(j), \alpha](k), \quad c_r \in \mathbb{R}^r,$$

где

$$X_r(k) := X_1(k)P_{Q_r}, \quad k \in \Omega := \{0, 1, 2, \ldots, \omega\}$$

— фундаментальная матрица решений однородной части краевой задачи (1) и

$$G[f(j), \nu_1(j), \alpha](k) := K[\mathfrak{F}_1(j, \nu_1(j))](k) + X_1(k)Q_1^+\{\alpha - \ell K[f(j), \nu_1(j)](\cdot)\}$$

— обобщенный оператор Грина линейной нетеровой краевой задачи для системы линейных разностно-алгебраических уравнений (1).

Пример 5. Найдем решение линейной краевой задачи для системы разностно-алгебраических уравнений первого порядка

$$Az(k+1) = B(k)z(k) + f(k), \quad \ell z(\cdot) = 0, \quad k = 0, 1, 2, 3, \tag{19}$$

где матрицы $A,\ B(k)$ и вектор-функция $f(k)$ определены в примере 2. Кроме того,

$$\ell z(\cdot) := M\,(z(0) - z(3)), \quad M := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В примере 2 найдено искомое решение системы (18), зависящее от произвольной непрерывной функции $\nu_1(k)$. Положим, как и в примере 2, $\nu_1(k) := 0$. Поскольку матрица

$$Q_1 := \ell X_1(\cdot) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

полного ранга, постольку для краевой задачи (18) имеет место критический случай. Решение краевой задачи (19)

$$z(k) = X_r(k)c_r + G[f(j), \nu_1(j), \alpha](k), \quad c_r \in \mathbb{R}^1,$$

определяет обобщенный оператор Грина краевой задачи (19)

$$G[f(j), \nu_1(j), \alpha](k) = K[f(j), \nu_1(j)](k),$$

а также

$$X_r(k) := X_1(k)P_{Q_r} = P_{Q_r}, \quad k \in \Omega := \{0, 1, 2, 3\}$$

— фундаментальная матрица решений однородной части краевой задачи (19).

Полученные результаты аналогично [1, 4, 8] могут быть использованы в теории нелинейных нетеровых краевых задач для систем разностно-алгебраических уравнений. В случае неразрешимости разностно-алгебраические краевые задачи могут быть регуляризованы аналогично [9 – 12].

Литература

1. *Бойчук А. А.* Краевые задачи для систем разностных уравнений // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 6. – С. 832 – 835.
2. *Campbell S. L.* Limit behavior of solutions of singular difference equations // Linear Algebra Appl. – 1979. – **23**. – P. 167 – 178.
3. *Chuiko S. M.* On a reduction of the order in a differential-algebraic system // J. Math. Sci. – 2018. – **235**. – № 1. – P. 2 – 18.
4. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. – Boston; Utrecht: VSP, 2004. – XIV+ 317 p.
5. *Мышкис А. Д., Самойленко А. М.* Системы с толчками в заданные моменты времени // Мат. сб. – 1967. – **74**, № 2. – С. 202 – 208.
6. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища шк., 1987. – 287 с.
7. *Chuiko S. M.* A generalized Green operator for a boundary value problem with impulse action // Differ. Equ. – 2001. – **37**, № 8. – P. 1189 – 1193.
8. *Chuiko S. M.* Nonlinear matrix differential-algebraic boundary value problem // Lobachevskii J. Math. – 2017. – **38**, № 2. – P. 236 – 244.
9. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа. – М.: Высш. шк., 1988. – **1**. – 712 с.
10. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986. – 288 с.
11. *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1971. – 104 с.
12. *Chuiko S. M.* On the regularization of a linear Fredholm boundary-value problem by a degenerate pulsed action // J. Math. Sci. – 2014. – **197**, № 1. – P. 138 – 150.

Получено 24.05.19