УДК 517.972.2

ДОПУСТИМЫЕ ЭКСТРЕМАЛИ В ЗАДАЧАХ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ СО СВЯЗЯМИ В ВИДЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ПРЯМОУГОЛЬНЫМИ МАТРИЦАМИ

М. А. Елишевич

Киев. нац. ун-т строительства и архитектуры
пр-т Воздухофлотский, 31, 03037, Киев, Украина

Necessary and sufficient conditions for the existence of smooth admissible extremals in problems of variational calculus with constraints in the form of the system of linear inhomogeneous differential equations of first order with rectangular matrices and different types of boundary conditions are obtained.

Визначено необхідні та достатні умови існування гладких допустимих экстремалей у задачах варіаційного числення зі зв'язками у вигляді системи лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь першого порядку з прямокутними матрицями та різними видами крайових умов.

Постановка задачи. В данной работе рассматривается задача определения необходимых и достаточных условий существования гладких допустимых экстремалей функционала

$$I = \int\limits_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), \dot{x}(t))dt + G(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)), \tag{1}$$

где $t_0 \leq t_1,\ [t_0; t_1] \subset \Delta,\ \Delta \subset R$ — фиксированный отрезок, $F(t, x(t), \dot{x}(t)) \in C^\infty(\Delta, (\cdot), (\cdot))$, $G(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) \in C^\infty(\Delta, (\cdot), \Delta, (\cdot))$ — действительные скалярные функции, имеющие непрерывные частные производные всех порядков по каждому из аргументов при $t \in \Delta$, $x(t)$ — действительная вектор-функция размерности n, при наличии дифференциальных связей

$$B(t)\, \frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \quad t \in [t_0; t_1], \tag{2}$$

где $A(t),\ B(t) \in C^\infty(\Delta)$ — действительные прямоугольные матрицы-функции размерности $m \times n,\ f(t) \in C^\infty(\Delta)$ — действительная вектор-функция размерности m, и различных видов краевых условий.

В данном случае рассматривается задача Больца. Аналогичные результаты для задач Лагранжа и Майера следуют непосредственно из полученных ниже при отсутствии функции G или F соответственно.

Классический метод решения задач вариационного исчисления с использованием множителей Лагранжа (см., например, [1, с. 97 – 122; 2, с. 218 – 242; 3, с. 382 – 385]) предполагает независимость уравнений связи. Здесь такого ограничения нет. Для проверки их независимости надо привести систему (2) к обобщенной канонической форме [4] и отбросить часть уравнений, предварительно проверив разрешимость системы в целом. Кроме того, эти множители являются дополнительными неизвестными функциями, которые надо найти, что делает решение задачи более громоздким.

Основные определения. В данной работе используются жордановы наборы векторов матрицы $B(t)$ относительно оператора

$$L(t) = A(t) - B(t)\,\frac{d}{dt}$$

и сопряженной матрицы $B^*(t)$ относительно оператора

$$L^*(t) = A^*(t) + \frac{d}{dt}\,B^*(t),$$

формально сопряженного к $L(t)$.

Определение 1 [5, с. 54]. *Элемент $\varphi^{(1)}(t) \in \ker B(t)$ имеет в точке $t \in \Delta$ конечную жорданову цепочку векторов матрицы $B(t)$ относительно оператора $L(t)$ длины p, $p \geq 1$, если существуют векторы $\varphi^{(i)}(t)$, $i = \overline{1,p}$, удовлетворяющие соотношениям*

$$B(t)\varphi^{(1)}(t) = 0,$$

$$B(t)\varphi^{(i)}(t) = L(t)\varphi^{(i-1)}(t), \quad i = \overline{2,p},$$

$$L(t)\varphi^{(p)}(t) \notin \operatorname{Im} B(t).$$

Определение 2. *Элемент $\tilde{\varphi}^{(1)}(t) \in \ker B(t)$ имеет в точке $t \in \Delta$ циклическую жорданову цепочку векторов матрицы $B(t)$ относительно оператора $L(t)$ длины $\tilde{p}$, $\tilde{p} \geq 1$, если существуют векторы $\tilde{\varphi}^{(i)}(t)$, $i = \overline{1,\tilde{p}}$, удовлетворяющие соотношениям*

$$B(t)\tilde{\varphi}^{(1)}(t) = 0,$$

$$B(t)\tilde{\varphi}^{(i)}(t) = L(t)\tilde{\varphi}^{(i-1)}(t), \quad i = \overline{2,\tilde{p}},$$

$$L(t)\tilde{\varphi}^{(\tilde{p})}(t) = 0.$$

Определение 3. *Элемент $\hat{\varphi}^{(1)}(t)$ имеет в точке $t \in \Delta$ вспомогательную цепочку векторов матрицы $B(t)$ относительно оператора $L(t)$ длины $\hat{p}$, $\hat{p} \geq 1$, если существуют векторы $\hat{\varphi}^{(i)}(t)$, $i = \overline{1,\hat{p}}$, удовлетворяющие соотношениям*

$$B(t)\hat{\varphi}^{(i)}(t) = L(t)\hat{\varphi}^{(i-1)}(t), \quad i = \overline{2,\hat{p}},$$

$$B(t)\hat{\varphi}^{(1)}(t) \notin \operatorname{Im} L(t),$$

$$L(t)\hat{\varphi}^{(\hat{p})}(t) \notin \operatorname{Im} B(t).$$

Аналогично определим цепочки векторов матрицы $B(t)$ относительно оператора $L(t)$ на отрезке Δ и матрицы $B^*(t)$ относительно оператора $L^*(t)$. Их свойства исследованы в [6].

Уравнения системы (2) независимы в том и только том случае, когда существуют только циклические цепочки векторов матрицы $B(t)$ относительно оператора $L(t)$ и вспомогательные цепочки векторов матрицы $B^*(t)$ относительно оператора $L^*(t)$, при этом $m \leq n$, $\operatorname{rank} B(t) = m$. В данной работе рассматривается случай, когда могут существовать конечные, циклические и вспомогательные цепочки, но их количество и длины постоянны при всех $t \in \Delta$.

Определение 4 [7, с. 180]**.** *Экстремалями в задаче вариационного исчисления являются функции, удовлетворяющие уравнению Эйлера (Эйлера – Пуассона). Допустимыми экстремалями являются те из них, которые удовлетворяют краевым условиям, а также условиям трансверсальности и стационарности при их наличии.*

Полученный результат. Аналогично [4, 6] будем считать, что существуют:

$\breve{r},\ \breve{r}\geq 0$, циклических цепочек матрицы $B(t)$ относительно оператора $L(t)$ единичной длины, состоящих из векторов $\breve{\varphi}_i(t),\ i=\overline{1,\breve{r}}$;

$\breve{r},\ \breve{r}\geq 0$, циклических цепочек матрицы $B^*(t)$ относительно оператора $L^*(t)$ единичной длины, состоящих из векторов $\breve{\psi}_i(t),\ i=\overline{1,\breve{r}}$;

$\tilde{r},\ \tilde{r}\geq 0$, циклических цепочек матрицы $B(t)$ относительно оператора $L(t)$ длин $(\tilde{s}_i+1)$, $i=\overline{1,\tilde{r}},\ 0<\tilde{s}_1\leq\ldots\leq\tilde{s}_{\tilde{r}}$, состоящих из векторов $\tilde{\varphi}_i^{(j)}(t),\ j=\overline{1,\tilde{s}_i+1},\ i=\overline{1,\tilde{r}}$;

$\hat{r},\ \hat{r}\geq 0$, циклических цепочек матрицы $B^*(t)$ относительно оператора $L^*(t)$ длин $(\hat{s}_i+1),\ i=\overline{1,\hat{r}},\ 0<\hat{s}_1\leq\ldots\leq\hat{s}_{\hat{r}}$, состоящих из векторов $\tilde{\psi}_i^{(j)}(t),\ j=\overline{1,\hat{s}_i+1},\ i=\overline{1,\hat{r}}$;

$r,\ r\geq 0$, конечных цепочек матрицы $B(t)$ относительно оператора $L(t)$ длин s_i, $i=\overline{1,r},\ s_1\geq\ldots\geq s_r>0$, состоящих из векторов $\varphi_i^{(j)}(t),\ j=\overline{1,s_i},\ i=\overline{1,r}$.

Обозначим

$$s=\sum_{i=1}^{r}s_i,\quad \tilde{s}=\sum_{i=1}^{\tilde{r}}\tilde{s}_i,\quad \hat{s}=\sum_{i=1}^{\hat{r}}\hat{s}_i,\quad \alpha=n-\breve{r}-\tilde{r}-\tilde{s}-s-\hat{s}=m-\breve{r}-\hat{r}-\hat{s}-s-\tilde{s}.$$

Согласно [4, 6] существуют также:

r конечных цепочек матрицы $B^*(t)$ относительно оператора $L^*(t)$ длин $s_i,\ i=\overline{1,r}$, состоящих из векторов $\psi_i^{(j)}(t),\ j=\overline{1,s_i},\ i=\overline{1,r}$;

$\hat{r}$ вспомогательных цепочек матрицы $B(t)$ относительно оператора $L(t)$ длин $\hat{s}_i,\ i= =\overline{1,\hat{r}}$, состоящих из векторов $\hat{\varphi}_i^{(j)}(t),\ j=\overline{1,\hat{s}_i},\ i=\overline{1,\hat{r}}$;

$\tilde{r}$ вспомогательных цепочек матрицы $B^*(t)$ относительно оператора $L^*(t)$ длин $\tilde{s}_i$, $i=\overline{1,\tilde{r}}$, состоящих из векторов $\hat{\psi}_i^{(j)}(t),\ j=\overline{1,\tilde{s}_i},\ i=\overline{1,\tilde{r}}$;

$\breve{r}$ векторов $\breve{\varphi}_i(t)\notin\operatorname{Im}B(t)\bigcup\operatorname{Im}L(t),\ i=\overline{1,\breve{r}}$;

$\breve{r}$ векторов $\breve{\psi}_i(t)\notin\operatorname{Im}B^*(t)\bigcup\operatorname{Im}L^*(t),\ i=\overline{1,\breve{r}}$;

α векторов $q_i(t),\ i=\overline{1,\alpha}$;

α векторов $p_i(t),\ i=\overline{1,\alpha}$,

таких, что элементы каждого из следующих множеств принадлежат $C^\infty(\Delta)$ и линейно независимы:

1) $q_i(t),\ i=\overline{1,\alpha},\ \breve{\varphi}_i(t),\ i=\overline{1,\breve{r}},\ \tilde{\varphi}_i^{(j)}(t),\ j=\overline{1,\tilde{s}_i+1},\ i=\overline{1,\tilde{r}},\ \varphi_i^{(j)}(t),\ j=\overline{1,s_i},\ i=\overline{1,r}$, $\hat{\varphi}_i^{(j)}(t),\ j=\overline{1,\hat{s}_i},\ i=\overline{1,\hat{r}}$;

2) $B(t)q_i(t),\ i=\overline{1,\alpha},\ \breve{\varphi}_i(t),\ i=\overline{1,\breve{r}},\ L(t)\tilde{\varphi}_i^{(j)}(t),\ j=\overline{1,\tilde{s}_i},\ i=\overline{1,\tilde{r}},\ L(t)\varphi_i^{(j)}(t),\ j=\overline{1,s_i}$, $i=\overline{1,r},\ B(t)\hat{\varphi}_i^{(1)}(t),\ i=\overline{1,\hat{r}},\ L(t)\hat{\varphi}_i^{(j)}(t),\ j=\overline{1,\hat{s}_i},\ i=\overline{1,\hat{r}}$;

3) $p_i(t),\ i=\overline{1,\alpha},\ \breve{\psi}_i(t),\ i=\overline{1,\breve{r}},\ \tilde{\psi}_i^{(j)}(t),\ j=\overline{1,\hat{s}_i+1},\ i=\overline{1,\hat{r}},\ \psi_i^{(j)}(t),\ j=\overline{1,s_i},\ i=\overline{1,r}$, $\hat{\psi}_i^{(j)}(t),\ j=\overline{1,\tilde{s}_i},\ i=\overline{1,\tilde{r}}$;

4) $B^*(t)p_i(t),\ i=\overline{1,\alpha},\ \breve{\psi}_i(t),\ i=\overline{1,\breve{r}},\ L^*(t)\tilde{\psi}_i^{(j)}(t),\ j=\overline{1,\hat{s}_i},\ i=\overline{1,\hat{r}},\ L^*(t)\psi_i^{(j)}(t)$, $j=\overline{1,s_i},\ i=\overline{1,r},\ B^*(t)\hat{\psi}_i^{(1)}(t),\ i=\overline{1,\tilde{r}},\ L^*(t)\hat{\psi}_i^{(j)}(t),\ j=\overline{1,\tilde{s}_i},\ i=\overline{1,\tilde{r}}$;

пары множеств 1 и 4, 2 и 3 соответственно представляют собой биортогональные системы:

$$(B(t)q_i(t),p_k(t))=(q_i(t),B^*(t)p_k(t))=\delta_{ik},\quad i,k=\overline{1,\alpha},$$

$$\big(\breve{\varphi}_i(t), \breve{\psi}_k(t)\big) = \delta_{ik}, \quad i,k = \overline{1,\breve{r}},$$

$$\Big(\breve{\varphi}_i(t), \breve{\psi}_k(t)\Big) = \delta_{ik}, \quad i,k = \overline{1,\breve{r}},$$

$$\Big(\tilde{\varphi}_i^{(j)}(t), L^*(t)\hat{\psi}_k^{(l)}(t)\Big) = \Big(L(t)\tilde{\varphi}_i^{(j)}(t), \hat{\psi}_k^{(l)}(t)\Big) = \delta_{ik}\delta_{l+j,\tilde{s}_i+1}, \quad j,l = \overline{1,\tilde{s}_i}, \quad i,k = \overline{1,\tilde{r}},$$

$$\Big(\tilde{\varphi}_i^{(\tilde{s}_i+1)}(t), B^*(t)\hat{\psi}_k^{(1)}(t)\Big) = \delta_{ik}, \quad i,k = \overline{1,\tilde{r}},$$

$$\Big(\hat{\varphi}_i^{(j)}(t), L^*(t)\tilde{\psi}_k^{(l)}(t)\Big) = \Big(L(t)\hat{\varphi}_i^{(j)}(t), \tilde{\psi}_k^{(l)}(t)\Big) = \delta_{ik}\delta_{l+j,\hat{s}_i+1}, \quad j,l = \overline{1,\hat{s}_i}, \quad i,k = \overline{1,\hat{r}},$$

$$\Big(B(t)\hat{\varphi}_i^{(1)}(t), \tilde{\psi}_k^{(\hat{s}_k+1)}(t)\Big) = \delta_{ik}, \quad i,k = \overline{1,\hat{r}},$$

$$\Big(\varphi_i^{(j)}(t), L^*(t)\psi_k^{(l)}(t)\Big) = \Big(L(t)\varphi_i^{(j)}(t), \psi_k^{(l)}(t)\Big) = \delta_{ik}\delta_{l+j,s_i+1}, \quad j,l = \overline{1,s_i}, \quad i,k = \overline{1,r},$$

все остальные скалярные произведения векторов из соответствующих пар множеств равны 0.

Согласно [4] система (2) разрешима тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$\sum_{j=0}^{\hat{s}_i} \frac{d^j}{dt^j} \Big(f(t), \tilde{\psi}_i^{(\hat{s}_i-j+1)}(t)\Big) = 0, \quad i = \overline{1,\hat{r}}, \quad t \in \Delta, \tag{3}$$

$$\Big(f(t), \breve{\psi}_i(t)\Big) = 0, \quad i = \overline{1,\breve{r}}, \quad t \in \Delta, \tag{4}$$

и имеет общее решение

$$x(t) = X_\alpha(t)\left[c + \int_{t_0}^{t} Y_\alpha^*(\tau)f(\tau)\,d\tau\right] - \sum_{i=1}^{r}\Phi_i(t)\sum_{k=0}^{s_i-1} I_{s_i}^k \frac{d^k}{dt^k}\left[\Psi_i^*(t)f(t)\right] -$$
$$- \sum_{i=1}^{\tilde{r}}\tilde{\Phi}_i(t)\sum_{k=0}^{\tilde{s}_i-1}\left(I_{\tilde{s}_i}^T\right)^k \frac{d^k}{dt^k}\left[\hat{\Psi}_i^*(t)f(t)\right] - \sum_{i=1}^{\hat{r}}\hat{\Phi}_i(t)\sum_{k=0}^{\hat{s}_i-1} I_{\hat{s}_i}^k \frac{d^k}{dt^k}\left[\tilde{\Psi}_i^*(t)f(t)\right] +$$
$$+ \sum_{i=1}^{\tilde{r}}\sum_{k=0}^{\tilde{s}_i}\left[\frac{d^k}{dt^k}\tilde{\beta}_i(t)\right]\tilde{\varphi}_i^{(\tilde{s}_i-k+1)}(t) + \sum_{i=1}^{\breve{r}}\breve{\beta}_i(t)\breve{\varphi}_i(t), \tag{5}$$

где

$$X_\alpha(t) = Q(t)X(t), \qquad Y_\alpha(t) = P(t)\big[X^{-1}(t)\big]^*,$$

$X(t)$ — фундаментальная матрица однородной системы

$$\frac{dx_0}{dt} = M(t)x_0,$$

$$M(t) = P^*(t)L(t)Q(t),$$

$$Q(t) = [q_1(t), \ldots, q_\alpha(t)], \qquad P(t) = [p_1(t), \ldots, p_\alpha(t)],$$

$$\Phi_i(t) = \Big[\varphi_i^{(1)}(t), \ldots, \varphi_i^{(s_i)}(t)\Big], \qquad \Psi_i(t) = \Big[\psi_i^{(s_i)}(t), \ldots, \psi_i^{(1)}(t)\Big], \quad i = \overline{1,r},$$

$$\tilde{\Phi}_i(t) = \left[\tilde{\varphi}_i^{(\tilde{s}_i)}(t), \ldots, \tilde{\varphi}_i^{(1)}(t)\right], \qquad \hat{\Psi}_i(t) = \left[\hat{\psi}_i^{(1)}(t), \ldots, \hat{\psi}_i^{(\tilde{s}_i)}(t)\right], \quad i = \overline{1, \tilde{r}},$$

$$\hat{\Phi}_i(t) = \left[\hat{\varphi}_i^{(1)}(t), \ldots, \hat{\varphi}_i^{(\hat{s}_i)}(t)\right], \qquad \tilde{\Psi}_i(t) = \left[\tilde{\psi}_i^{(\hat{s}_i)}(t), \ldots, \tilde{\psi}_i^{(1)}(t)\right], \quad i = \overline{1, \hat{r}},$$

c — произвольный постоянный вектор размерности α, I_i — нильпотентный блок Жордана размерности i, $\tilde{\beta}_i(t) \in C^\infty(\Delta)$, $i = \overline{1, \tilde{r}}$, $\breve{\beta}_i(t) \in C^\infty(\Delta)$, $i = \overline{1, \breve{r}}$, — произвольные скалярные функции.

Предположим, что равенства (3), (4) выполняются. Подставив (5) в (1) и сделав замену функций

$$F\left(t, x(t), \dot{x}(t)\right) = \tilde{F}\left(t, c, \breve{\beta}_1(t), \frac{d}{dt}\breve{\beta}_1(t), \ldots, \breve{\beta}_{\breve{r}}(t), \frac{d}{dt}\breve{\beta}_{\breve{r}}(t), \tilde{\beta}_1(t), \ldots\right.$$
$$\left.\ldots, \frac{d^{\tilde{s}_1+1}}{dt^{\tilde{s}_1+1}}\tilde{\beta}_1(t), \ldots, \tilde{\beta}_{\tilde{r}}(t), \ldots, \frac{d^{\tilde{s}_{\tilde{r}}+1}}{dt^{\tilde{s}_{\tilde{r}}+1}}\tilde{\beta}_{\tilde{r}}(t)\right), \tag{6}$$

$$G\left(t_0, x\left(t_0\right), t_1, x\left(t_1\right)\right) = \tilde{G}\left(c, t_0, \breve{\beta}_1\left(t_0\right), \ldots, \breve{\beta}_{\breve{r}}\left(t_0\right), \tilde{\beta}_1\left(t_0\right), \ldots, \frac{d^{\tilde{s}_1}}{dt^{\tilde{s}_1}}\tilde{\beta}_1(t)\Big|_{t=t_0}, \ldots\right.$$
$$\ldots, \tilde{\beta}_{\tilde{r}}\left(t_0\right), \ldots, \frac{d^{\tilde{s}_{\tilde{r}}}}{dt^{\tilde{s}_{\tilde{r}}}}\tilde{\beta}_{\tilde{r}}(t)\Big|_{t=t_0}, t_1, \breve{\beta}_1\left(t_1\right), \ldots, \breve{\beta}_{\breve{r}}(t_1), \tilde{\beta}_1(t_1), \ldots$$
$$\left.\ldots, \frac{d^{\tilde{s}_1}}{dt^{\tilde{s}_1}}\tilde{\beta}_1(t)\Big|_{t=t_1}, \ldots, \tilde{\beta}_{\tilde{r}}\left(t_1\right), \ldots, \frac{d^{\tilde{s}_{\tilde{r}}}}{dt^{\tilde{s}_{\tilde{r}}}}\tilde{\beta}_{\tilde{r}}(t)\Big|_{t=t_1}\right), \tag{7}$$

будем рассматривать задачи определения необходимых и достаточных условий существования допустимых экстремалей функционала

$$I = \int\limits_{t_0}^{t_1} \tilde{F}\left(t, c, \breve{\beta}_1(t), \frac{d}{dt}\breve{\beta}_1(t), \ldots, \breve{\beta}_{\breve{r}}(t), \frac{d}{dt}\breve{\beta}_{\breve{r}}(t), \tilde{\beta}_1(t), \ldots\right.$$
$$\left.\ldots, \frac{d^{\tilde{s}_1+1}}{dt^{\tilde{s}_1+1}}\tilde{\beta}_1(t), \ldots, \tilde{\beta}_{\tilde{r}}(t), \ldots, \frac{d^{\tilde{s}_{\tilde{r}}+1}}{dt^{\tilde{s}_{\tilde{r}}+1}}\tilde{\beta}_{\tilde{r}}(t)\right) dt +$$
$$+ \tilde{G}\left(t_0, c, \breve{\beta}_1(t_0), \ldots, \breve{\beta}_{\breve{r}}(t_0), \tilde{\beta}_1(t_0), \ldots, \frac{d^{\tilde{s}_1}}{dt^{\tilde{s}_1}}\tilde{\beta}_1(t)\Big|_{t=t_0}, \ldots\right.$$
$$\ldots, \tilde{\beta}_{\tilde{r}}(t_0), \ldots, \frac{d^{\tilde{s}_{\tilde{r}}}}{dt^{\tilde{s}_{\tilde{r}}}}\tilde{\beta}_{\tilde{r}}(t)\Big|_{t=t_0}, t_1, \breve{\beta}_1(t_1), \ldots, \breve{\beta}_{\breve{r}}(t_1), \tilde{\beta}_1(t_1), \ldots$$
$$\left.\ldots, \frac{d^{\tilde{s}_1}}{dt^{\tilde{s}_1}}\tilde{\beta}_1(t)\Big|_{t=t_1}, \ldots, \tilde{\beta}_{\tilde{r}}(t_1), \ldots, \frac{d^{\tilde{s}_{\tilde{r}}}}{dt^{\tilde{s}_{\tilde{r}}}}\tilde{\beta}_{\tilde{r}}(t)\Big|_{t=t_1}\right) \tag{8}$$

без связей. Для существования этих экстремалей должна быть разрешима система уравнений Эйлера – Пуассона и выполняться краевые условия, условия трансверсальности и стационарности [8].

Из (5) – (7) следует

$$\frac{\partial \tilde F}{\partial c} = \frac{\partial F}{\partial x(t)}\, X_\alpha(t) + \frac{\partial F}{\partial \dot x(t)}\,\frac{d}{dt}\, X_\alpha(t), \quad t \in [t_0; t_1], \tag{9}$$

$$\frac{\partial \tilde F}{\partial \tilde\beta_i(t)} = \frac{\partial F}{\partial x(t)} \tilde\varphi_i^{(\tilde s_i+1)}(t) + \frac{\partial F}{\partial \dot x(t)}\,\frac{d}{dt}\,\tilde\varphi_i^{(\tilde s_i+1)}(t), \quad i = \overline{1,\tilde r}, \quad t \in [t_0; t_1], \tag{10}$$

$$\frac{\partial \tilde F}{\partial \dfrac{d^j}{dt^j}\,\tilde\beta_i(t)} = \frac{\partial F}{\partial x(t)}\,\tilde\varphi_i^{(\tilde s_i+1-j)}(t) +$$

$$+\,\frac{\partial F}{\partial \dot x(t)}\,\left(\frac{d}{dt}\,\tilde\varphi_i^{(\tilde s_i+1-j)}(t) + \tilde\varphi_i^{(\tilde s_i+2-j)}(t)\right), \quad j = \overline{1,\tilde s_i}, \quad i = \overline{1,\tilde r}, \quad t \in [t_0; t_1], \tag{11}$$

$$\frac{\partial \tilde F}{\partial \dfrac{d^{\tilde s_i+1}}{dt^{\tilde s_i+1}}\tilde\beta_i(t)} = \frac{\partial F}{\partial \dot x(t)}\,\tilde\varphi_i^{(1)}(t), \quad i = \overline{1,\tilde r}, \quad t \in [t_0; t_1], \tag{12}$$

$$\frac{\partial \tilde F}{\partial \breve\beta_i(t)} = \frac{\partial F}{\partial x(t)}\,\breve\varphi_i(t) + \frac{\partial F}{\partial \dot x(t)}\,\frac{d}{dt}\,\breve\varphi_i(t), \quad i = \overline{1,\breve r}, \quad t \in [t_0; t_1], \tag{13}$$

$$\frac{\partial \tilde F}{\partial \dfrac{d}{dt}\breve\beta_i(t)} = \frac{\partial F}{\partial \dot x(t)}\,\breve\varphi_i(t), \quad i = \overline{1,\breve r}, \quad t \in [t_0; t_1], \tag{14}$$

$$\frac{\partial \tilde G}{\partial c} = \sum_{l=0}^{1} \frac{\partial G}{\partial x(t_l)}\, X_\alpha(t_l), \tag{15}$$

$$\frac{\partial \tilde G}{\partial \dfrac{d^j}{dt^j}\tilde\beta_i(t_l)} = \frac{\partial G}{\partial x(t_l)}\,\tilde\varphi_i^{(\tilde s_i+1-j)}(t_l), \quad j = \overline{0,\tilde s_i}, \quad i = \overline{1,\tilde r}, \quad l = 0,1, \tag{16}$$

$$\frac{\partial \tilde G}{\partial \breve\beta_i(t_l)} = \frac{\partial G}{\partial x(t_l)}\,\breve\varphi_i(t_l), \quad i = \overline{1,\breve r}, \quad l = 0,1. \tag{17}$$

Теорема 1. *Для существования экстремалей в задаче Больца (1), (2) необходимо и достаточно выполнения равенств (3), (4) и соотношений*

$$\sum_{j=0}^{\tilde s_i} (-1)^j \frac{d^j}{dt^j}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x(t)} - \frac{d}{dt}\,\frac{\partial F}{\partial \dot x(t)}\right)\tilde\varphi_i^{(\tilde s_i-j+1)}(t)\right] = 0, \quad i = \overline{1,\tilde r}, \quad t \in [t_0; t_1], \tag{18}$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x(t)} - \frac{d}{dt}\,\frac{\partial F}{\partial \dot x(t)}\right)\breve\varphi_i(t) = 0, \quad i = \overline{1,\breve r}, \quad t \in [t_0; t_1]. \tag{19}$$

Доказательство. Система уравнений Эйлера – Пуассона функционала (8) имеет вид [8]:

$$\sum_{j=0}^{\tilde{s}_i+1}(-1)^j \frac{d^j}{dt^j}\,\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \dfrac{d^j}{dt^j}\,\tilde{\beta}_i(t)} = 0, \quad i=\overline{1,\tilde{r}}, \quad t\in[t_0;t_1], \tag{20}$$

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \breve{\beta}_i(t)} - \frac{d}{dt}\,\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \dfrac{d}{dt}\,\breve{\beta}_i(t)} = 0, \quad i=\overline{1,\breve{r}}, \quad t\in[t_0;t_1]. \tag{21}$$

Подставив (10) – (14) в (20), (21), получим (18), (19).

Теорема 1 доказана.

В дальнейшем будем предполагать, что равенства (3), (4), (18), (19) выполняются.

Рассмотрим различные виды краевых условий. Пусть l фиксировано.

1. Неподвижный конец:

$$x(t_l) = x_l, \tag{22}$$

где x_l — постоянный вектор размерности $n,\ t_l,\ x_l$ заданы. В этом случае для существования допустимых экстремалей в задаче Больца (1), (2) необходима разрешимость задачи Коши (2), (22). Для ее разрешимости согласно [4] необходимо и достаточно выполнения равенств (3), (4) и соотношений

$$\sum_{k=0}^{j-1}\frac{d^k}{dt^k}\left(A(t)x_l+f(t),\psi_i^{(j-k)}(t)\right)\Big|_{t=t_l} = 0, \quad j=\overline{1,s_i}, \quad i=\overline{1,r}, \tag{23}$$

$$\sum_{k=0}^{j-1}\frac{d^k}{dt^k}\left(A(t)x_l+f(t),\tilde{\psi}_i^{(j-k)}(t)\right)\Big|_{t=t_l} = 0, \quad j=\overline{1,\hat{s}_i}, \quad i=\overline{1,\hat{r}}. \tag{24}$$

При их выполнении она имеет решения

$$\begin{aligned} x(t) = {} & X_\alpha(t)\left[Y_\alpha^*(t_l)B(t_l)x_l + \int\limits_{t_l}^{t} Y_\alpha^*(\tau)f(\tau)\,d\tau\right] - \sum_{i=1}^{r}\Phi_i(t)\sum_{k=0}^{s_i-1} I_{s_i}^k \frac{d^k}{dt^k}\left[\Psi_i^*(t)f(t)\right] - \\ & - \sum_{i=1}^{\tilde{r}}\tilde{\Phi}_i(t)\sum_{k=0}^{\tilde{s}_i-1}\left(I_{\tilde{s}_i}^T\right)^k\frac{d^k}{dt^k}\left[\hat{\Psi}_i^*(t)f(t)\right] - \sum_{i=1}^{\hat{r}}\hat{\Phi}_i(t)\sum_{k=0}^{\hat{s}_i-1} I_{\hat{s}_i}^k\frac{d^k}{dt^k}\left[\tilde{\Psi}_i^*(t)f(t)\right] + \\ & + \sum_{i=1}^{\tilde{r}}\sum_{k=0}^{\tilde{s}_i}\left[\frac{d^k}{dt^k}\,\tilde{\beta}_i(t)\right]\tilde{\varphi}_i^{(\tilde{s}_i-k+1)}(t) + \sum_{i=1}^{\breve{r}}\breve{\beta}_i(t)\breve{\varphi}_i(t), \end{aligned} \tag{25}$$

$$\tilde{\beta}_i(t_l) = \left(x_l, B^*(t_l)\hat{\psi}_i^{(1)}(t_l)\right), \quad i=\overline{1,\tilde{r}}, \tag{26}$$

$$\frac{d^j}{dt^j}\,\tilde{\beta}_i(t)\Big|_{t=t_l} = \left[\left(x_l, L^*(t)\hat{\psi}_i^{(j)}(t)\right) + \sum_{k=0}^{j-1}\frac{d^k}{dt^k}\left(f(t),\hat{\psi}_i^{(j-k)}(t)\right)\right]\Bigg|_{t=t_l}, \quad j=\overline{1,\tilde{s}_i}, \quad i=\overline{1,\tilde{r}}, \tag{27}$$

$$\breve{\beta}_i(t_l) = \left(x_l, \breve{\psi}_i(t_l)\right), \quad i=\overline{1,\breve{r}}. \tag{28}$$

Теорема 2. *Для существования допустимых экстремалей в соответствующей (1), (2) задаче Лагранжа с двумя неподвижными концами (22) при $l = 0, 1$ необходимо выполнение равенств (23), (24) и соотношения*

$$Y_\alpha^*(t_1)B(t_1)x_1 = Y_\alpha^*(t_0)B(t_0)x_0 + \int\limits_{t_0}^{t_1} Y_\alpha^*(\tau)f(\tau)\,d\tau. \tag{29}$$

Доказательство. Для существования допустимых экстремалей функционала (8) необходима разрешимость краевой задачи (2), (22). Для ее разрешимости необходима разрешимость задач Коши (2), (22) для каждого из концов отрезка. Приравнивая их решения (25) – (28), с учетом линейной независимости векторов множества 1 получаем (29).

Теорема 2 доказана.

2. Подвижный конец: t_l задано, условие (22) отсутствует.

Теорема 3. *Для существования допустимых экстремалей в задаче Больца (1), (2) с подвижным концом необходимо выполнение равенств*

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}(t)}\,\tilde{\varphi}_i^{(\tilde{s}_i+1-j)}(t) + \sum_{k=0}^{\tilde{s}_i-1-j}(-1)^k\frac{d^k}{dt^k}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x(t)} - \frac{d}{dt}\,\frac{\partial F}{\partial \dot{x}(t)}\right)\tilde{\varphi}_i^{(\tilde{s}_i-j-k)}(t)\right] +$$
$$+ (-1)^{l+1}\,\frac{\partial G}{\partial x(t_l)}\,\tilde{\varphi}_i^{(\tilde{s}_i+1-j)}(t) = 0, \quad j = \overline{0, \tilde{s}_i}, \quad i = \overline{1, \tilde{r}}, \quad t = t_l, \tag{30}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}(t)}\breve{\varphi}_i(t) + (-1)^{l+1}\frac{\partial G}{\partial x(t_l)}\breve{\varphi}_i(t) = 0, \quad i = \overline{1, \breve{r}}, \quad t = t_l. \tag{31}$$

Доказательство. Для существования допустимых экстремалей функционала (8) согласно [8] необходимо выполнение условий трансверсальности

$$\sum_{k=0}^{\tilde{s}_i-j}(-1)^k\frac{d^k}{dt^k}\,\frac{\partial\tilde{F}}{\partial\dfrac{d^{j+k+1}}{dt^{j+k+1}}\,\tilde{\beta}_i(t)} + (-1)^{l+1}\frac{\partial\tilde{G}}{\partial\dfrac{d^j}{dt^j}\,\tilde{\beta}_i(t_l)} = 0, \quad j = \overline{0, \tilde{s}_i}, \quad i = \overline{1, \tilde{r}}, \quad t = t_l, \tag{32}$$

$$\frac{\partial\tilde{F}}{\partial\dfrac{d}{dt}\,\breve{\beta}_i(t)} + (-1)^{l+1}\,\frac{\partial\tilde{G}}{\partial\breve{\beta}_i(t_l)} = 0, \quad i = \overline{1, \breve{r}}, \quad t = t_l. \tag{33}$$

Подставив (10) – (14), (16), (17) в (32), (33), получим (30), (31).

Теорема 3 доказана.

3. Свободная граница: $t_l,\ x_l$ не заданы.

Теорема 4. *Для существования допустимых экстремалей в задаче Больца (1), (2) со свободной границей необходимо выполнение равенств (30), (31) и соотношения*

$$F - \sum_{i=1}^{\tilde{r}}\sum_{j=0}^{\tilde{s}_i}\left\{\frac{\partial F}{\partial\dot{x}(t)}\,\tilde{\varphi}_i^{(\tilde{s}_i+1-j)}(t) + \sum_{k=0}^{\tilde{s}_i-1-j}(-1)^k\,\frac{d^k}{dt^k}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x(t)} - \frac{d}{dt}\,\frac{\partial F}{\partial\dot{x}(t)}\right)\tilde{\varphi}_i^{(\tilde{s}_i-j-k)}(t)\right]\right\}\times$$
$$\times\,\frac{d^{j+1}}{dt^{j+1}}\,\tilde{\beta}_i(t) - \sum_{i=1}^{\breve{r}}\frac{\partial F}{\partial\dot{x}(t)}\,\breve{\varphi}_i(t)\,\frac{d}{dt}\,\breve{\beta}_i(t) + (-1)^{l+1}\,\frac{\partial G}{\partial t_l} = 0, \quad t = t_l. \tag{34}$$

Доказательство. Для существования допустимых экстремалей функционала (8) согласно [8] необходимо выполнение условий трансверсальности (32), (33) и условий стационарности

$$\tilde F-\sum_{i=1}^{\tilde r}\sum_{j=0}^{\tilde s_i}\sum_{k=0}^{\tilde s_i-j}(-1)^k\frac{d^k}{dt^k}\,\frac{\partial\tilde F}{\partial\dfrac{d^{j+k+1}}{dt^{j+k+1}}\tilde\beta_i(t)}\,\frac{d^{j+1}}{dt^{j+1}}\,\tilde\beta_i(t)-$$

$$-\sum_{i=1}^{\breve r}\frac{\partial\tilde F}{\partial\dfrac{d}{dt}\,\breve\beta_i(t)}\,\frac{d}{dt}\breve\beta_i(t)+(-1)^{l+1}\frac{\partial\tilde G}{\partial t_l}=0,\quad t=t_l. \tag{35}$$

Подставив (10) – (14), (16), (17) в (32), (33), (35), получим (30), (31), (34).

Теорема 4 доказана.

Замечание 1. Вместо равенств (34), (35) можно рассматривать равенства

$$F+(-1)^{l+1}\left[\frac{\partial G}{\partial t_l}+\sum_{i=1}^{\tilde r}\sum_{j=0}^{\tilde s_i}\frac{\partial G}{\partial x(t_l)}\,\tilde\varphi_i^{(\tilde s_i+1-j)}(t)\,\frac{d^{j+1}}{dt^{j+1}}\,\tilde\beta_i(t)+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{\breve r}\frac{\partial G}{\partial x(t_l)}\,\breve\varphi_i(t)\,\frac{d}{dt}\,\breve\beta_i(t)\right]=0,\quad t=t_l,$$

$$F+(-1)^{l+1}\left[\frac{\partial\tilde G}{\partial t_l}+\sum_{i=1}^{\tilde r}\sum_{j=0}^{\tilde s_i}\frac{\partial\tilde G}{\partial\dfrac{d^j}{dt_l^j}\,\tilde\beta_i(t_l)}\,\frac{d^{j+1}}{dt^{j+1}}\,\tilde\beta_i(t)+\sum_{i=1}^{\breve r}\frac{\partial\tilde G}{\partial\breve\beta_i(t_l)}\,\frac{d}{dt}\,\breve\beta_i(t)\right]=0,\quad t=t_l,$$

соответственно.

4. Подвижная граница:

$$x(t_l)=g(t_l), \tag{36}$$

где $g(t)\in C^\infty(\Delta)$ — заданная вектор-функция размерности $n,\ t_l$ не задано.

Равенства (23), (24), (26)–(28) имеют вид

$$\sum_{k=0}^{j-1}\frac{d^k}{dt^k}\left(A(t)g(t_l)+f(t),\psi_i^{(j-k)}(t)\right)\Big|_{t=t_l}=0,\quad j=\overline{1,s_i},\quad i=\overline{1,r}, \tag{37}$$

$$\sum_{k=0}^{j-1}\frac{d^k}{dt^k}\left(A(t)g(t_l)+f(t),\tilde\psi_i^{(j-k)}(t)\right)\Big|_{t=t_l}=0,\quad j=\overline{1,\hat s_i},\quad i=\overline{1,\hat r}, \tag{38}$$

$$\tilde\beta_i(t_l)=\left(g(t_l),B^*(t_l)\hat\psi_i^{(1)}(t_l)\right),\quad i=\overline{1,\tilde r}, \tag{39}$$

$$\frac{d^j}{dt^j}\,\tilde\beta_i(t)\Big|_{t=t_l}=\left[\left(g(t_l),L^*(t)\hat\psi_i^{(j)}(t)\right)+\sum_{k=0}^{j-1}\frac{d^k}{dt^k}\left(f(t),\hat\psi_i^{(j-k)}(t)\right)\right]\Bigg|_{t=t_l},\quad j=\overline{1,\tilde s_i},\quad i=\overline{1,\tilde r}, \tag{40}$$

$$\breve{\beta}_i(t_l) = \big(g(t_l), \breve{\psi}_i(t_l)\big), \quad i = \overline{1, \breve{r}}. \tag{41}$$

Поскольку все матрицы и векторы, входящие в равенства (37), (38), принадлежат $C^\infty(\Delta)$, то эти равенства могут выполняться или на всем отрезке Δ, или в изолированных точках $t_l \in \Delta$.

Теорема 5. *Если равенства (37), (38) выполняются на всем отрезке* Δ, *то для существования допустимых экстремалей в задаче Больца (1), (2) с подвижной границей (36) необходимо выполнение равенства*

$$\begin{aligned}
F + \sum_{i=1}^{\tilde{r}} \Bigg\{ \Bigg[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}(t)} \tilde{\varphi}_i^{(\tilde{s}_i+1)}(t) + \sum_{k=0}^{\tilde{s}_i-1} (-1)^k \frac{d^k}{dt^k} \bigg(\Big(\frac{\partial F}{\partial x(t)} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}(t)} \Big) \tilde{\varphi}_i^{(\tilde{s}_i-k)}(t) \bigg) \Bigg] \times \\
\times \left[\frac{d}{dt} \Big(g(t), B^*(t) \hat{\psi}_i^{(1)}(t) \Big) - \Big(g(t), L^*(t) \hat{\psi}_i^{(1)}(t) \Big) - \Big(f(t), \hat{\psi}_i^{(1)}(t) \Big) \right] + \\
+ \sum_{j=1}^{\tilde{s}_i-1} \Bigg[\Bigg[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}(t)} \tilde{\varphi}_i^{(\tilde{s}_i+1-j)}(t) + \sum_{k=0}^{\tilde{s}_i-1-j} (-1)^k \frac{d^k}{dt^k} \bigg(\Big(\frac{\partial F}{\partial x(t)} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}(t)} \Big) \tilde{\varphi}_i^{(\tilde{s}_i-j-k)}(t) \bigg) \Bigg] \times \\
\times \left[\frac{d}{dt} \Big(g(t), L^*(t) \hat{\psi}_i^{(k)}(t) \Big) - \Big(g(t), L^*(t) \hat{\psi}_i^{(k+1)}(t) \Big) - \Big(f(t), \hat{\psi}_i^{(j+1)}(t) \Big) \right] \Bigg] + \\
+ \frac{\partial F}{\partial \dot{x}(t)} \tilde{\varphi}_i^{(1)}(t) \left[\frac{d}{dt} \left[\Big(g(t), L^*(t) \hat{\psi}_i^{(\tilde{s}_i)}(t) \Big) + \sum_{k=0}^{\tilde{s}_i-1} \frac{d^j}{dt^j} \Big(f(t), \hat{\psi}_i^{(\tilde{s}_i-k)}(t) \Big) \right] - \frac{d^{\tilde{s}_1+1}}{dt^{\tilde{s}_1+1}} \tilde{\beta}_i(t) \right] \Bigg\} + \\
+ \sum_{i=1}^{\breve{r}} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}(t)} \breve{\varphi}_i(t) \frac{d}{dt} \Big[\big(g(t), \breve{\psi}_i(t) \big) - \breve{\beta}_i(t) \Big] + \\
+ (-1)^{l+1} \Bigg\{ \frac{\partial G}{\partial t_l} + \sum_{i=1}^{\tilde{r}} \Bigg[\frac{\partial G}{\partial x(t_l)} \tilde{\varphi}_i^{(\tilde{s}_i+1)}(t) \frac{d}{dt} \Big(g(t), B^*(t) \hat{\psi}_i^{(1)}(t) \Big) + \\
+ \sum_{j=1}^{\tilde{s}_i} \frac{\partial G}{\partial x(t_l)} \tilde{\varphi}_i^{(\tilde{s}_i+1-j)}(t) \frac{d}{dt} \left[\Big(g(t), L^*(t) \hat{\psi}_i^{(j)}(t) \Big) + \sum_{k=0}^{j-1} \frac{d^k}{dt^k} \Big(f(t), \hat{\psi}_i^{(j-k)}(t) \Big) \right] \Bigg] + \\
+ \sum_{i=1}^{\breve{r}} \frac{\partial G}{\partial x(t)} \breve{\varphi}_i(t) \frac{d}{dt} \big(g(t), \breve{\psi}_i(t) \big) \Bigg\} = 0, \quad t = t_l.
\end{aligned} \tag{42}$$

Доказательство. Для существования допустимых экстремалей функционала (8) согласно [8] и (26) – (28) необходимо выполнение условий трансверсальности

$$\tilde{F} + \sum_{i=1}^{\tilde{r}} \Bigg\{ \sum_{k=0}^{\tilde{s}_i} (-1)^k \frac{d^k}{dt^k} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} \tilde{\beta}_i(t)} \frac{d}{dt} \Big[\Big(g(t), B^*(t) \hat{\psi}_i^{(1)}(t) \Big) - \tilde{\beta}_i(t) \Big] +$$

$$+\sum_{j=1}^{\tilde{s}_i}\sum_{k=0}^{\tilde{s}_i-j}(-1)^k\frac{d^k}{dt^k}\,\frac{\partial\tilde{F}}{\partial\dfrac{d^{j+k+1}}{dt^{j+k+1}}\,\tilde{\beta}_i(t)}\,\frac{d}{dt}\left[\left(g(t),L^*(t)\hat{\psi}_i^{(j)}(t)\right)+\sum_{k=0}^{j-1}\frac{d^k}{dt^k}\left(f(t),\hat{\psi}_i^{(j-k)}(t)\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{d^j}{dt^j}\,\tilde{\beta}_i(t)\right]\Bigg\}-\sum_{i=1}^{\check{r}}\frac{\partial\tilde{F}}{\partial\dfrac{d}{dt}\,\check{\beta}_i(t)}\,\frac{d}{dt}\left[\left(g(t),\check{\psi}_i(t)\right)-\check{\beta}_i(t)\right]+$$

$$+(-1)^{l+1}\left[\frac{\partial\tilde{G}}{\partial t_l}+\sum_{i=1}^{\tilde{r}}\sum_{j=0}^{\tilde{s}_i}\frac{\partial\tilde{G}}{\partial\dfrac{d^j}{dt_l^j}\,\tilde{\beta}_i(t_l)}\,\frac{d^{j+1}}{dt^{j+1}}\,\tilde{\beta}_i(t)+\sum_{i=1}^{\check{r}}\frac{\partial\tilde{G}}{\partial\check{\beta}_i(t_l)}\,\frac{d}{-}\check{\beta}_i(t)\right]=0,\quad t=t_l. \tag{43}$$

Подставив (10) – (14), (16), (17), (39) – (41) в (43), получим (42).

Теорема 5 доказана.

Если хотя бы одно из равенств (37), (38) выполняется только в изолированных точках отрезка Δ, то следует рассматривать задачи Больца с неподвижным концом (36) в каждой из этих точек.

Теорема 6. *Для существования допустимых экстремалей в задаче Больца (1), (2) с краевыми условиями необходимо и достаточно выполнения равенств (3), (4), (18), (19), краевых условий, условий трансверсальности и стационарности. Если из всех этих равенств вектор c не определяется, то он должен быть критической точкой функционала (1):*

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial F}{\partial x(t)}\,X_\alpha(t)+\frac{\partial F}{\partial\dot{x}}\,\frac{d}{dt}\,\tilde{X}_\alpha(t)\right)dt+\sum_{l=0}^{1}\frac{\partial G}{\partial x(t_l)}\,X_\alpha(t_l)=0. \tag{44}$$

Если вектор c определяется частично, то аналогичное равенство должно выполняться для вектора, составленного из тех координат вектора c, которые не определяются из этих условий.

Доказательство. Вектор c должен быть критической точкой функционала (8):

$$\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial\tilde{F}}{\partial c}\,dt+\frac{\partial\tilde{G}}{\partial c}=0. \tag{45}$$

Подставив (9), (15) в (45), получим (44).

Теорема 6 доказана.

Пример. Рассмотрим задачи Лагранжа с двумя подвижными концами (1), (2) и с двумя неподвижными концами (1), (2), (22). Пусть в (1), (2), (22) $m=n=2$,

$$B(t)=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\quad A(t)=\begin{bmatrix}a_{11}(t)&a_{12}(t)\\a_{21}(t)&a_{22}(t)\end{bmatrix},\quad f(t)=\begin{bmatrix}f_1(t)\\f_2(t)\end{bmatrix},\quad x(t)=\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix},$$

$$x_l=\begin{bmatrix}x_{l1}\\x_{l2}\end{bmatrix},\quad l=0,1,\quad F(t,x(t),\dot{x}(t))=x_1^2(t)+\xi(t)\dot{x}_1(t),$$

$a_{ij}(t) \in C^\infty[t_0;t_1],\ i,j=1,2,\ f_i(t) \in C^\infty[t_0;t_1],\ i=1,2,\ \xi(t) \in C^\infty[t_0;t_1]$ — действительные скалярные функции, $x_{li},\ i=1,2,\ l=0,1,$ — действительные числа.

Рассмотрим следующие случаи [4, 6]:

1. $a_{22}(t) \neq 0\ \forall t \in [t_0;t_1]$. Имеем: $r=1,\ s_1=1,\ \check{r}=\breve{r}=\tilde{r}=\hat{r}=0,\ \alpha=1,$

$$\Phi_1(t)=\varphi_1^{(1)}(t)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\quad \Psi_1(t)=\psi_1^{(1)}(t)=\begin{bmatrix}0\\a_{22}^{-1}(t)\end{bmatrix},$$

$$Q(t)=q_1(t)=\begin{bmatrix}1\\-a_{21}(t)a_{22}^{-1}(t)\end{bmatrix},\quad P(t)=p_1(t)=\begin{bmatrix}1\\-a_{12}(t)a_{22}^{-1}(t)\end{bmatrix},$$

$$M(t)=m_{11}(t)=a_{11}(t)-a_{12}(t)a_{21}(t)a_{22}^{-1}(t).$$

Условия (3), (4), (18), (19), (24), (30), (31) отсутствуют.

Система (2) имеет общее решение (5):

$$x(t)=\begin{bmatrix}1\\-a_{21}(t)a_{22}^{-1}(t)\end{bmatrix}\exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} m_{11}(z)dz\right)\times$$

$$\times\left[c+\int\limits_{t_0}^{t}\exp\left(-\int\limits_{t_0}^{\tau} m_{11}(z)dz\right)\big(f_1(\tau)-a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau)f_2(\tau)\big)\,d\tau\right]-\begin{bmatrix}0\\a_{22}^{-1}(t)f_2(t)\end{bmatrix}.$$

Из условия (44) следует, что задача (1), (2) имеет единственную допустимую экстремаль

$$x(t)=\begin{bmatrix}1\\-a_{21}(t)a_{22}^{-1}(t)\end{bmatrix}\exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} m_{11}(z)dz\right)\left\{-\left[\int\limits_{t_0}^{t_1}\exp\left(2\int_{t_0}^{\sigma} m_{11}(z)dz\right)d\sigma\right]^{-1}\times\right.$$

$$\times\int\limits_{t_0}^{t_1}\left[\exp\left(\int\limits_{t_0}^{\sigma} m_{11}(z)dz\right)\int\limits_{t_0}^{\sigma}\exp\left(-\int\limits_{t_0}^{\tau} m_{11}(z)dz\right)\big(f_1(\tau)-a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau)f_2(\tau)\big)\ d\tau+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\,\xi\left(\sigma\right)m_{11}\left(\sigma\right)\right]\exp\left(\int_{t_0}^{\sigma} m_{11}(z)dz\right)d\sigma+\int\limits_{t_0}^{t}\exp\left(-\int\limits_{t_0}^{\tau} m_{11}(z)dz\right)\times$$

$$\left.\times\ \big(f_1(\tau)-a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau)f_2(\tau)\big)\,d\tau\right\}-\begin{bmatrix}0\\a_{22}^{-1}(t)f_2(t)\end{bmatrix}.$$

При выполнении условий (23), (29)

$$x_{02}=-a_{21}\left(t_0\right)a_{22}^{-1}\left(t_0\right)x_{01}-a_{22}^{-1}\left(t_0\right)f_2\left(t_0\right),$$

$$x_{11} = \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t_1} m_{11}(z)dz\right) \times$$

$$\times \left[x_{01} + \int\limits_{t_0}^{t_1} \exp\left(-\int\limits_{t_0}^{\tau} m_{11}(z)dz\right) \big(f_1(\tau) - a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau)f_2(\tau)\big)\ d\tau\right],$$

$$x_{12} = -a_{21}\left(t_1\right) a_{22}^{-1}\left(t_1\right) \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t_1} m_{11}(z)dz\right) \times$$

$$\times \left[x_{01} + \int\limits_{t_0}^{t_1} \exp\left(-\int\limits_{t_0}^{\tau} m_{11}(z)dz\right)\big(f_1(\tau) - a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau)f_2(\tau)\big)\ d\tau\right] - a_{22}^{-1}\left(t_1\right) f_2\left(t_1\right)$$

задача (1), (2), (22) также имеет единственную допустимую экстремаль

$$x(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{21}(t_{22}^{-1}(t) \end{bmatrix} \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} m_{11}(z)dz\right) \times$$

$$\times \left[x_{01} + \int\limits_{t_0}^{t} \exp\left(-\int\limits_{t_0}^{\tau} m_{11}(z)dz\right)\big(f_1(\tau) - a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau)f_2(\tau)\big)\ d\tau\right] - \begin{bmatrix} 0 \\ a_{22}^{-1}(t)f_2(t) \end{bmatrix}.$$

2. $a_{22}(t) \equiv 0,\ a_{12}(t) \neq 0,\ a_{21}(t) \neq 0\ \forall t \in [t_0; t_1]$. Имеем: $r = 1,\ s_1 = 2,\ \check{r} = \check{r} = \tilde{r} = \hat{r} = 0$, $\alpha = 0$,

$$\varphi_1^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \varphi_1^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} a_{12}(t) \\ a_{12}^{-1}(t)\,\dfrac{d}{dt}\,a_{12}(t) - a_{11}(t) \end{bmatrix},$$

$$\psi_1^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ a_{12}^{-1}(t)a_{21}^{-1}(t) \end{bmatrix}, \quad \psi_1^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} a_{12}^{-1}(t) \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\Phi_1(t) = \begin{bmatrix} 0 & a_{12}(t) \\ 1 & a_{12}^{-1}(t)\dfrac{d}{dt}\,a_{12}(t) - a_{11}(t) \end{bmatrix}, \quad \Psi_1(t) = \begin{bmatrix} a_{12}^{-1}(t) & 0 \\ 0 & a_{12}^{-1}(t)a_{21}^{-1}(t) \end{bmatrix}.$$

Условия (3), (4), (18), (19), (24), (29) – (31), (44) отсутствуют.

Система (2) имеет единственное решение (5):

$$x(t) = \begin{bmatrix} -a_{21}^{-1}(t)f_2(t) \\ a_{12}^{-1}(t)\big[a_{11}(t)a_{21}^{-1}(t)f_2(t) - f_1(t) - \frac{d}{dt}\left(a_{21}^{-1}(t)f_2(t)\right)\big] \end{bmatrix},$$

которое является допустимой экстремалью в задаче (1), (2) и при выполнении условия (23)

$$x_{l1} = -a_{21}^{-1}(t_l)f_2(t_l), \quad l = 0, 1,$$

$$x_{l2} = a_{12}^{-1}(t_l)\left[a_{11}(t_l)a_{21}^{-1}(t_l)f_2(t_l) - f_1(t_l) - \frac{d}{dt}\left(a_{21}^{-1}(t)f_2(t)\right)\Big|_{t=t_l}\right], \quad l = 0, 1,$$

также в задаче (1), (2), (22).

3. $a_{22}(t) \equiv 0,\ a_{12}(t) \neq 0,\ a_{21}(t) \equiv 0\ \forall t \in [t_0; t_1]$. Имеем: $\tilde{r} = 1,\ \tilde{s}_1 = 1,\ \check{r} = 1,\ \breve{r} = r = \hat{r} = 0,\ \alpha = 0,$

$$\tilde{\Phi}_1(t) = \tilde{\varphi}_1^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\varphi}_1^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} a_{12}(t) \\ a_{12}^{-1}(t)\dfrac{d}{dt}\,a_{12}(t) - a_{11}(t) \end{bmatrix},$$

$$\breve{\psi}_1(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{\Psi}_1(t) = \hat{\psi}_1^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} a_{12}^{-1}(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \check{\varphi}_1(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Условия (3), (19), (23), (24), (29), (31), (44) отсутствуют, (30) при $j = 1$ выполняется.

При выполнении условия (4)

$$f_2(t) \equiv 0, \quad t \in [t_0; t_1],$$

система (2) имеет общее решение (5):

$$x(t) = \begin{bmatrix} a_{12}(t)\tilde{\beta}_1(t) \\ a_{12}^{-1}(t)\tilde{\beta}_1(t)\,\dfrac{d}{dt}\,a_{12}(t) - a_{11}(t)\tilde{\beta}_1(t) - a_{12}^{-1}(t)f_1(t) + \dfrac{d}{dt}\,\tilde{\beta}_1(t) \end{bmatrix}.$$

Из условия (18)

$$\tilde{\beta}_1(t) = \frac{1}{2}\,a_{12}^{-1}(t)\frac{d}{dt}\xi(t), \quad t \in [t_0; t_1],$$

следует, что обе рассматриваемые задачи имеют единственную экстремаль

$$x(t) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2}\,\dfrac{d}{dt}\,\xi(t) \\ -\dfrac{1}{2}\,a_{11}(t)a_{12}^{-1}(t)\dfrac{d}{dt}\xi(t) + \dfrac{1}{2}\,a_{12}^{-1}(t)\dfrac{d^2}{dt^2}\,\xi(t) - a_{12}^{-1}(t)f_1(t) \end{bmatrix}.$$

Если выполняется условие (30) при $j = 0$

$$\xi(t_l) = 0, \quad l = 0, 1,$$

то она является допустимой экстремалью в задаче (1), (2).

Если выполняются условия (26), (27)

$$x_{l1} = \frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\xi(t)\Big|_{t=t_l}, \quad l = 0, 1,$$

$$x_{l2} = -\frac{1}{2}\,a_{11}(t_l)a_{12}^{-1}(t_l)\,\frac{d}{dt}\,\xi(t)\Big|_{t=t_l} + \frac{1}{2}\,a_{12}^{-1}(t_l)\,\frac{d^2}{dt^2}\,\xi(t)\Big|_{t=t_l} - a_{12}^{-1}(t_l)f_1(t_l), \quad l = 0, 1,$$

то она является допустимой экстремалью в задаче (1), (2), (22).

4. $a_{22}(t) \equiv 0,\ a_{12}(t) \equiv 0,\ a_{21}(t) \neq 0\ \forall t \in [t_0; t_1]$. Имеем: $\check{r} = 1,\ \hat{r} = 1,\ \hat{s}_1 = 1,$ $\tilde{r} = r = \check{r} = 0,\ \alpha = 0,$

$$\check{\varphi}_1(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\Psi}_1(t) = \tilde{\psi}_1^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\psi}_1^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} a_{21}(t) \\ -a_{11}(t) - a_{21}^{-1}(t)\dfrac{d}{dt}\, a_{21}(t) \end{bmatrix},$$

$$\hat{\Phi}_1(t) = \hat{\varphi}_1^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} a_{21}^{-1}(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \check{\psi}_1(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Условия (4), (18), (23), (29), (30), (44) отсутствуют, (19), (31) выполняются.

При выполнении условия (3)

$$f_1(t) = a_{11}(t)a_{21}^{-1}(t)f_2(t) + a_{21}^{-2}(t)f_2(t)\frac{d}{dt}\, a_{21}(t) - a_{21}^{-1}(t)\frac{d}{dt}\, f_2(t), \quad t \in [t_0; t_1]$$

система (2) имеет общее решение (5):

$$x(t) = \begin{bmatrix} -a_{21}^{-1}(t)f_2(t) \\ \check{\beta}_1(t) \end{bmatrix}.$$

Все эти решения являются допустимыми экстремалями в задаче (1), (2).

При выполнении условий (24), (28)

$$x_{l1} = -a_{21}^{-1}(t_l)f_2(t_l), \quad l = 0, 1,$$

$$\check{\beta}_1(t_l) = x_{l2}, \quad l = 0, 1$$

они являются допустимыми экстремалями в задаче (1), (2), (22).

5. $a_{22}(t) \equiv 0,\ a_{12}(t) \equiv 0,\ a_{21}(t) \equiv 0\ \forall t \in [t_0; t_1]$. Имеем: $\check{r} = 1,\ \check{r} = 1,\ \tilde{r} = r = \hat{r} = 0,$ $\alpha = 1,$

$$\check{\varphi}_1(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \check{\psi}_1(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \check{\varphi}_1(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \check{\psi}_1(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$Q(t) = q_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P(t) = p_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad M(t) = a_{11}(t).$$

Условия (3), (18), (23), (24), (30) отсутствуют, (19), (31) выполняются.

При выполнении условия (4)

$$f_2(t) \equiv 0, \quad t \in [t_0; t_1],$$

система (2) имеет общее решение (5):

$$x(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} a_{11}(z)dz \right) \left[c + \int\limits_{t_0}^{t} \exp\left(- \int\limits_{t_0}^{\tau} a_{11}(z)dz \right) f_1(\tau)\, d\tau \right] + \begin{bmatrix} 0 \\ \check{\beta}_1(t) \end{bmatrix}.$$

Из условия (44) следует, что задача (1), (2) имеет допустимые экстремали

$$x(t) = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} a_{11}(z)dz\right)\left\{-\left[\int\limits_{t_0}^{t_1} \exp\left(2\int\limits_{t_0}^{\sigma} a_{11}(z)dz\right)d\sigma\right]^{-1} \times\right.$$

$$\times \int\limits_{t_0}^{t_1}\left[\exp\left(\int\limits_{t_0}^{\sigma} a_{11}(z)dz\right)\int\limits_{t_0}^{\sigma}\exp\left(-\int\limits_{t_0}^{\tau} a_{11}(z)dz\right)f_1(\tau)\,d\tau + \frac{1}{2}\,\xi\,(\sigma)\,a_{11}\,(\sigma)\right]\times$$

$$\left.\times \exp\left(\int\limits_{t_0}^{\sigma} a_{11}(z)dz\right)d\sigma + \int\limits_{t_0}^{t}\exp\left(-\int\limits_{t_0}^{\tau} a_{11}(z)dz\right)f_1(\tau)\,d\tau\right\} + \begin{bmatrix}0\\ \breve{\beta}_1(t)\end{bmatrix}.$$

При выполнении условий (28), (29)

$$\breve{\beta}_1(t_l) = x_{l2}, \quad l = 0, 1,$$

$$x_{11} = \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t_1} a_{11}(z)dz\right)\left[x_{01} + \int\limits_{t_0}^{t_1}\exp\left(-\int\limits_{t_0}^{\tau} a_{11}(z)dz\right)f_1(\tau)\,d\tau\right]$$

задача (1), (2), (22) имеет допустимые экстремали

$$x(t) = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} a_{11}(z)dz\right)\left[x_{01} + \int\limits_{t_0}^{t}\exp\left(-\int\limits_{t_0}^{\tau} a_{11}(z)dz\right)f_1(\tau)\,d\tau\right] + \begin{bmatrix}0\\ \breve{\beta}_1(t)\end{bmatrix}.$$

Замечание 2. Ни в одном из рассмотренных случаев не выполняется условие независимости уравнений связи, а потому классический метод решения задач вариационного исчисления с использованием множителей Лагранжа здесь неприменим.

Литература

1. *Ванько В. И., Ермошина О. В., Кувыркин Г. Н.* Вариационное исчисление и оптимальное управление. – М.: МГТУ им. Баумана, 2006. – 487 с.
2. *Моклячук М. П.* Варiацiйне числення. Екстремальнi задачi. – К.: Київ. ун-т, 2003. – 379 с.
3. *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1969. – 424 с.
4. *Елишевич М. А.* Задача Коши для системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка с прямоугольными матрицами // Нелiн. коливання. – 2013. – **16**, № 2. – С. 173 – 190.
5. *Самойленко А. М., Шкiль М. I., Яковець В. П.* Лiнiйнi системи диференцiальних рiвнянь з виродженнями. – К.: Вища шк., 2000. – 295 с.
6. *Елишевич М. А.* Некоторые свойства жордановых наборов векторов матрицы относительно оператора, содержащего дифференцирование // Журн. обчисл. та прикл. математики. – 2012. – **108**, № 2. – С. 119 – 134.
7. *Галеев Э. М.* Оптимизация: теория, примеры, задачи. Учебное пособие. – М.: Либроком, 2010. – 336 с.
8. *Елишевич М. А.* Задачи вариационного исчисления с подвижными концами и производными высших порядков // Математичнi проблеми механiки та обчислювальної математики. Зб. праць Iн-ту математики НАН України. – 2016. – **13**, № 3. – С. 106 – 116.

Получено 11.07.16,
после доработки — 28.10.19