УДК 517.9

РІВНОМІРНИЙ АТРАКТОР ДЛЯ N-ВИМІРНОЇ ІМПУЛЬСНО-ЗБУРЕНОЇ ПАРАБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ

О. В. Капустян, Ф. А. Асроров

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
вул. Володимирська, 64, Київ, 01601, Україна
e-mail: alexkap@univ.kiev.ua
far@ukr.net

В. В. Собчук

Сх.-європ. нац. ун-т ім. Л. Українки
просп. Волі, 13, Луцьк, 43025, Україна
e-mail: v.v.sobchuk@gmail.com

In this paper, we consider a weakly nonlinear N-dimensional parabolic system whose solutions are subjected to an impulsive perturbation in reaching a fixed subset in the phase space. For wide classes of impulsive perturbations, we prove that the system generates an impulsive semiflow that has a minimal compact uniformly attracting set (uniform attractor) in the phase space. Under additional restrictions imposed on impulsive parameters, we establish invariance and stability of the nonimpulsive part of the uniform attractor.

Розглянуто слабку нелінійну N-вимірну параболічну систему, розв'язки якої зазнають імпульсного збурення при досягненні фіксованої підмножини в фазовому просторі. Для широких класів імпульсних збурень доведено, що така система породжує імпульсний напівпотік, що має в фазовому просторі мінімальну компактну рівномірно притягуючу множину — рівномірний атрактор. При додаткових обмеженнях на імпульсні параметри встановлено інваріантність та стійкість неімпульсної частини рівномірного атрактора.

Вступ. Якісну теорію імпульсно-збурених диференціальних рівнянь викладено в [1 – 5], для імпульсних динамічних систем в скінченновимірних фазових просторах — в [6 – 11]. У випадку нескінченновимірного фазового простору якісну поведінку дисипативних систем вивчено в межах теорії глобальних атракторів [12 – 16]. Перенесення основних понять та результатів теорії атракторів на нескінченновимірні імпульсні динамічні системи здійснено в [17 – 19]. При цьому основним об'єктом дослідження виступає мінімальна компактна рівномірно притягуюча множина — рівномірний атрактор. Питанням існування, структури та інваріантності рівномірних атракторів для різних класів нескінченновимірних імпульсних систем присвячено роботи [18 – 22]. В [23] вперше запропоновано умови на імпульсний напівпотік, які гарантують стійкість неімпульсної частини рівномірного атрактора. В даній роботі ми уточнюємо ці умови і застосовуємо їх до дослідження стійкості рівномірного атрактора слабо-нелінійної N-вимірної імпульсно-збуреної параболічної системи.

1. Постановка задачі. В обмеженій області $\Omega \subset R^n,\ n \geq 1,$ відносно невідомої вектор-функції $u(t,x) = (u_1(t,x), \ldots, u_N(t,x))^T,\ (t,x) \in \Omega \times (0,+\infty),$ розглядається параболічна система

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} = a_1 \Delta u_1 - \varepsilon f_1(u_1, \ldots, u_N), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial u_N}{\partial t} = a_N \Delta u_N - \varepsilon f_N(u_1, \ldots, u_N), \\ u_1|_{\partial\Omega} = \ldots = u_N|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

де $\varepsilon > 0$ — малий параметр, $a_i > 0,\ f = (f_1, \ldots, f_N)^T$ — нелінійне збурення, $f \in C^1\left(R^2\right)$,

$$\exists C > 0 \quad \forall u \in R^N \quad \forall i = \overline{1, N}, \qquad |f_i(u)| \le C, \qquad f'(u) \ge -C. \tag{2}$$

Ці умови гарантують [12] однозначну глобальну розв'язність задачі (1) у фазовому просторі $X = \left(L^2(\Omega)\right)^N$ з нормою $\|u\|_X = \sqrt{\sum_{i=1}^N \|u_i\|^2}$, де тут і надалі $\|\cdot\|$ та $(\cdot,\cdot)$ — норма та скалярний добуток у $L^2(\Omega)$.

Для фіксованих додатних чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_N,\ \mu$ та функції $\psi \in L^2(\Omega)$ на розв'язках (1) розглядається наступна імпульсна задача: фазова точка $u(t)$ при зустрічі з імпульсною множиною

$$M = \left\{ u \in X \;\middle|\; \sum_{i=1}^N \alpha_i (u_i, \psi)^2 = 1 \right\} \tag{3}$$

миттєво переводиться за допомогою імпульсного відображення $I\colon M \to M'$ в нове положення $lu \in M'$, де

$$M' = \left\{ u \in X \;\middle|\; \sum_{i=1}^N \alpha_i (u_i, \psi)^2 = 1 + \mu \right\}. \tag{4}$$

У роботі доведено, що для достатньо широкого класу імпульсних відображень $I\colon M \to M'$ імпульсно-збурена задача (1)–(4) для достатньо малих ε породжує імпульсний напівпотік G_ε, що має рівномірний атрактор Θ_ε, який, за умови неперервності імпульсного відображення $I\colon M \to M'$, має інваріантну та стійку неімпульсну частину.

2. Існування та стійкість рівномірних атракторів імпульсних систем. Нехай у фазовому просторі $(X, \|\cdot\|_X)$ задано неперервну напівгрупу $V\colon R_+ \times X \to X$, імпульсну множину $M \subset X$ та імпульсне відображення $I\colon M \to X$. Імпульсний напівпотік $G\colon R_+ \times X \to X$ будується за таким правилом [7]: якщо для $x \in X$ для всіх $t > 0$ $V(t,x) \notin M$, то $G(t,x) = V(t,x)$, інакше

$$G(t,x) = \begin{cases} V\left(t - T_n, x_n^+\right), & t \in [T_n, T_{n+1}), \\ x_{n+1}^+, & t = T_{n+1}, \end{cases} \tag{5}$$

де $T_0 = 0,\ T_{n+1} = \sum_{k=0}^n s_k,\ x_{n+1}^+ = IV\left(s_n, x_n^+\right),\ x_0^+ = x,\ s_n$ — інтервали між моментами імпульсного збурення, що характеризуються умовою $V\left(s_n, x_n^+\right) \in M$. За умов

$$\begin{cases} M \text{ замкнена}, \quad M \cap IM = \varnothing, \\ \forall x \in M \quad \exists \tau = \tau(x) > 0 \quad \forall t \in (0, \tau), \quad V(t,x) \notin M, \\ \forall x \in X, \quad t \to G(t,x) \text{ визначена на } [0, +\infty) \end{cases} \tag{6}$$

формула (5) визначає напівгрупу $G\colon R_+ \times X \to X$ [10, 19], яку й будемо називати імпульсним напівпотоком.

Зауваження 1. З умов (6) і неперервності V випливає [10, 22], що для довільного $x \in X$ або існує момент часу $s := s(x) > 0$ такий, що $\forall t \in (0, s)$ $V(t, x) \notin M$, $V(s, x) \in M$, або $\forall t > 0$ $V(t, x) \cap M = \varnothing$ (і в цьому випадку покладемо $s(x) = \infty$).

Означення 1 [19]. *Компакт $\Theta \subset X$ будемо називати рівномірним атрактором імпульсного напівпотоку G, якщо:*

1) Θ — рівномірно притягуюча множина, тобто для довільної обмеженої $B \subset X$

$$\operatorname{dist}(G(t, B), \Theta) \to 0, \quad t \to \infty;$$

2) Θ — мінімальна замкнена множина, що задовольняє 1).

Зауваження 2. Рівномірний атрактор може не бути інваріантним відносно G [19].

Лема 1 [22]. *Нехай імпульсний напівпотік G дисипативний, тобто існує обмежена множина $B_0 \subset X$ така, що*

$$\text{для будь-якої обмеженої} \quad B \subset X \quad \exists T = T(B), \qquad \forall t \geq T \quad G(t, B) \subset B_0.$$

Тоді G має рівномірний атрактор Θ тоді і тільки тоді, коли G асимптотично компактний, тобто для будь-якої обмеженої $\{x_n\} \subset X$ та будь-якої $\{t_n \nearrow \infty\}$ послідовність $\{G(t_n, x_n)\}$ передкомпактна.

У багатьох випадках існування рівномірного атрактора імпульсного напівпотоку є наслідком компактності і дисипативності неперервної напівгрупи V.

Лема 2. *Нехай неперервна напівгрупа $V\colon R_+ \times X \to X$ та відображення $I\colon M \to X$ задовольняють такі умови: існує компактно вкладений простір $Y \Subset X$ такий, що*

$$\exists C_1 > 0, \quad \exists \delta > 0 \quad \forall t \geq 0 \quad \forall x \in X \quad \|V(t, x)\|_X \leq \|x\|_X e^{-\delta t} + C_1, \tag{7}$$

$$\forall t > 0 \quad \forall r > 0 \quad \exists C(t, r) > 0 \quad \forall x,\ \|x\|_X \leq r, \quad \|V(t, x)\|_Y \leq C(t, r), \tag{8}$$

$$\exists C_2 > 0 \quad \forall x \in X \cap M \quad \|Ix\|_X \leq \|x\|_X + C_2, \tag{9}$$

$$\forall r > 0 \quad \exists C(r) > 0 \quad \forall x \in Y \cap M, \quad \|x\|_Y \leq r \quad \|Ix\|_Y \leq C(r), \tag{10}$$

$$\exists \bar{s} > 0 \quad \forall x \in IM \quad s(x) \geq \bar{s}. \tag{11}$$

Тоді імпульсний напівпотік G має рівномірний атрактор Θ.

Доведення. З формули (5), нерівностей (7), (9) та (11) легко виводимо, що для $R_0 = 1 + \dfrac{C_1 + C_2}{1 - e^{-\delta \bar{s}}}$ справедлива оцінка

$$\forall r > 0 \quad \exists T(r) \quad \forall x,\ \|x\|_X \leq r, \quad \forall t \geq T(r) \quad \|G(t, x)\|_X \leq R_0. \tag{12}$$

Тоді згідно з лемою 1 і компактністю вкладення $Y \Subset X$ достатньо довести обмеженість послідовності $\{\xi_n = G(t_n, x_n) \mid \|x_n\|_X \leq r,\ t_n \to \infty\}$ у просторі Y.

Якщо $t_n < s(x_n) \leq \infty$, то

$$\xi_n = G(t_n, x_n) = V(t_n, x_n) = V(1, V(t_n - 1, x_n)) = V(1, G(t_n - 1, x_n)).$$

Отже, згідно з (8), (12) $\|\xi_n\|_Y \leq C(1, R_0)$.

Якщо $t_n = s(x_n)$, то

$$\xi_n = IV(t_n, x_n) = IV(1, G(t_n - 1, x_n)),$$

і згідно з (8), (10) $\|\xi_n\|_Y \le C(C(1, R_0))$.

Якщо $t_n > s(x_n)$, то

$$\xi_n = G(t_n - s(x_n), G(s(x_n), x_n)) = G(t_n - s(x_n), IV(s(x_n), x_n)).$$

Покладемо

$$\tau_n := t_n - s(x_n) \ge 0, \quad \eta_n := IV(s(x_n), x_n) \in IM, \quad \|\eta_n\|_X \le R_0.$$

Якщо $\tau_n \to 0$, то $s(x_n) \to \infty$; отже, $\|\eta_n\|_Y \le C(C(1, R_0))$. Оскільки $s(\eta_n) \ge \bar{s}$, то $\xi_n = V(\tau_n, \eta_n)$ і передкомпактність $\{\xi_n\}$ слідує з неперервності V.

Інакше $\tau_n \ge \bar{\tau} > 0$ і $\tau_n \in \left[T_{i(n)}^{(n)}, T_{i(n)+1}^{(n)}\right)$, де $i(n) \ge 0$, $\left\{T_i^{(n)}\right\}_{i \ge 0}$ — моменти імпульсного збурення траєкторії $G(\cdot, \eta_n)$, $\left\{\eta_i^{(n)+}\right\}_{i \ge 0}$ — відповідні імпульсні точки. Тоді згідно з (5)

$$\xi_n = V\left(\tau_n - T_{i(n)}^{(n)}, \eta_{i(n)}^{(n)+}\right).$$

Якщо $i(n) = 0$, то $\xi_n = V(\tau_n, \eta_n) = V(\bar{\tau}, V(\tau_n - \bar{\tau}, \eta_n))$; отже, $\|\xi_n\|_Y \le C(\bar{\tau}, R_0)$.

Інакше згідно з (10), (11) $\left\|\eta_{i(n)}^{(n)+}\right\|_Y \le C\left(C\left(\bar{s}, R_0\right)\right)$. А тому, якщо $\left\{\tau_n - T_{i(n)}^{(n)}\right\}$ обмежена, то передкомпактність $\{\xi_n\}$ слідує з неперервності V. Якщо ж $\tau_n - T_{i(n)}^{(n)} \to \infty$, то $\|\xi_n\|_Y \le C(1, R_0)$.

Лему доведено.

Відомо [9, 24], що одним із еквівалентних означень стійкості компактної інваріантної множини A відносно неперервного напівпотоку G є рівність

$$A = D^+(A) := \bigcup_{x \in A} \left\{ y \mid y = \lim G(t_n, x_n),\ x_n \to x,\ t_n \ge 0 \right\}. \tag{13}$$

У роботі [23] показано, що рівномірний атрактор імпульсного напівпотоку може не задовольняти властивість (13), проте, за додаткових припущень щодо характеру поведінки траєкторій в околі імпульсної множини, вдається одержати такий результат.

Лема 3 [23]**.** *Нехай імпульсний напівпотік G має рівномірний атрактор Θ, імпульсне відображення $I\colon M \to X$ неперервне і додатково виконуються умови: для довільної послідовності $x_n \to x \in \Theta \backslash M$*

$$\begin{cases} s(x) = \infty, & \text{якщо} \quad s(x_n) = \infty \quad \text{для нескінченно багатьох} \quad n, \\ s(x_n) \to s(x) & \text{у протилежному випадку}, \end{cases} \tag{14}$$

для довільної послідовності $x_n \to x \in \Theta \cap M$

$$\text{або} \quad s(x_n) = \infty \quad \text{для нескінченно багатьох} \quad n, \quad \text{або} \quad s(x_n) \to 0. \tag{15}$$

Тоді справедливі співвідношення

$$\forall t \ge 0 \quad G(t, \Theta \setminus M) = \Theta \setminus M, \tag{16}$$

$$\Theta = \overline{\Theta \setminus M}, \quad D^+(\Theta \setminus M) \subset \overline{\Theta \setminus M}. \tag{17}$$

3. Застосування до параболічної імпульсно-збуреної задачі. Застосуємо леми $1-3$ до імпульсно-збуреної задачі $(1)-(4)$. Для цього уточнимо параметри імпульсного збурення. Нехай $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty} \subset (0,+\infty)$, $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H_0^1(\Omega)$ — розв'язки спектральної задачі

$$\Delta\psi = -\lambda\psi, \quad \psi \in H_0^1(\Omega).$$

Без обмеження загальності будемо вважати, що в означенні множин $M,\ M'$ маємо $\psi = \psi_1$, $\lambda = \lambda_1$, тобто імпульсного збурення зазнають перші координати компонент фазового вектора. Тоді природно розглядати такий клас імпульсних відображень $I\colon M \mapsto M'$:

$$\text{якщо} \quad u = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix} \psi_1 + \sum_{k=2}^{\infty} \begin{pmatrix} c_1^k \\ \vdots \\ c_N^k \end{pmatrix} \psi_k \in M, \quad \text{тобто} \quad \sum_{i=1}^{N} \alpha_i c_i^2 = 1,$$

то

$$I(u) = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_N \end{pmatrix} \psi_1 + \sum_{k=2}^{\infty} \begin{pmatrix} c_1^k \\ \vdots \\ c_N^k \end{pmatrix} \psi_k \in M', \quad \text{тобто} \quad \sum_{i=1}^{N} \alpha_i d_i^2 = 1 + \mu. \tag{18}$$

Найпростішим прикладом є відображення, що збільшує в $\sqrt{1+\mu}$ разів перші координати компонент фазового вектора, тобто

$$\forall i = \overline{1,N} \quad d_i = \sqrt{1+\mu}\, c_i.$$

Основним результатом даної роботи є така теорема.

Теорема 1. *Нехай виконані умови (2). Тоді для довільного імпульсного відображення вигляду (18) та для достатньо малих $\varepsilon > 0$ задача (1)–(4) у фазовому просторі $X = \left(L^2(\Omega)\right)^N$ породжує імпульсний напівпотік G_ε, що має рівномірний атрактор Θ_ε. Якщо, крім того, відображення $I\colon M \mapsto M'$ є неперервним, то Θ_ε задовольняє співвідношення (16), (17).*

Доведення. Спочатку покажемо, що для достатньо малих $\varepsilon > 0$ задача $(1)-(4)$ породжує імпульсний напівпотік. Дійсно, задача (1) у фазовому просторі $X = \left(L^2(\Omega)\right)^N$ для всіх $\varepsilon > 0$ породжує неперервну напівгрупу $V_\varepsilon\colon R_+ \times X \to X$, імпульсна множина (3) замкнена в X і $M \cap IM \subset M \cap M' = \varnothing$. Перевіримо інші умови (6). Покладемо

$$\bar{a} = \min\{a_i\}_{i=1}^N, \quad \hat{a} = \max\{a_i\}_{i=1}^N, \quad \bar{\alpha} = \min\{\alpha_i\}_{i=1}^N, \quad \hat{\alpha} = \max\{\alpha_i\}_{i=1}^N.$$

Для достатньо малих ε з нерівності Пуанкаре виводимо

$$\forall x \in X \quad \forall t \geq 0 \quad \|u(t)\|_X^2 \leq \|u(0)\|_X^2 e^{-\bar{a}t} + 1. \tag{19}$$

Крім того, для кожного $i = \overline{1,N}$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(u_i(t),\psi)^2 = -\lambda a_i (u_i(t),\psi)^2 + \varepsilon F_\varepsilon^{(i)}(t),$$

$$(u_i(t),\psi)^2 = (u_i(0),\psi)^2 e^{-2\lambda a_i t} + 2\varepsilon \int_0^t e^{-2a_i\lambda(t-s)} F_\varepsilon^{(i)}(s)ds, \tag{20}$$

де

$$F_{\varepsilon}^{(i)}(t) := (f_i(u_1(t), \ldots, u_N(t)), \psi)(u_i(t), \psi).$$

При цьому

$$\forall t \geq 0 \quad \left| F_{\varepsilon}^{(i)}(t) \right| \leq C|(u_i(t), \psi)|.$$

Отже, для достатньо малих ε

$$\forall t \geq 0 \quad g_{\varepsilon}(t) \leq g_{\varepsilon}(0) e^{-a\lambda_1 t} + 1,$$

$$\left| 2\varepsilon \int\limits_0^t e^{-2\lambda a_i(t-s)} F_{\varepsilon}^{(i)}(s) ds \right| \leq \varepsilon \frac{C}{\bar{a}\lambda} \sqrt{(u_i(0), \psi)^2 + 1}. \tag{21}$$

Тепер повертаємося до умов (6). Покладемо для $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_N(t))^T$

$$g_{\varepsilon}(t) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i (u_i(t), \psi)^2,$$

$$F_{\varepsilon}(t) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i F_{\varepsilon}^{(i)}(t).$$

Нехай $u(0) \in M$, тобто $g_{\varepsilon}(0) = 1$. Тоді з (20) виводимо

$$g'_{\varepsilon}(0) = -2\lambda \sum_{i=1}^{N} \alpha_i a_i (u_i(0), \psi)^2 + 2\varepsilon F_{\varepsilon}(0) \leq -2\lambda \bar{a} + 2\varepsilon C \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \alpha_i^2}.$$

Отже, для достатньо малих ε існує $\tau = \tau(u(0), \varepsilon) > 0$ таке, що $\forall t \in (0, \tau)$, $g_{\varepsilon}(t) < 1$, що й означає виконання другої з умов (6). Перевіримо третю умову. Вона, очевидно, виконується, якщо траєкторія не зазнає імпульсних збурень. Інакше для $u_0 \in X$, $\|u_0\|_X \leq R$ для $s = s(u_0)$ маємо $g_{\varepsilon}(s) = 1$, тобто

$$1 = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \left((u_i(0), \psi)^2 e^{-2\lambda a_i s} + 2\varepsilon \int\limits_0^s e^{-2a_i \lambda (s-p)} F_{\varepsilon}^{(i)}(p) dp \right). \tag{22}$$

Звідси виводимо, що $s \leq T = T(R, \varepsilon)$, де $T(R, \varepsilon)$ — додатний корінь рівняння

$$e^{-2\bar{a}\lambda T} = 2\varepsilon C \sqrt{R^2 + 1}\, T - \frac{1}{\hat{\alpha} N}. \tag{23}$$

Далі можемо вважати, що $u_0 \in IM$. Тоді $g_{\varepsilon}(0) = 1 + \mu$ і з (20), (21) для достатньо малих ε існує $s_{\varepsilon} > 0$ таке, що

$$\forall t \in (0, s_{\varepsilon}) \quad g_{\varepsilon}(t) > 1, \quad g_{\varepsilon}(s_{\varepsilon}) = 1.$$

Тоді для s_{ε} з (22) маємо нерівності

$$1 \leq (1 + \mu) e^{-2\lambda \bar{a} s_{\varepsilon}} + \hat{\lambda} N \frac{\varepsilon C}{\bar{a}\lambda} \sqrt{\frac{1 + \mu}{\bar{\alpha}} + 1},$$

$$1 \geq (1+\mu)e^{-2\lambda\hat{a}s_\varepsilon} - \hat{\lambda}N\frac{\varepsilon C}{\bar{a}\lambda}\sqrt{\frac{1+\mu}{\bar{\alpha}}+1}.$$

Отже, для достатньо малих ε

$$\frac{1}{2\hat{a}\lambda}\,\ln\left\{\frac{1+\mu}{1+\frac{\mu}{2}}\right\} =: \bar{s} \leq s_\varepsilon \leq \hat{s} := \frac{1}{2\bar{a}\lambda}\,\ln\left\{2(1+\mu)\right\}. \tag{24}$$

Таким чином, інтервал між сусідніми імпульсними збуреннями кожної траєкторії не менше ніж $\bar{s}$, отже, виконуються умови (6) і задача (1)–(4) породжує імпульсний напівпотік $G_\varepsilon\colon R_+ \times X \mapsto X$. Крім того, з оцінки (19) маємо умову (7), з (24) — умову (11). Далі, добре відомо [12, 13], що напівгрупа $V_\varepsilon\colon R_+ \times X \to X$ в просторі $Y = \left(H_0^1(\Omega)\right)^N$ задовольняє оцінку (8). Перевіримо для відображення (18) умови (9), (10). Дійсно, умова (9) випливає з оцінки

$$\forall u \in M \quad \|u\|_X^2 \leq \|u\|_X^2 + \frac{2+\mu}{\bar{\alpha}}.$$

Оскільки для $y \in H_0^1(\Omega)$, $\|y\|^2_{H_0^1} = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k(y,\psi_k)^2$, то

$$\forall u \in M\cap Y \quad \|u\|_Y^2 \leq \|u\|_Y^2 + \lambda_1\,\frac{2+\mu}{\bar{\alpha}},$$

звідки слідує (10).

Отже, виконуються всі умови леми 2 і маємо існування рівномірного атрактора Θ_ε, причому згідно з (12)

$$\exists R_0 > 0 \quad \forall u \in \Theta_\varepsilon, \quad \forall \varepsilon \|u\|_X \leq R_0.$$

Тепер нехай відображення $I\colon M \to X$ неперервне. Перевіримо умови (14), (15).

Нехай $u^n(0) \to u(0) \in \Theta_\varepsilon \setminus M$. Якщо $s_n := s\left(u^n(0)\right) < \infty$, то для $u^n(t) = V_\varepsilon\left(t, u^n(0)\right)$ виконується рівність

$$1 = \sum_{i=1}^{N}\alpha_i\left(\left(u_i^n(0),\psi\right)^2 e^{-2\lambda a_i s_n} + 2\varepsilon\int\limits_0^{s_n} e^{-2a_i\lambda(s_n-p)}F_{\varepsilon n}^{(i)}(p)dp\right), \tag{25}$$

де $F_{\varepsilon n}^{(i)}(t) = \left(f_i\left(u_1^n(t),\ldots,u_N^n(t)\right),\psi\right)\left(u_i^n(t),\psi\right)$. Враховуючи оцінку (23), можемо вважати, що $s_n \to s_0 \geq 0$. Тоді можемо перейти до границі в (25) і одержати цю рівність для $u(t) = V_\varepsilon(t, u(0))$ в точці $s = s_0$, тобто $u(s_0) \in M$. Далі, аналізуючи функції $g_\varepsilon(t)$, $g'_\varepsilon(t)$ в точці $t = s_0$, аналогічно [23] можна показати, що $s_0 = s(u(0))$.

Якщо $s\left(u^n(0)\right) = \infty$ і, від супротивного, $s_0 := s(u(0)) < \infty$, то розглянемо відображення $F\colon R \times X \mapsto R$:

$$F(t,u_0) = \sum_{i=1}^{N}\alpha_i\left((u_0,\psi)^2 e^{-2\lambda a_i t} + 2\varepsilon\int\limits_0^{t} e^{-2a_i\lambda(t-p)}F_\varepsilon^{(i)}(p)dp\right) - 1,$$

де функції $F_\varepsilon^{(i)}(t)$ побудовано на $u(t) = V_\varepsilon(t, u_0)$. Застосовуючи до відображення F теорему про неявну функцію в околі точки s_0, $u(0)$, приходимо до суперечності з $s\left(u^n(0)\right) = \infty$. Отже, виконано умову (14).

Тепер нехай $u^n(0) \to u(0) \in \Theta_\varepsilon \cap M$ і $s_n = s\left(u^n(0)\right) < \infty$. Тоді згідно з (23) по підпослідовності $s_n \to s_0 \geq 0$ і, знову використовуючи рівність (25), аналогічно [23] виводимо, що $s_0 = 0$.

Теорему доведено.

Література

1. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – К.: Вища шк., 1987. – 287 с.
2. *Lakshmikantham V., Bainov D. D., Simeonov P. S.* Theory of impulsive differential equitations. – Singapore: World Sci., 1989. – 288 p.
3. *Samoilenko A. M., Perestyuk N. A.* Impulsive differential equitations. – Singapore: World Sci., 1995. – 462 p.
4. *Перестюк Н. А., Плотников В. А., Самойленко А. М., Скрипник Н. В.* Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2007. – 425 с.
5. *Akhmet M.* Principles of discontinuous dynamical systems. – New York: Springer, 2010. – 176 p.
6. *Перестюк Н. А.* Инвариантные множества одного класса разрывных динамических систем // Укр. мат. журн. – 1984. – **36**, № 1. – С. 38 – 63.
7. *Kaul S. K.* Stability and asymptotic stability in impulsive semidynamical systems // J. Appl. Math. Stoch. Anal. – 1994. – **7**, № 4. – P. 509 – 523.
8. *Pavlidis T.* Stability of a class of discontinuous dynamical systems // Inf. Control. – 1996. – **9**. – P. 298 – 322.
9. *Ciesielski K.* On stability in impulsive dynamical systems // Bull. Pol. Acad. Sci. Math. – 2004. – **52**. – P. 81 – 91.
10. *Bonotto E. M.* Flows of characteristic 0+ in impulsive semidynamical systems // J. Math. Anal. Appl. – 2007. – **332**. – P. 81 – 96.
11. *Перестюк Ю. М.* Розривні коливання в одній імпульсній системі // Нелін. коливання. – 2012. – **15**, № 4. – С. 494 – 503.
12. *Temam R.* Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. – New York: Springer, 1988. – 500 p.
13. *Kapustyan O. V., Kasyanov P. O., Valero J.* Regular solutions and global attractors for reaction-diffusion systems without uniqueness // Commun. Pure Appl. Anal. – 2014. – **13**, Issue 5. – P. 1891 – 1906.
14. *Gorban N. V., Kapustyan O. V., Kasyanov P. O., Paliichuk L. S.* On global attractors for autonomous damped wave equation with discontinuous nonlinearity // Solid Mech. Appl. – 2014. – **211**. – P. 221 – 237.
15. *Gorban N. V., Kapustyan A. V., Kapustyan E. A., Khomenko O. V* Strong global attractor for the three-dimensional Navier – Stokes system of equations in unbounded domain of channel type // J. Autom. Inform. Sci. – 2015. – **47**, Issue 11. – P. 48 – 59
16. *Kapustyan O. V., Pankov A. V., Valero J.* Global attractors of multivalued semiflows, generated by continuous solutions of 3D Bénard system // Set-Valued Var. Anal. – 2012. – **20**, № 3. – P. 445 – 465.
17. *Perestyuk M. O., Kapustyan O. V.* Long-time behavior of evolution inclusion with non-damped impulsive effects // Mem. Differ. Equ. Math. Phys. – 2012. – **56**. – P. 89 – 113.
18. *Bonotto E. M., Bortolan M. C., Carvalho A. N., Czaja R.* Global attractors for impulsive dynamical systems — a precompact approach // J. Differential Equations. – 2015. – **259**. – P. 2602 – 2625.
19. *Капустян О. В., Перестюк Н. А.* Глобальні атрактори імпульсних нескінченновимірних систем // Укр. мат. журн. – 2016. – **68**, № 4. – С. 517 – 528.
20. *Dashkovskiy S., Kapustyan O. V., Romaniuk I. V.* Global attractors of impulsive parabolic inclusions // Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B. – 2017. – **22**, № 5. – P. 1875 – 1886.
21. *Kapustyan O., Perestyuk M. O., Romaniuk I. V.* Global attractor of weakly nonlinear parabolic system with discontinuous trajectories // Mem. Differ. Equ. Math. Phys. – 2017. – **72**. – P. 59 – 70.
22. *Dashkovskiy S., Feketa P., Kapustyan O., Romaniuk I.* Invariance and stability of global attractors for multi-valued impulsive dynamical systems // J. Math. Anal. Appl. – 2018. – **458**. – P. 193 – 218.
23. *Капустян О. В., Перестюк М. О., Романюк І. В.* Стійкість глобальних атракторів імпульсних нескінченно-вимірних систем // Укр. мат. журн. – 2018. – **70**, № 1. – С. 29 – 39.
24. *Bhatia N. P., Szegö G. P.* Stability theory of dynamical systems. – New York: Springer, 2002. – 255 p.

Одержано 03.10.19,
після доопрацювання — 18.10.19