УДК 517.9

# ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ ДЕЯКИМИ КЛАСАМИ ДИНАМІЧНИХ РІВНЯНЬ НА НЕСКІНЧЕННОМУ ІНТЕРВАЛІ ЧАСОВОЇ ШКАЛИ

**Т. В. Ковальчук**

*Київ. нац. торгов.-екон. ун-т*
*вул. Кіото, 19, Київ, 02156, Україна*
*e-mail:0501@ukr.net*

**О. Є. Лаврова**

*Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка*
*вул. Володимирська, 64, Київ, 01601, Україна*
*e-mail:lavrova_olia@ukr.net*

**В. В. Могильова**

*Нац. техн. ун-т України "КПІ"*
*просп. Перемоги, 37, Київ, 03056, Україна*
*e-mail:mogylova.viktoria@gmail.com*

In this paper, we consider the linear control system of dynamic equations on the infinite interval of time scale. We obtain sufficient conditions for the existence of optimal controls in terms of the right-hand sides of the system and the function contained in the quality criterion. The connection between solutions of the initial problem on the semiaxis and the corresponding problem on a finite interval of the time scale are investigated.

Розглянуто лінійну за керуванням систему динамічних рівнянь на нескінченному інтервалі часової шкали. Отримано достатні умови існування оптимальних керувань у термінах правих частин системи та функції, що входить у критерій якості. Досліджено зв'язок між розв'язками початкової задачі на півосі та відповідної задачі на скінченному інтервалі часової шкали.

**Вступ.** Теорія часових шкал виникла в 1988 р., коли Стефан Хілгер в [1] ввів поняття $\Delta$-похідної на часовій шкалі ($\mathbb{T}$), яка є довільною, непорожньою, замкненою підмножиною дійсної осі. Зазначимо, що у випадку неперервного часу $\Delta$-похідна співпадає із звичайною похідною, а у випадку дискретного — з різницевим відношенням. Таким чином, теорія часових шкал дала можливість з єдиної точки зору розглядати неперервний і дискретний аналіз. Основи такого аналізу викладено в монографії [2].

Останнім часом теорія оптимального керування на часових шкалах набула розвитку. Так, у роботі [3] для деяких класів таких задач отримано рівняння Гамільтона – Якобі – Беллмана, однак, питання його розв'язності в даній роботі не вивчалось. Доведення існування розв'язку отримано в роботі [4].

Декілька спроб було зроблено по розповсюдженню принципу максимуму на часові шкали. У 2009 р. в роботі [5] отримано слабку версію принципу максимуму, а в 2012 р. в [6] — сильну. Але у 2013 р. Л. Боурдін і Е. Трелат у роботі [7] вказали на певні неточності роботи [6], виправили їх та отримали сильну версію принципу максимуму в геометричній формі. У роботах [8, 9] одержано принцип максимуму в зручній для застосування формі.

Вказані вище результати дають необхідні умови оптимальності на часових шкалах, і для їхньої перевірки потрібно використовувати спеціальні об'єкти: функції Беллмана і Понтрягіна. Тому важливо мати достатні умови оптимальності в термінах вихідних об'єктів: правих частин керованих систем і критерію якості. Один із варіантів таких результатів наведено в роботі [10], де розглянуто одновимірну задачу на скінченному інтервалі. Багатомірну задачу розглянуто в роботі [11].

Мета даної роботи — отримати достатні умови існування оптимальних керувань на нескінченному інтервалі часової шкали та встановити зв'язок з аналогічною задачею на скінченному інтервалі часової шкали. Подібні результати для функціонально-диференціальних рівнянь отримано в роботі [12].

Робота складається зі вступу та двох пунктів. У першому пункті формулюється постановка задачі та основні результати, а у другому доводяться відповідні теореми.

**1. Постановка задачі.** Будемо користуватися поняттями і фактами з теорії часових шкал, викладених у [2].

На часовій шкалі $\mathbb{T}$ розглянемо задачу оптимального керування

$$\begin{cases} x^{\Delta} = f_1(t,x) + f_2(t,x)u(t), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{1}$$

з критерієм якості

$$J(u) = \int\limits_{[0,\sigma(\tau))_{\mathbb{T}}} [g(t)A(t,x(t)) + B(t,u(t))]\Delta t \to \inf \tag{2}$$

або

$$J(u) = \int\limits_{[0,\sigma(\tau))_{\mathbb{T}}} \left[g(t)A(t,x(t)) + |u(t)|^2\right] \Delta t \to \inf, \tag{3}$$

де $t \in [0,+\infty) \cap \mathbb{T} = [0,+\infty)_{\mathbb{T}},\ \sup\mathbb{T} = +\infty.$ Тут $x \in D$ — фазовий вектор, $x_0 \in D$ — фіксований вектор, $x^{\Delta}$ — $\Delta$-похідна на часовій шкалі [2], $D$ — обмежена область у $\mathbb{R}^d$, $\partial D$ — її межа, $\overline{D} = D \cup \partial D$, $\sigma(\tau) = \inf\{s \in \mathbb{T}, s > \tau\}$ — момент першого виходу розв'язку $x(t)$ на границю області $D$, $\tau = \sup_{t\in[0,+\infty)_{\mathbb{T}}} \{\forall s \in [0,t]_{\mathbb{T}} \colon x(s) \in D\}$.

Параметр керування — $m$-вимірна вектор-функція $u \in \mathbb{R}^m$ така, що майже для всіх $t \in \mathbb{T}$ $u(t) \in V$ — опукла замкнена множина, $0 \in V$.

Для кожного такого керування відповідним розв'язком (траєкторією) системи (1) на відрізку $[0,T]_{\mathbb{T}}$ назвемо неперервну функцію, що задовольняє умови:

1) $x(0) = x_0$;
2) $(t, x(t)) \in D$ при $t \in [0,T]_{\mathbb{T}}$;
3) при $t \in [0,T]_{\mathbb{T}}$ $x(t)$ задовольняє інтегральне рівняння:

$$x(t) = x_0 + \int\limits_{[0,t)_{\mathbb{T}}} [f_1(s,x(s)) + f_2(s,x(s))u(s)]\Delta s.$$

Керування $u(t)$ вважаються допустимим для задачі (1), (2) і (1), (3), якщо:

1) $u(t) \in L_p[0,+\infty)_{\mathbb{T}}$;

2) $u(t) \in V$ при всіх $t \geq 0$;

3) відповідний $u(t)$ розв'язок $x(t)$ існує на інтервалі $[0; \sigma(\tau))_{\mathbb{T}}, \ \sigma(\tau) > 0$;

4) $|J(u)| < \infty$.

Множину допустимих керувань позначатимемо через $U$.

Через $|\cdot|$ будемо позначати норму вектора в $\mathbb{R}^d$, а через $\|\cdot\|$ — норму матриці, узгоджену з нормою вектора.

Для системи (1) вважаємо виконаними такі умови:

а$_1$) відображення $f_1(t,x)\colon [0,+\infty)_{\mathbb{T}} \times D \to \mathbb{R}^d$ і $f_2(t,x)\colon [0,+\infty)_{\mathbb{T}} \times D \to \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$ визначені та вимірні за сукупністю аргументів в області $D$ і задовольняють там по $x$ умови лінійного росту та Ліпшиця, тобто існує стала $K > 0$ така, що для будь-яких $t \in [0,+\infty)_{\mathbb{T}}$, $x \in D$:

$$|f_1(t,x)| + \|f_2(t,x)\| \leq K(1 + |x|), \quad \|f_2(t,x)\| \leq K(1 + |x|);$$

для будь-яких $t \in [0,+\infty)_{\mathbb{T}}, \ x_1, x_2 \in D$:

$$|f_1(t,x_1) - f_1(t,x_2)| + \|f_2(t,x_1) - f_2(t,x_2)\| \leq K|x_1 - x_2|. \tag{4}$$

а$_2$) Функція $g(t) \in L_1(0,+\infty)_{\mathbb{T}}, \ 0 \leq g(t) \leq 1$, для будь-якого $t \in [0,+\infty)_{\mathbb{T}}$.

а$_3$) Відображення $A\colon D \to \mathbb{R}^1, \ A(t,x) \geq 0$ для $(t,x) \in D$ визначене і неперервне в області $D$ та існує стала $K_A > 0$ така, що $A(t,x) \leq K_A(1 + |x|)$.

а$_4$) Відображення $B\colon [0,+\infty)_{\mathbf{T}} \times V \to \mathbb{R}^1$ вимірне за сукупністю аргументів і існують сталі $a_1 > 0, \ p > 1$ такі, що при $t \in [0,+\infty)_{\mathbb{T}}$:

$$B(t,z) \geq a_1 |z|^p.$$

а$_5$) $B(t,z)$ для кожного $t \in [0,+\infty)_{\mathbb{T}}$ має похідну $\dfrac{\partial B(t,z)}{\partial z}$, яка задовольняє оцінку

$$\left\| \frac{\partial B}{\partial z} \right\| \leq a_2 \|z\|^{p-1}$$

для деякого $a_2 > 0$, незалежно від $t, \ z$.

Основними результатами роботи є такі теореми.

**Теорема 1.** *При виконанні умов а$_1$) – $a_5$) задачі (1), (2) та (1), (3) мають розв'язки* $(x^*, u^*)$.

Нехай $T > 0, \ T \in \mathbb{T}$, фіксоване. Через $(x_T^*, u_T^*)$ позначимо розв'язки задач (1), (2) та (1), (3) на $[0,T]_{\mathbb{T}}$. Для задачі на нескінченному інтервалі часової шкали покладемо

$$u_{T,\infty}^*(t) = \begin{cases} u_T^*(t), & t \in [0,T]_{\mathbb{T}}, \\ 0, & t > T, \end{cases} \tag{5}$$

а $x_{T,\infty}(t)$ — при цьому відповідна траєкторія.

Очевидно, що дане керування є допустимим для вихідної задачі, де $(x_T^*, u_T^*)$ — оптимальна пара задачі (1), (2) і $\sigma\,(\tau^*)$ — момент виходу $x^*(t)$ на границю області $D$.

Через $V(t,x)$ позначимо функцію Беллмана задачі (1), (2), а через $V_T(t,x)$ — функцію Беллмана відповідної задачі на скінченному відрізку часової шкали $[0,T]_{\mathbb{T}}$.

**Теорема 2.** *За виконання умов* $a_1) - a_5)$ *маємо:*

*1)*

$$V_T(t,x) \to V(t,x), \quad T \to \infty, \quad T \in \mathbb{T}; \tag{6}$$

*існує послідовність* $T_n \in \mathbb{T},\ T_n \to \infty$ *при* $n \to \infty$, *що:*

*2) послідовність* $\{u_{T_n,\infty}\}$ *є мінімізантом для задачі (1), (2), тобто*

$$J(u_{T_n,\infty}) \to V, \quad n \to \infty, \tag{7}$$

*3)*

$$u_{T_n,\infty} \to u^*, \quad n \to \infty, \tag{8}$$

*слабко в* $L_p\left([0,+\infty)_{\mathbb{T}}; \mathbb{R}^m\right)$*;*

*4)*

$$x_{T_n,\infty}(t) \to x^*(t), \quad n \to \infty,$$

*поточково на* $[0, \sigma(\tau^*))_{\mathbb{T}}$, *рівномірно на кожному скінченному інтервалі.*

*Якщо задача (1), (2) має єдиний розв'язок, то збіжність в (7), (8) має місце при всіх* $T \to \infty$.

***Зауваження 1.*** В умовах теореми 2 для функціоналу (3) справедливі всі твердження теореми 2 із заміною слабкої збіжності (8) оптимальних керувань на сильну збіжність у $L_2\left([0,\infty)_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^m\right)$.

**2. Доведення основних результатів.** ***2.1. Доведення теореми 1.*** Зауважимо, що множина $U$ допустимих керувань непорожня, оскільки $0 \in U$. Дійсно, нехай $x(t)$ — розв'язок системи (1), що відповідає цьому керуванню.

Тоді завдяки умові $a_3)$ та обмеженості області $D$ маємо

$$J(0) = \int\limits_{[0,\sigma(\tau))_{\mathbb{T}}} g(t)A(t,x(t))\Delta t \le \int\limits_{[0,\sigma(\tau))_{\mathbb{T}}} g(t)K_A(1+|x(t)|)\Delta t \le$$

$$\le K_A \int\limits_{[0,+\infty)_{\mathbb{T}}} g(t)\Delta t + K_A R \int\limits_{[0,+\infty)_{\mathbb{T}}} g(t)\Delta t < \infty,$$

де $R$ — радіус кулі, що містить область $D$.

Оскільки критерій якості — невід'ємна величина, то існує невід'ємна нижня межа $m$ значень $J(u)$.

Нехай $u_n(t)$ — мінімізуюча послідовність така, що $J(u_n) \to m,\ n \to \infty$, монотонно. Нехай також $x_n(t)$ — послідовність відповідних $u_n(t)$ розв'язків системи (1), $\sigma(\tau_n)$ — момент виходу розв'язку $x_n(t)$ на границю області $D$. Зауважимо, що при достатньо великих $n$, з використанням умови $a_4)$ отримаємо

$$m + 1 \ge \int\limits_{[0,\sigma(\tau_n))_{\mathbb{T}}} B(t,u_n(t))\Delta t \ge$$

$$\ge a_1 \int\limits_{[0,\sigma(\tau_n))_{\mathbb{T}}} |u_n(t)|^p \Delta t \ge a_1 \int\limits_{[0,+\infty))_{\mathbb{T}}} |u_n(t)|^p \Delta t,$$

тобто

$$\|u_n(\cdot)\|_p \le \left(\frac{m+1}{a_1}\right)^{1/p}.$$

Це означає, що послідовність $u_n(\cdot)$ — слабко компактна в $L_p[0,+\infty)_{\mathbb{T}}$. Отже, існує слабко збіжна її підпослідовність. Не втрачаючи загальності, будемо вважати, що сама $u_n(t)$ слабко збіжна до $u^* \in L_p([0,+\infty)_{\mathbb{T}})$.

Тоді за лемою Мазура [13, с. 173] деяка опукла комбінація $b_k(t) = \sum_{i=1}^{n(k)} \alpha_i(k) u_i(t)$ елементів $u_i(t) \in V$ $\left(\alpha_i \ge 0,\ \sum_{i=1}^{n(k)} \alpha_i(k) = 1\right)$ збігається сильно до $u^*$ в $L_p([0,+\infty)_{\mathbb{T}})$.

Отже, існує підпослідовність $b_{kl}$ послідовності $b_k$, що майже скрізь на $[0,+\infty)_{\mathbb{T}}$ збігається до $u^*(t)$. Оскільки $V$ — опукла та замкнена множина, то $b_{kl} \in V$, а тому й $u^*(t) \in V$, отже, керування $u^*(t)$ є допустимим.

Розглянемо тепер послідовність розв'язків $x_n(t)$ системи (1), що відповідають послідовності керувань $\{u_n(t), n \ge 1\}$. При $t \in [0,\sigma(\tau_n)]_{\mathbb{T}}$ справедливе інтегральне представлення

$$x_n(t) = x_0 + \int\limits_{[0,t)_{\mathbb{T}}} [f_1(s,x_n(s)) + f_2(s,x_n(s))u_n(s)]\Delta s, \quad t \in [0,\sigma(\tau_n))_{\mathbb{T}}. \tag{9}$$

За функціями $x_n(t)$ побудуємо функції $y_n(t)$, що визначаються на всій півосі часової шкали таким чином:

$$y_n(t) = \begin{cases} x_n(t), & \text{при} \quad t \in [0,\sigma(\tau_n))_{\mathbb{T}}, \\ x_n(\sigma(\tau_n)), & \text{при} \quad t \in [\sigma(\tau_n),+\infty)_{\mathbb{T}}. \end{cases}$$

Оскільки $D$ — обмежена область, то існує стала $C > 0$ така, що

$$|y_n(t)| \le C \quad \text{при} \quad t \in [0,+\infty)_{\mathbb{T}}. \tag{10}$$

Покажемо, що сім'я функцій $y_n(t)$ компактна на $[0,T]_{\mathbb{T}}$. Для цього, згідно з (10), достатньо довести їхню рівностепеневу неперервність. При $t_1, t_2 \in [0,\sigma(\tau_n))_{\mathbb{T}}$ із (9) маємо оцінку

$$\begin{aligned} |x_n(t_2) - x_n(t_1)| &\le \int\limits_{[t_1,t_2)_{\mathbb{T}}} |f_1(s,x_n(s))|\Delta s + \int\limits_{[t_1,t_2)_{\mathbb{T}}} |f_2(s,x_n(s))u_n(s))|\Delta s \le \\ &\le K \int\limits_{[t_1,t_2)_{\mathbb{T}}} (1+|x_n(s)|)\Delta s + K \int\limits_{[t_1,t_2)_{\mathbb{T}}} (1+|x_n(s)|)|u_n(s)|\Delta s \le \\ &\le K(1+C)(t_2-t_1) + K(1+C) \int\limits_{[t_1,t_2)_{\mathbb{T}}} |u_n(s)|\Delta s \le \\ &\le K(1+C)(t_2-t_1) + K(1+C)(t_2-t_1)^{\frac{1}{q}} \left( \int\limits_{[0,+\infty)_{\mathbb{T}}} |u_n(s)|^p \Delta s \right)^{\frac{1}{p}} \le \end{aligned}$$

$$\leq K(1+C)(t_2-t_1)+K(1+C)(t_2-t_1)^{\frac{1}{q}}\left(\frac{m+1}{a_1}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Отже, при $t_1 \leq t_2 \leq \sigma(\tau_n)$

$$|y_n(t_2)-y_n(t_1)| \leq C_1(t_2-t_1)+C_2(t_2-t_1)^{\frac{1}{q}} \tag{11}$$

для деяких додатних сталих $C_1,\ C_2$.

Якщо $t_1<\sigma(\tau_n)<t_2<T$, то аналогічно (11) маємо

$$|y_n(t_2)-y_n(t_1))| = |x_n(t_1)-x_n(\sigma(\tau_n))| \leq$$

$$\leq C_1(\tau_n-t_1)+C_2(\tau_n-t_1)^{\frac{1}{q}} \leq C_1(t_2-t_1)+C_2(t_2-t_1)^{\frac{1}{q}}.$$

Якщо $\sigma(\tau_n)<t_1<t_2<T$, то

$$|y_n(t_2)-y_n(t_1)| = |x_n(\sigma(\tau_n))-x_n(\sigma(\tau_n))| = 0,$$

що й означає рівностепеневу неперервність сім'ї функцій $y_n(t)$ на $[0,T]_{\mathbb{T}}$, а отже, і їхню компактність.

За аналогом теореми Арцела – Асколлі [14] (теорема 4.2.) можна виділити підпослідовність послідовності $\{y_n(t), n\geq 1\}$ (яку знову позначимо $\{y_n(t), n\geq 1\}$) таку, що $y_n(t)\to y^*(t)$ при $n\to\infty$ рівномірно на відрізку $[0,T]_{\mathbb{T}}$.

Отже, на кожному відрізку $[0,T]_{\mathbb{T}}$ із послідовності $y_n(t)$ виділяється рівномірно збіжна підпослідовність. Покажемо, що існує підпослідовність послідовності $\{y_n(t)\}$, що збігається поточково на $[0,+\infty)_{\mathbb{T}}$ до деякої функції.

Для цього розглянемо послідовність з часової шкали, яка задовольняє такі умови:

1) $T_n\in\mathbb{T}$;
2) $\forall n_1<n_2\colon [0,T_{n_1}]_{\mathbb{T}}\subset[0,T_{n_2}]_{\mathbb{T}}$;
3) $\cup_{n\in\mathbb{N}}[0,T_n]_{\mathbb{T}}=[0,+\infty)_{\mathbb{T}}$.

Для будь-якого натурального $N$ існує підпослідовність $\left\{y_n^N(t), n\geq 1\right\}$ послідовності $\left\{y_n^{N-1}(t), n\geq 1\right\}$ така, що

$$y_n^N(t)\rightrightarrows y_N^*(t) \quad \text{для будь-якого} \quad t\in[0,T_N]_{\mathbb{T}},$$

де $y_N^*(t)=y_{N-1}^*(t)$ при $t\in[0,T_{N-1}]_{\mathbb{T}}$ і т. д.

Використовуючи діагональний метод, із цих послідовностей виділимо підпослідовність $\{y_n^n(t), n\geq 1\}$:

$$y_1^1(t), y_2^2(t), y_3^3(t)\ldots, y_n^n(t),\ldots,$$

яка поточково збігається до функції $y^*(t)$ для будь-якого $t\in[0,+\infty)_{\mathbb{T}}$. Надалі цю послідовність будемо позначати $\{y_n(t), n\geq 1\}$, а відповідну послідовність керувань — $\{u_n(t)\}$.

Позначимо через $\sigma(\tau^*)$ момент першого виходу $y^*(t)$ на границю області $D$, де

$$\sigma(\tau^*)=\inf\{s\in\mathbb{T}\colon s>\tau^*\},\quad \tau^*=\sup_{t\in[0,+\infty)_{\mathbb{T}}}\{\forall s\in[0,t]_{\mathbb{T}}\colon y^*(s)\in D\},$$

$$\sigma(\tau_n)=\inf\{s\in\mathbb{T}\colon s>\tau_n\},\quad \tau_n=\sup_{t\in[0,+\infty)_{\mathbb{T}}}\{\forall s\in[0,t]_{\mathbb{T}}\colon y_n(s)\in D\}.$$

Покажемо, що $\sigma(\tau^*) \leq \lim_{n\to\infty} \inf \sigma(\tau_n)$. Припустимо, що це не так. Тоді

$$\sigma(\tau^*) > \lim_{n\to\infty} \inf \sigma(\tau_n) = \sigma(\underline{\tau}).$$

1) Нехай $\sigma(\tau^*) < +\infty$. Виберемо довільне $T_1 \in [0, +\infty)_{\mathbb{T}}$ таке, що $T_1 \geq \sigma(\tau^*)$. На проміжку $[0, T_1]_{\mathbf{T}}$ $y_n(t) \to y^*(t),\ n \to \infty$.

а) Розглянемо випадок, коли між $\sigma(\underline{\tau})$ і $\sigma(\tau^*)$ існують точки з часової шкали.

За теоремою про характеризацію нижньої границі для довільного $\delta > 0$ множина $\{n \in \mathbb{N} \mid \sigma(\tau_n) < \sigma(\underline{\tau}) + \delta\}$ є нескінченною. Виберемо $\delta$ таким чином, щоб $\sigma(\underline{\tau}) + \delta < \sigma(\tau^*)$. Тоді існує підпослідовність $\{\sigma(\tau_{n_k}), n_k \geq 1)\}$ послідовності $\{\sigma(\tau_n), n \geq 1\}$ така, що можна вказати таке число $N \in \mathbb{N}$, що $\sigma(\tau_{n_k}) < \sigma(\underline{\tau}) + \delta$ для довільного $n_k \geq N$.

Виберемо момент часу $t_0 \in \mathbb{T}$ такий, що $t_0 \in (\sigma(\underline{\tau}) + \delta, \sigma(\tau^*))$, тоді

$$y_{n_k}(t_0) = x_{n_k}(\sigma(\tau_{n_k})) \in \partial D.$$

Із рівномірної збіжності $y_n(t)$ до $y^*(t)$ на $[0, T_1]_{\mathbb{T}}$ маємо, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $N \in \mathbb{N}$, що для довільного $n_k \geq N$ виконується наступна нерівність:

$$|y^*(t) - y_{n_k}(t)| < \varepsilon.$$

Але якщо вибрати $\varepsilon$ наступним чином: $0 < \varepsilon < \inf_{v\in\partial D} |y^*(t_0) - v|$, то для фіксованого $t_0 \in \mathbb{T}$ такого, що $t_0 \in (\sigma(\underline{\tau}) + \delta, \sigma(\tau^*))$ маємо:

$$|y^*(t_0) - y_{n_k}(t_0)| = |y^*(t_0) - x_{n_k}(\sigma(\tau_{n_k}))| > \varepsilon.$$

У цьому випадку одержуємо суперечність.

б) Розглянемо тепер випадок, коли $\sigma(\sigma(\underline{\tau})) = \sigma(\tau^*)$. Аналогічно до попередньому пункту для фіксованого $\sigma(\underline{\tau}) \in \mathbb{T}$ маємо, що

$$|y^*(\sigma(\underline{\tau})) - y_{n_k}(\sigma(\underline{\tau}))| = |y^*(\sigma(\underline{\tau})) - x_{n_k}(\sigma(\tau_{n_k}))| > \varepsilon;$$

знову одержуємо суперечність.

2) Нехай тепер $\sigma(\tau^*) = +\infty$, а $\lim_{n\to\infty} \inf \sigma(\tau_n) < \infty$. Виберемо довільне $T_2 \in [0, +\infty)_{\mathbb{T}}$ таке, що $T_2 > \lim_{n\to\infty} \inf \sigma(\tau_n)$. Тоді даний випадок зводиться до попереднього, отримаємо суперечність із рівномірною збіжністю $y_n(t) \to y^*(t)$ при $n \to \infty$ на $[0, T_2]_{\mathbb{T}}$.

Отже, ми показали, що $\sigma(\tau^*) \leq \lim_{n\to\infty} \inf \sigma(\tau_n)$.

Покладемо $x^*(t) = y^*(t)$ при $t \in [0, \sigma(\tau^*)]_{\mathbb{T}}$ у випадку скінченного $\sigma(\tau^*)$ і $x^*(t) = y^*(t)$ при $t \in [0, +\infty)_{\mathbb{T}}$ у випадку $\sigma(\tau^*) = \infty$.

Покажемо, що функція $x^*(t)$ є розв'язком системи (1) при всіх $t$ до моменту його виходу на границю області, який відповідає керуванню $u^*(t)$.

Візьмемо довільне $t \in [0, \sigma(\tau^*)]_{\mathbb{T}}$ у випадку $\sigma(\tau^*) < \infty$ і $t \in [0, +\infty)_{\mathbb{T}}$ при $\sigma(\tau^*) = \infty$. Виберемо достатньо велике $T \in [0, +\infty)_{\mathbb{T}}$, що для вказаного $t$, $y_n(t) = x_n(t)$ для досить великих $n$. Оскільки $y_n(t) \to y^*(t)$ при $n \to \infty$ рівномірно на $[0, T]_{\mathbb{T}}$, то і $x_n(t) \to x^*(t)$ рівномірно по $t \in [0, \sigma(\tau_1^*)]_{\mathbb{T}}$, де

$$\sigma(\tau_1^*) = \inf\{s \in \mathbb{T} \colon s > \tau_1^*\}, \quad \tau_1^* = \sup_{t\in[0,T]_{\mathbb{T}}} \{\forall s \in [0, t]_{\mathbb{T}} \colon x^*(s) \in D\}.$$

Оскільки $x_n(t)$ — розв'язки системи (1), то

$$x_n(t) = x_0 + \int\limits_{[0,t)_{\mathbb{T}}} [f_1(s, x_n(s)) + f_2(s, x_n(s))u_n(s)]\,\Delta s =$$

$$= x_0 + \int\limits_{[0,t)_{\mathbb{T}}} [f_1(s, x_n(s)) + f_2(s, x_n(s))u^*(s)]\,\Delta s +$$

$$+ \int\limits_{[0,t)_{\mathbb{T}}} [f_2(s, x_n(s)) - f_2(s, x^*(s))]\,(u_n(s) - u^*(s))\,\Delta s +$$

$$+ \int\limits_{[0,t)_{\mathbb{T}}} f_2(s, x^*(s))\big[u_n(s) - u^*(s)\big]\Delta s. \tag{12}$$

Покажемо, що другий доданок в останній рівності прямує до нуля при $n \to \infty$. Дійсно, завдяки нерівності (4) і нерівності Гельдера маємо

$$\left| \int\limits_{[0,t)_{\mathbb{T}}} [f_2(s, x_n(s)) - f_2(s, x^*(s))]\,(u_n(s) - u^*(s))\,\Delta s \right| \le$$

$$\le \left( \int\limits_{[0,t)_{\mathbb{T}}} |[f_2(s, x_n(s)) - f_2(s, x^*(s))]|^q\,\Delta s \right)^{\frac{1}{q}} \left( \int\limits_{[0,t)_{\mathbb{T}}} (u_n(s) - u^*(s))^p\,\Delta s \right)^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le \left( \int\limits_{[0,t)_{\mathbb{T}}} [K\,|x_n(s) - x^*(s)|]^q\,\Delta s \right)^{\frac{1}{q}} \big\|u_n(s) - u^*(s)\big\|_p \to 0,$$

$$n \to \infty, \quad \text{при} \quad t \in [0, \tau_1^*]\,,$$

завдяки теоремі Лебега (оскільки $x_n(t) \to x^*(t)$) при $n \to \infty$ рівномірно по $t \in [0, \tau_1^*]$ і $[K\,|x_n(s) - x^*(s)|]^q \le [K\,(|x_n(s)| + |x^*(s)|)]^q < \infty$ є інтегровною на $t \in [0, \tau_1^*]$.

Покажемо, що і третій доданок в (12) прямує до нуля при $n \to \infty$. Оскільки функція $f_2(t, x^*(t))$ є обмеженою на $[0, \tau_1^*]$, то завдяки слабкій збіжності послідовності керувань $u_n(t)$ до $u^*(t)$ при $n \to \infty$ на відрізку $[0, \tau_1^*]$ останній інтеграл в (12) прямує до нуля при $n \to \infty$.

Переходячи до границі в (12) при $n \to \infty$, отримаємо

$$x^*(t) = x_0 + \int\limits_{[0,t)_{\mathbb{T}}} [f_1(s, x^*(s)) + f_2(s, x^*(s))\,u^*(s)]\,\Delta s \quad \text{для будь-якого} \quad t \in [0, \sigma(\tau_1^*)]_{\mathbb{T}}\,.$$

Звідки маємо, що $x^*(t)$ — розв'язок системи (1), що відповідає керування $u^*(t)$ при $t \in [0, \sigma(\tau_1^*)]_{\mathbb{T}}$.

Оскільки момент часу $T$ обраний довільним чином, то маємо, що $x^*(t)$ є розв'язком системи (1), який відповідає керуванню $u^*(t)$ при $t \in [0, +\infty)_{\mathbb{T}}$ до моменту першого виходу розв'язку на границю області.

Зауважимо, що оскільки до цього моменту розв'язок $x_n(t)$ співпадає з $y_n(t)$, тому послідовність $\{x_n(t) \colon n \geq 1\}$ збігається поточково до $x^*(t)$ для будь-якого $t \in [0, \sigma(\tau^*)]_{\mathbb{T}}$.

Залишилось довести, що керування $u^*(t)$ оптимальне.

Розглянемо два випадки:

1. Нехай $\sigma(\tau^*) < \sigma(\tau)$.

У цьому випадку або існує підпослідовність $\{\sigma(\tau_{n_k})\}$ послідовності $\{\sigma(\tau_n)\}$, що $\sigma(\tau_{n_k}) \to \sigma(\tau)$ при $n_k \to \infty$ або лише не більше ніж скінченна кількість $\{\tau_n\}$ (у випадку $\tau = +\infty$). Тоді для достатньо великих $n_k \colon y_{n_k}(t) = x_{n_k}(t)$ при $t \in [0, \sigma(\tau^*)]_{\mathbb{T}}$ і $x_{n_k}(t) \rightrightarrows x^*(t)$ при $n_k \to \infty$ на $[0, \sigma(\tau^*)]_{\mathbb{T}}$.

Отже, маємо, що для довільного $t \in [0, \sigma(\tau^*)]_{\mathbb{T}}$

$$|x_{n_k}(t) - x^*(t)| \to 0 \tag{13}$$

при $n_k \to \infty$. Тоді маємо:

$$\int\limits_{[0,\sigma(\tau_{n_k}))_{\mathbb{T}}} g(t)A(t, x_{n_k}(t))\Delta t + \int\limits_{[0,\sigma(\tau_{n_k}))_{\mathbb{T}}} B(t, u_{n_k}(t))\Delta t \geq$$

$$\geq \int\limits_{[0,\sigma(\tau*))_{\mathbb{T}}} g(t)A(t, x_{n_k}(t))\Delta t + \int\limits_{[0,\sigma(\tau*))_{\mathbb{T}}} B(t, u_{n_k}(t))\Delta t. \tag{14}$$

Підінтегральний вираз у першому доданку (14) для кожного $t$ прямує до $A(t, x^*(t))$ згідно з умовою (13) і умовою a$_3$). Завдяки обмеженості області $D$ і умови лінійного росту a3) для $A(t, x^*(t))$ також маємо, що $A(t, x_{n_k}(t)) \leq K_A(1 + K_1)$ для деякої сталої $K_1 > 0$. Отже, $g(t)K_A(1 + K_1)$ є інтегровною мажорантою, тому, використовуючи теорему Лебега [15] про мажоровану збіжність отримуємо, що:

$$\int\limits_{[0,\sigma(\tau*))_{\mathbb{T}}} g(t)A(t, x_{n_k}(t))\Delta t \to \int\limits_{[0,\sigma(\tau*))_{\mathbb{T}}} g(t)A(t, x^*(t))\,\Delta t. \tag{15}$$

Оскільки $B(t, u)$ опукла по $u$, то

$$B(t, v(t)) \geq B(t, u^*(t)) + \left(B'_u(t, u^*(t)), v(t) - u^*(t)\right) \tag{16}$$

для довільного допустимого керування $v(t) \in U$, тут $(L'_u, v - u^*)$ — скалярний добуток.

При цьому, згідно з умовою a5), при $q = \dfrac{p}{p-1}$ маємо

$$\int\limits_{[0,+\infty)_{\mathbb{T}}} \left|\frac{\partial B}{\partial u}(t, u^*(t))\right|^q \Delta t \leq a_2 \int\limits_{[0,+\infty)_{\mathbb{T}}} |u^*(t)|^p\,\Delta t < +\infty.$$

Тоді завдяки теоремі Ріса [15] вираз

$$\int\limits_{[0,+\infty)_{\mathbb{T}}} \left(B'_u(t, u^*(t)), v(t) - u^*(t)\right)\Delta t$$

задає лінійний неперервний функціонал в $L_p([0,+\infty)_{\mathbb{T}})$.

Поклавши в (16) $v(t) = u_{n_k}(t)$ і використовуючи слабку збіжність $u_{n_k}(t)$ до $u^*(t)$, отримаємо для другого доданку в (14) нерівність:

$$\lim_{n_k\to\infty} \inf \int\limits_{[0,\sigma(\tau*))_{\mathbb{T}}} B(t,u_{n_k}(t))\Delta t \geq \int\limits_{[0,\sigma(\tau*))_{\mathbb{T}}} B\left(t,u^*(t)\right)\Delta t. \tag{17}$$

Тоді з (14), (15), (17) маємо

$$m = \lim_{n_k\to\infty}\left(\int\limits_{[0,\sigma(\tau_{n_k}))_{\mathbb{T}}} g(t)A(t,x_{n_k}(t))\Delta t + \int\limits_{[0,\sigma(\tau_{n_k}))_{\mathbb{T}}} B(t,u_{n_k}(t))\Delta t\right) \geq$$

$$\geq \int\limits_{[0,\sigma(\tau^*))_{\mathbb{T}}} g(t)A\left(t,x^*(t)\right)\Delta t + \lim_{n_k\to\infty}\inf\int_{[0,\sigma(\tau^*))_{\mathbb{T}}} B(t,u_{n_k}(t))\Delta t \geq$$

$$\geq \int\limits_{[0,\sigma(\tau^*))_{\mathbb{T}}} g(t)A\left(t,x^*(t)\right)\Delta t + \int_{[0,\sigma(\tau^*))_{\mathbb{T}}} B\left(t,u^*(t)\right)\Delta t.$$

Отже, в цьому випадку керування $u^*(t)$ є оптимальним.

2. Нехай $\sigma\left(\tau^*\right) = \sigma(\tau)$.

Візьмемо довільне $t_1 \in \mathbb{T},\ t_1 < \sigma\left(\tau^*\right)$, і розглянемо відрізок $[0,t_1]_{\mathbb{T}}$. На даному відрізку $x_{n_k} \rightrightarrows x^*(t)$ при $n_k \to \infty$. Тоді за теоремою про характеризацію нижньої границі множина $\{n \in \mathbb{N} | \sigma(\tau_n) < t_1\}$ скінченна, а на проміжку $(t_1,\sigma\left(\tau^*\right))_{\mathbb{T}}$ може лежати нескінченна кількість точок $\sigma(\tau_n)$. Розглянемо цю послідовність. Тоді аналогічно з попереднім маємо

$$m = \lim_{n_k\to\infty}\left(\int\limits_{[0,\sigma(\tau_{n_k}))_{\mathbb{T}}} g(t)A(t,x_{n_k}(t))\Delta t + \int\limits_{[0,\sigma(\tau_{n_k}))_{\mathbb{T}}} B(t,u_{n_k}(t))\Delta t\right) \geq$$

$$\geq \int\limits_{[0,t_1)_{\mathbb{T}}} g(t)A\left(t,x^*(t)\right)\Delta t + \int\limits_{[0,t_1)_{\mathbb{T}}} B\left(t,u^*(t)\right)\Delta t.$$

Звідси граничним переходом при $t_1 \to \sigma\left(\tau^*\right)$ отримаємо

$$J\left(u^*\right) = m.$$

Доведення для функціоналу (3) аналогічне. При цьому умова а5) виконується автоматично, оскільки $\dfrac{\partial B}{\partial z} = 2u$.

Теорему 1 доведено.

***2.2. Доведення теореми 2.*** Розглянемо задачу (1), (2). Візьмемо довільне $T > 0,\ T \in \mathbb{T}$, та зафіксуємо його.

Нехай, як і раніше, $V(t,x)$ — функція Беллмана даної задачі, а $V_T(t,x)$ — функція Беллмана відповідної задачі на $[0,T]_{\mathbb{T}}$. З теореми 1 та теореми 1 [11] випливає, що дані задачі мають розв'язки $(x^*(t),u^*(t))$ та $(x_T^*(t),u_T^*(t))$.

Зазначимо, що множина допустимих керувань на $[0,+\infty)_{\mathbb{T}}$ є підмножиною допустимих керувань на $[0,T]_{\mathbb{T}}$. За допустимими керуваннями $u(t)$ на $[0,T]_{\mathbb{T}}$, що не є допустимими на $[0,+\infty)_{\mathbb{T}}$, побудуємо керування

$$u_{T,\infty}(t)=\begin{cases}u(t), & t\in[0,T]_{\mathbb{T}},\\ 0, & t\in(T,+\infty)_{\mathbb{T}}.\end{cases} \tag{18}$$

Об'єднання множини допустимих керувань на $[0,+\infty)_{\mathbb{T}}$ із множиною керувань вигляду (18) позначимо через $U_T$. Тоді така множина допустимих керувань співпадає на $[0,+\infty)_{\mathbb{T}}$ з множиною $U$, а на $[0,T]_{\mathbb{T}}$ — із множиною всіх допустимих керувань задачі типу (1), (2) на $[0,T]_{\mathbb{T}}$. Дійсно, за довільним допустимим керуванням $u(t)$ на $[0,T]_{\mathbb{T}}$, що не є допустимим на $[0,+\infty)_{\mathbb{T}}$, за правилом (18) будується допустиме керування на $[0,+\infty)_{\mathbb{T}}$. З іншого боку, $L_p([0,+\infty)_{\mathbb{T}})\subset L_p([0,T]_{\mathbb{T}})$.

Позначимо через $D_T=D\cap[0,T]_{\mathbb{T}}$, а через $\sigma\left(\tau_T^*\right)$ — момент виходу $x_T^*(t)$ на границю області $D_T$. Зазначимо, що у випадку, коли $\sigma\left(\tau_T^*\right)<T$, керування $u_T^*(t)$ буде оптимальним для задачі (1), (2) на $[0,+\infty)_{\mathbb{T}}$.

Розглянемо тепер випадок, коли $\sigma\left(\tau_T^*\right)=T$. Позначимо через $x(t)=x\left(t,u^*(t)\right)$ — розв'язок початкової задачі (1), що відповідає керуванню $u_T^*(t)$. Зазначимо, що оскільки при $t\in[0,T]_{\mathbb{T}}$ $u^*(t)=u_T^*(t)$, то завдяки єдиності розв'язку початкової задачі (1) $x(t)=$ $=x_T^*(t)$ при $t\in[0,T]_{\mathbb{T}}$.

Із означення функції Беллмана тоді маємо

$$\begin{aligned}V\le J\left(u_T^*\right)=\int\limits_{[0,T)_{\mathbb{T}}}\left[g(t)A\left(t,x_T^*(t)\right)+B\left(t,u_T^*(t)\right)\right]\Delta t+\\ +\int\limits_{[T,\sigma(\tau_T))_{\mathbb{T}}}g(t)A(t,x(t))\Delta t=\\ =V_T+\int\limits_{[T,\sigma(\tau_T))_{\mathbb{T}}}g(t)A(t,x(t))\Delta t.\end{aligned} \tag{19}$$

Тут $\sigma(\tau)$ — момент виходу $x(t)$ на границю області $D$. Другий доданок у (19) прямує до нуля при $T\to\infty$ завдяки обмеженості області $D$ і теоремі Лебега про мажоровану збіжність [15].

Нагадаємо, що $\sigma\left(\tau^*\right)$ — момент виходу оптимальної траєкторії $x^*(t)$ задачі (1), (2) на $[0,+\infty)_{\mathbb{T}}$ на границю області $D$. Зазначимо, що якщо $\sigma\left(\tau^*\right)\le T$, то пара $\left(x^*(t),u^*(t)\right)$ буде оптимальною і для задачі на $[0,T]_{\mathbb{T}}$, і в цьому випадку знову $V=V_T$.

Нехай $\sigma\left(\tau^*\right)>T$. Тоді

$$\begin{aligned}V=J\left(u^*\right)=\int\limits_{[0,T)_{\mathbb{T}}}\left[g(t)A\left(t,x^*(t)\right)+B\left(t,u^*(t)\right)\right]\Delta t+\\ +\int\limits_{[T,\sigma(\tau^*))_{\mathbb{T}}}\left[g(t)A\left(t,x^*(t)\right)+B\left(t,u^*(t)\right)\right]\Delta t\ge\end{aligned}$$

$$\geq V_T + \int\limits_{[T,\sigma(\tau^*))_{\mathbb{T}}} \left[g(t)A\left(t,x^*(t)\right) + B\left(t,u^*(t)\right)\right]\Delta t. \tag{20}$$

Але

$$\int\limits_{[T,\sigma(\tau^*))_{\mathbb{T}}} \left[g(t)A\left(t,x^*(t)\right) + B\left(t,u^*(t)\right)\right]\Delta t \leq$$

$$\leq \int\limits_{[T,+\infty)_{\mathbb{T}}} g(t)K_A(1+K_1)\Delta t +$$

$$+ a_1 \int\limits_{[T,+\infty)_{\mathbb{T}}} |u^*(t)|^p\,\Delta t \quad \text{при} \quad T \to +\infty. \tag{21}$$

Отже, з одного боку з (19) маємо

$$V - V_T \leq \int\limits_{[T,\sigma(\tau_T))_{\mathbb{T}}} g(t)A(t,x(t))\Delta t,$$

а з іншого — з (20) одержуємо

$$V - V_T \geq \int\limits_{[T,\sigma(\tau^*))_{\mathbb{T}}} \left[g(t)A\left(t,x^*(t)\right) + B\left(t,u^*(t)\right)\right]\Delta t.$$

Звідси з урахуванням (21) отримуємо перше твердження теореми 2.

Далі для зручності, не втрачаючи загальності, обираємо $n \in \mathbb{N}$ і розглядаємо значення $T_n \in \mathbb{T},\ T_n \geq n$; завдяки тому, що $\sup \mathbb{T} = +\infty,$ такий вибір можливий.

Нехай $u^*_{T_n}(t)$ — оптимальне керування на $[0,T_n]_{\mathbb{T}},\ u^*_{T_n,\infty}(t)$ — допустиме керування задачі (1), (2) на $[0,+\infty)_{\mathbb{T}},$ визначене формулою (5). Якщо для якогось $n$ $\sigma\left(\tau^*_{T_n}\right) < T_n,$ то $u^*_{T_n,\infty}(t)$ є оптимальним для задачі на нескінченному інтервалі. Тут $\sigma\left(\tau^*_{T_n}\right)$ — момент виходу $x_{T_n,\infty}$ на границю області $D.$

Нехай тепер $\sigma\left(\tau^*_{T_n}\right) = T_n$ для всіх $n.$ Оскільки $V_{T_n} = J\left(u^*_{T_n}\right) \to V,$ то існує стала $L$ така, що $V_{T_n} \leq L.$ Але з умови a4) і (5) маємо, що

$$L \geq V_{T_n} = J\left(u^*_{T_n}\right) =$$

$$= \int\limits_{[0,T_n)_{\mathbb{T}}} \left[g(t)A\left(t,x^*_{T_n}(t)\right) + B\left(t,u^*_{T_n}(t)\right)\right]\Delta t \geq$$

$$\geq a_1 \int\limits_{[0,T_n)_{\mathbb{T}}} \left|u^*_{T_n}(t)\right|^p \Delta t = a_1 \int\limits_{[0,+\infty)_{\mathbb{T}}} \left|u^*_{T_n,\infty}(t)\right|^p \Delta t.$$

А отже, послідовність допустимих керувань $\left\{u^*_{T_n,\infty}\right\}$ слабко компактна в $L_p([0,+\infty)_{\mathbb{T}}).$ Тому існує її слабко збіжна підпослідовність, яку знову, не втрачаючи загальності, позначимо $\{u_{n,\infty}\}.$ Отримаємо, що

$$u^*_{T_n,\infty} \to u^* \tag{22}$$

слабко збігається при $n \to \infty$ в $L_p([0,+\infty)_{\mathbb{T}}).$

Аналогічно теоремі 1 з використанням леми Мазура отримаємо, що $u^*(t) \in V$ майже для всіх $t$.

Позначимо через $x_{T_n,\infty}(t)$ — розв'язок початкової задачі (1), що відповідає керуванню $u^*_{T_n,\infty}(t)$. Нехай $\sigma(\tau_{T_n})$ — момент виходу розв'язку $x_{T_n,\infty}$ на границю області $D$. Очевидно, що $\sigma(\tau_{T_n}) > T_n$. Тоді маємо

$$J(u_{T_n,\infty}) = \int\limits_{[0,T_n)_{\mathbb{T}}} \left[g(t)A\left(t, x^*_{T_n}(t)\right) + B\left(t, u^*_{T_n}(t)\right)\right] \Delta t +$$

$$+ \int\limits_{[T_n,\sigma(\tau_{T_n}))_{\mathbb{T}}} \left[g(t)A(t, x_{T_n,\infty}(t)) + B\left(t, u^*_{T_n,\infty}(t)\right)\right] \Delta t =$$

$$= V_{T_n} + \int\limits_{[T_n,\sigma(\tau_{T_n}))_{\mathbb{T}}} \left[g(t)A(t, x_{T_n,\infty}(t)) + B\left(t, u^*_{T_n,\infty}(t)\right)\right] \Delta t.$$

Але $B\big(t, u^*_{T_n,\infty}(t)\big) = 0$ при $t \in [T_n, \infty)_{\mathbb{T}}$ завдяки побудові $u^*_{T_n,\infty}$ та умові a$_4$).

Отже,

$$J(u_{T_n,\infty}) = V_{T_n} + \int\limits_{[T_n,\sigma(\tau_{T_n}))_{\mathbb{T}}} g(t)A(t, x_{T_n,\infty}(t))\Delta t, \tag{23}$$

але згідно з умовою a$_3$) маємо, що

$$\int\limits_{[T_n,\sigma(\tau_{T_n}))_{\mathbb{T}}} g(t)A(t, x_{T_n,\infty}(t))\Delta t \le \int\limits_{[T_n,\sigma(\tau_{T_n}))_{\mathbb{T}}} g(t)K_A(1 + |x_{T_n,\infty}(t)|)\Delta t.$$

Із обмеженості області $D$ при $t \le \sigma(\tau_{T_n})$ випливає, що $|x_{T_n,\infty}(t)| \le K_1$.

Тоді одержуємо

$$\int\limits_{[T_n,\sigma(\tau_{T_n}))_{\mathbb{T}}} g(t)K_A(1 + K_1)\Delta t \le \int\limits_{[T_n,\infty)_{\mathbb{T}}} g(t)K_A(1 + K_1)\Delta t \to 0 \tag{24}$$

при $n \to \infty$. Тоді з (23), (24) отримаємо, що

$$J(u_{T_n,\infty}) \to V \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Отже, послідовність $\left\{u^*_{T_n,\infty}\right\}$ є мінімізуючою для задачі (1), (2), що й доводить твердження 2 теореми 2.

Позначимо через $x^*(t)$ розв'язок початкової задачі (1), що відповідає керуванню $u^*(t)$ із (22). Такий розв'язок існує і єдиний, що є наслідком теореми 1 [11]. Твердження про те, що пара $(x^*(t), u^*(t))$ є оптимальною для задачі (1), (2), доводиться аналогічно відповідному твердженню теореми 1.

Твердження 3 даної теореми очевидне. Доведення твердження 4 доводиться аналогічно відповідному факту з теореми 1.

Якщо задача (1), (2) має єдиний розв'язок, то збіжності (6) і (7) мають місце при всіх $T \to \infty$. Останнє випливає з того факту, що з будь-якої підпослідовності $\left\{u^*_{T_{n_k},\infty}\right\}$

послідовності $\left\{u^*_{T_n,\infty}\right\}$ із (22) виділяється слабко збіжна до оптимального керування $u^*(t)$ послідовність, а таке керування єдине.

Теорему 2 доведено.

***2.3. Доведення зауваження 1.*** Розглянемо задачу оптимального керування (1), (3). Очевидно, що доведення потребує лише встановлення сильної збіжності $u^*_{T_n,\infty}$ до $u^*$. Аналогічно теоремі 1 маємо

$$V = \lim_{n\to\infty}\left[\int\limits_{[0,\sigma(\tau_{T_n})_{\mathbb{T}}} g(t)A(t,x_{T_n,\infty}(t))\Delta t + \int\limits_{[0,\sigma(\tau_{T_n}))_{\mathbb{T}}} \left|u^*_{T_n,\infty}(t)\right|^2\Delta t\right] =$$

$$= \int\limits_{[0,\sigma(\tau^*))_{\mathbb{T}}} g(t)A\left(t,x^*(t)\right)\Delta t + \lim_{n\to\infty}\int\limits_{[0,\sigma(\tau_{T_n}))_{\mathbb{T}}} \left|u^*_{T_n,\infty}(t)\right|^2\Delta t. \tag{25}$$

Остання границя в (25) існує, а отже, співпадає зі своєю нижньою границею.

Але з побудови $u^*_{T_n,\infty}$ випливає, що

$$\int\limits_{[0,\sigma(\tau_{T_n}))_{\mathbb{T}}} \left|u^*_{T_n,\infty}(t)\right|^2\Delta t = \int\limits_{[0,+\infty)_{\mathbb{T}}} \left|u^*_{T_n,\infty}(t)\right|^2\Delta t.$$

Тому з (25) маємо

$$V \geq \int\limits_{[0,\sigma(\tau^*))_{\mathbb{T}}} g(t)A\left(t,x^*(t)\right)\Delta t + \lim_{n\to\infty}\int\limits_{[0,+\infty)_{\mathbb{T}}} \left|u^*_{T_n,\infty}(t)\right|^2\Delta t =$$

$$= \int\limits_{[0,\sigma(\tau^*))_{\mathbb{T}}} g(t)A\left(t,x^*(t)\right)\Delta t + \liminf_{n\to\infty}\int\limits_{[0,+\infty)_{\mathbb{T}}} \left|u^*_{T_n,\infty}(t)\right|^2\Delta t \geq$$

$$\geq \int\limits_{[0,\sigma(\tau^*))_{\mathbb{T}}} g(t)A\left(t,x^*(t)\right)\Delta t + \int\limits_{[0,+\infty)_{\mathbb{T}}} \left|u^*(t)\right|^2\Delta t \geq$$

$$\geq \int\limits_{[0,\sigma(\tau^*))_{\mathbb{T}}} g(t)A\left(t,x^*(t)\right)\Delta t + \int\limits_{[0,\sigma(\tau^*))_{\mathbb{T}}} \left|u^*(t)\right|^2\Delta t = V.$$

Отже,

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{[0,+\infty)_{\mathbb{T}}} \left|u^*_{T_n,\infty}(t)\right|^2\Delta t = \int\limits_{[0,+\infty)_{\mathbb{T}}} \left|u^*(t)\right|^2\Delta t.$$

Звідси і з (22) випливає сильна збіжність $u^*_{T_n,\infty}$ до $u^*$ в $L_2([0,+\infty)_{\mathbb{T}})$, що й доводить зауваження 1.

## Література


1. *Hilger S.* Ein Maßkettenkalkül mit Anwendungen auf Zentrumsmannigfaltigkeiten: PhD thesis, Universität Würzburg, 1988.
2. *Bohner M., Peterson A.* Dynamic equations on time scales. An introduction with applications. – Boston, MA: Birkhäuser Basel, 2001. – 358 p.
3. *Zhan Z., Wei W., Xu H.* Hamilton – Jacobi – Bellman equations on time scales // Math. Comput. Model. – 2009. – **49**. – P. 2019 – 2028.
4. *Лаврова О. Є., Ластівка Л. О.* Метод динамічного програмування для систем диференціальних рівнянь на часових шкалах // Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. – 2014. – Вип. 2. – С. 71 – 76.
5. *Hilscher R., Zeidan V.* Weak maximum principle and accessory problem for control problems on time scales // Nonlinear Anal. – 2009. – **70**, № 9. – P. 3209 – 3226.
6. *Zhan Z., Chen S., Wei W.* A unified theory of maximum principle for continuous and discrete time optimal control problems // Math. Control Relat. Fields. – 2012. – **2**, № 2. – P. 195 – 215.
7. *Bourdin L., Trelat E.* Pontryagin maximum principle for finite dimensional nonlinear optimal control problems on time scales // SIAM J. Control Optim. – 2013. – **51**, № 5. – P. 3781 – 3813.
8. *Bohner M., Kenzhebaev K., Stanzhytskyi O., Lavrova O.* Pontryagin's maximum principle for dynamic systems on time scales // J. Difference Equ. Appl. – 2017. – **23**, № 7. – P. 1161 – 1189. Doi: 10.1080/ 10236198.2017.1284829
9. *Bourdin L., Stanzhytskyi O., Trelat E.* Addendum to Pontryagin's maximum principle for dynamic systems on time scales // J. Difference Equ. Appl. – 2017. – **23**, № 10. – P. 1760 – 1763.
10. *Zaidong Z., Wei W., Yinfei L., Honglei X.* Existence for calculus of variations and optimal control problems on time scales // Int. J. Innovю Comput., Inf. Control. – 2012. – **5**, № 8. – P. 3793 – 3808.
11. *Лаврова О. Є.* Умови існування оптимального керування для деяких класів диференціальних рівнянь на часових шкалах // Нелін. коливання. – 2016. – **19**, № 1. – С. 67 – 84.
12. *Kichmarenko O., Stanzhytsky O.* Sufficient conditions for the existence of optimal controls for some classes of functional-differential equations // Nonlinear Dyn. Syst. Theory. – 2018. – **18**, № 2. – P. 196 – 211.
13. *Иосида К.* Функциональный анализ. – М.: Мир, 1967. – 624 с.
14. *Gong Y., Xiang X.* A class of optimal control problems of systems governed by the first order linear dynamic equations on time scales // J. Ind. Manag. Optim. – 2009. – **5**, № 1. – P. 1 – 10.
15. *Cabada A., Vivero D.* Expression of the Lebesgue $\Delta$-integral on time scales as a usual Lebesgue integral; application to the calculus of $\Delta$-antiderivatives // Math. Comput. Model. – 2006. – № 43. – P. 194 – 207.


*Одержано 20.06.19*