УДК 517.95

ПРО НЕТРИВІАЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ ОДНОРІДНОЇ ДВОТОЧКОВОЇ ЗА ЧАСОМ ЗАДАЧІ ДЛЯ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ДИНАМІЧНОЇ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

З. М. Нитребич, В. С. Ільків, П. Я. Пукач

Нац. ун-т "Львівська політехніка"
вул. Бандери, 12, Львів, 79013, Україна
e-mail: znytrebych@gmail.com
ilkivv@i.ua
ppukach@gmail.com

О. М. Маланчук

Нац. мед. ун-т ім. Д. Галицького
вул. Пекарська, 69, Львів, 79017, Україна
e-mail: Oksana.Malan@gmail.com

We find sufficient conditions for the existence of nontrivial solutions of the homogeneous system of Lamé equations that satisfy homogeneous two-point in time conditions. A differential-symbol method for constructing such solutions is used.

Встановлено достатні умови існування нетривіальних розв'язків однорідної системи рівнянь Ламе, що задовольняють однорідні двоточкові умови за часом. Використано диференціально-символьний метод для побудови таких розв'язків.

1. Вступ. Перші результати щодо розв'язності багатоточкових задач для звичайних диференціальних рівнянь одержано у працях [1, 2].

Задача з багатоточковими умовами за однією виділеною змінною для рівнянь із частинними похідними є узагальненням багатоточкової задачі для звичайних диференціальних рівнянь. Формулювання таких задач та результати щодо їх розв'язності для рівнянь із частинними похідними в обмежених областях за допомогою метричного підходу вперше зроблено у праці [3]. У зазначеній роботі показано, що розв'язок багатоточкової задачі для гіперболічного рівняння є єдиним у певному класі функцій лише за певних додаткових умов за просторовою змінною. У згаданій вище праці, а також у подальших працях (див. [4 – 8] та бібліографію в них) питання існування та єдиності розв'язків задач з багатоточковими та інтегральними умовами за виділеною змінною зведено до дослідження проблеми малих знаменників. Для оцінки знизу цих знаменників використано результати метричної теорії чисел.

Виділенню класів існування і єдиності розв'язків задач із дво- та багатоточковими умовами за часом у необмежених областях для рівнянь та систем диференціальних рівнянь із частинними похідними присвячено роботи [9, 10].

Дослідження задач із однорідними двоточковими за часом умовами для однорідного рівняння із частинними похідними другого порядку за часом та загалом нескінченного порядку за просторовими зміннними за допомогою диференціально-символьного методу проведено в роботах [11 – 14]. Суть диференціально-символьного методу [15] полягає в тому, що розв'язки задач із умовами за виділеною (часовою) змінною для рівнянь із частинними похідними конструюються як результати дій диференціальних виразів загалом нескінченного порядку на деякі функції параметрів. Символами згаданих диференціальних виразів є праві частини умов та рівнянь. Після дії диференціальних виразів параметри покладаються такими, що дорівнюють нулю.

Вивченню задачі з інтегральними умовами для системи рівнянь Ламе на основі метричного підходу присвячено статтю [16].

Дослідження задачі Коші для системи рівнянь другого порядку за часом, зокрема, системи рівнянь теорії пружності, з використанням диференціально-символьного методу здійснено в [15]. Побудову поліномних та квазіполіномних розв'язків рівнянь динамічної теорії пружності розглянуто в [17].

2. Формулювання задачі. У просторі змінних $t \in \mathbb{R},\ x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ розглянемо двоточкову задачу для системи рівнянь динамічної теорії пружності [18, 19]:

$$
\begin{gathered}
L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) U(t,x) = F(t,x), \\
U(0,x) = \Phi_1(x), \qquad U(h,x) = \Phi_2(x),
\end{gathered}
\tag{2.1}
$$

у якій

$$
L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_2^2 \Delta\right) E_3 + \left(c_2^2 - c_1^2\right) H\left(\frac{\partial}{\partial x}\right),
$$

$c_1,\ c_2$ — константи, що визначаються через додатні сталі Ламе $\lambda,\ \mu$ і густину ρ пружного тіла рівностями

$$
c_1 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \qquad c_2 = \frac{\mu}{\rho}, \qquad H\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \left\| \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{i,j=1,2,3}, \qquad \frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right),
$$

$\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ — тривимірний оператор Лапласа,

$$
U(t,x) = \left(U_1(t,x), U_2(t,x), U_3(t,x)\right)^\tau, \qquad \Phi_j(x) = \left(\Phi_{j1}(x), \Phi_{j2}(x), \Phi_{j3}(x)\right)^\tau, \quad j = 1,2,
$$
$$
F(t,x) = \left(F_1(t,x), F_2(t,x), F_3(t,x)\right)^\tau,
$$

τ — символ транспонування, $h > 0,\ E_3$ — одинична матриця третього порядку.

Задача (2.1) описує рух пружного тіла і полягає у знаходженні складових вектора переміщення у довільний момент часу t та в довільній точці x за умови, що задано складові вектора переміщення у два моменти часу $t = 0$ та $t = h$. Нагадаємо, що задача Коші полягає у знаходженні складових вектора переміщення, коли складові та швидкість їхньої зміни задано в момент часу $t = 0$.

Двоточкова за часом задача (2.1), на відміну від задачі Коші, є некоректною, оскільки відповідна однорідна задача

$$
L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) U(t,x) = O, \tag{2.2}
$$

$$
U(0,x) = U(h,x) = O, \tag{2.3}
$$

де $O=(0,0,0)^\tau$, має нетривіальні розв'язки, наприклад,

$$U(t,x)=\begin{pmatrix}0\\ u_2(t,x)\\ 0\end{pmatrix}, \qquad u_2(t,x)=\sin\frac{\pi(x_2+tc_1)}{c_1h}-\sin\frac{\pi(x_2-tc_1)}{c_1h}. \tag{2.4}$$

Побудові нетривіальних розв'язків задачі (2.2), (2.3), яка є звуженням періодичної задачі, за допомогою диференціально-символьного методу присвячено дану статтю.

3. Основні результати. Оператор-матриці Ламе $L\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)$ заміною $\frac{\partial}{\partial t}$ на параметр λ та $\frac{\partial}{\partial x}$ на вектор-параметр $\nu=(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ поставимо у відповідність матрицю $L(\lambda,\nu)$:

$$L(\lambda,\nu)=\left(\lambda^2-c_2^2\widetilde{\nu}^{\,2}\right)E_3+\left(c_2^2-c_1^2\right)H(\nu), \qquad \lambda\in\mathbb{C}, \quad \nu\in\mathbb{C}^3,$$

де $\widetilde{\nu}^{\,2}=\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2$. Зауважимо, що $H(\nu)=\nu^\tau\nu$ і $\nu\nu^\tau=\widetilde{\nu}^{\,2}$.

Визначник цієї матриці має вигляд

$$\varphi(\lambda,\nu)\equiv\det L(\lambda,\nu)=\left(\lambda^2-c_2^2\widetilde{\nu}^{\,2}\right)^2\left(\lambda^2-c_1^2\widetilde{\nu}^{\,2}\right).$$

Твердження 3.1. *Матриця вигляду*

$$\widetilde{L}(\lambda,\nu)=\left(\lambda^2-c_2^2\widetilde{\nu}^{\,2}\right)\left[\left(\lambda^2-c_1^2\widetilde{\nu}^{\,2}\right)E_3+\left(c_1^2-c_2^2\right)H(\nu)\right] \tag{3.1}$$

є приєднаною для матриці $L(\lambda,\nu)$.

Доведення. Насамперед зауважимо, що виконується співвідношення

$$H^2(\nu)=\widetilde{\nu}^{\,2}H(\nu).$$

Справді,

$$H^2(\nu)=(\nu^\tau\nu)(\nu^\tau\nu)=\nu^\tau(\nu\nu^\tau)\nu=\widetilde{\nu}^{\,2}\nu^\tau\nu=\widetilde{\nu}^{\,2}H(\nu).$$

Тоді маємо

$$\begin{aligned}\widetilde{L}(\lambda,\nu)L(\lambda,\nu)&=\left(\lambda^2-c_2^2\widetilde{\nu}^{\,2}\right)\left[\left(\lambda^2-c_1^2\widetilde{\nu}^{\,2}\right)E_3+\left(c_1^2-c_2^2\right)H(\nu)\right]\times\\ &\quad\times\left[\left(\lambda^2-c_2^2\widetilde{\nu}^{\,2}\right)E_3+\left(c_2^2-c_1^2\right)H(\nu)\right]=\\ &=\left(\lambda^2-c_2^2\widetilde{\nu}^{\,2}\right)\Big[\left(\lambda^2-c_1^2\widetilde{\nu}^{\,2}\right)\left(\lambda^2-c_2^2\widetilde{\nu}^{\,2}\right)E_3+\\ &\quad+\Big\{\left(c_1^2-c_2^2\right)\left(\lambda^2-c_2^2\widetilde{\nu}^{\,2}\right)+\left(\lambda^2-c_1^2\widetilde{\nu}^{\,2}\right)\left(c_2^2-c_1^2\right)+\\ &\quad+\widetilde{\nu}^{\,2}\left(c_1^2-c_2^2\right)\left(c_2^2-c_1^2\right)\Big\}H(\nu)\Big]=\varphi(\lambda,\nu)E_3.\end{aligned}$$

Аналогічно доводимо, що $L(\lambda,\nu)\widetilde{L}(\lambda,\nu)=\varphi(\lambda,\nu)E_3$.

Твердження доведено.

Усі елементи приєднаної матриці $\widetilde{L}(\lambda,\nu)$ містять спільний множник $\lambda^2-c_2^2\widetilde{\nu}^{\,2}$, тобто $\widetilde{L}(\lambda,\nu)=\left(\lambda^2-c_2^2\widetilde{\nu}^{\,2}\right)C(\lambda,\nu)$, де

$$C(\lambda,\nu)=\left(\lambda^2-c_1^2\widetilde{\nu}^{\,2}\right)E_3+\left(c_1^2-c_2^2\right)H(\nu).$$

Визначником матриці $C(\lambda,\nu)$ є такий поліном:

$$\det C(\lambda,\nu)\equiv\psi(\lambda,\nu)\equiv\left(\lambda^2-c_1^2\widetilde{\nu}^{\,2}\right)\left(\lambda^2-c_2^2\widetilde{\nu}^{\,2}\right).$$

Утворимо диференціальний вираз $\psi\left(\dfrac{d}{dt},\nu\right)$ і розглянемо таку задачі Коші:

$$\psi\left(\frac{d}{dt},\nu\right)V=0,\qquad V|_{t=0}=\left.\frac{dV}{dt}\right|_{t=0}=\left.\frac{d^2V}{dt^2}\right|_{t=0}=0,\qquad \left.\frac{d^3V}{dt^3}\right|_{t=0}=1.$$

Розв'язком цієї задачі є функція вигляду

$$V\equiv V(t,\nu)=\begin{cases}\dfrac{V_2-V_1}{\left(c_2^2-c_1^2\right)\widetilde{\nu}^{\,2}}, & \widetilde{\nu}\neq 0,\\[2ex] \dfrac{t^3}{6}, & \widetilde{\nu}=0,\end{cases}$$

у якій $V_1\equiv V_1(t,\nu)=\dfrac{\sinh\left[c_1\widetilde{\nu}t\right]}{c_1\widetilde{\nu}}$, $V_2\equiv V_2(t,\nu)=\dfrac{\sinh\left[c_2\widetilde{\nu}t\right]}{c_2\widetilde{\nu}}$.

Зауважимо, що за $\widetilde{\nu}$ приймаємо корінь $\sqrt{\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2}$ з додатною дійсною частиною або з невід'ємною уявною частиною, якщо дійсна частина дорівнює нулеві. Функції V_1 та V_2 для $\widetilde{\nu}=0$ мають вигляд $V_1(t,\nu)=V_2(t,\nu)=t$.

Для оператор-матриці $L\left(\dfrac{d}{dt},\nu\right)$ розглянемо таку матричну задачу Коші

$$L\left(\frac{d}{dt},\nu\right)T(t,\nu)=O_3, \tag{3.2}$$

$$T(0,\nu)=O_3,\qquad \left.\frac{dT}{dt}\right|_{t=0}=E_3, \tag{3.3}$$

де O_3 — нульова матриця третього порядку.

Твердження 3.2. *Матриця вигляду*

$$T(t,\nu)=C\left(\frac{d}{dt},\nu\right)\left(V(t,\nu)E_3\right)=\begin{cases}V_2E_3+\dfrac{V_1-V_2}{\widetilde{\nu}^{\,2}}\,H(\nu), & \widetilde{\nu}\neq 0,\\[2ex] tE_3+\left(c_1^2-c_2^2\right)\dfrac{t^3}{6}\,H(\nu), & \widetilde{\nu}=0,\end{cases} \tag{3.4}$$

є розв'язком задачі (3.2), (3.3).

Доведення. Покажемо, що матриця (3.4) задовольняє рівняння (3.2), використовуючи при цьому твердження 3.1:

$$L\left(\frac{d}{dt},\nu\right)T(t,\nu)=L\left(\frac{d}{dt},\nu\right)\left\{C\left(\frac{d}{dt},\nu\right)\left(V(t,\nu)E_3\right)\right\}=$$

$$=\left\{L\left(\frac{d}{dt},\nu\right)C\left(\frac{d}{dt},\nu\right)\right\}\left(V(t,\nu)E_3\right)=$$

$$=\left\{E_3\,\psi\left(\frac{d}{dt},\nu\right)\right\}\left(V(t,\nu)E_3\right)=\left\{\psi\left(\frac{d}{dt},\nu\right)V(t,\nu)\right\}E_3=O_3.$$

Оскільки $V_1(0,\nu)=V_2(0,\nu)=0,$ то справджується перша початкова умова в (3.3):

$$T(0,\nu)=\begin{cases}\left.\left(V_2E_3+\dfrac{V_1-V_2}{\widetilde{\nu}^{\,2}}\,H(\nu)\right)\right|_{t=0}=O_3, & \widetilde{\nu}\neq 0,\\ \left.\left(tE_3+\left(c_1^2-c_2^2\right)\,\dfrac{t^3}{6}\,H(\nu)\right)\right|_{t=0}=O_3, & \widetilde{\nu}=0.\end{cases}$$

Крім того,

$$\left.\frac{dT}{dt}\right|_{t=0}=\begin{cases}\left.\left(V_2'E_3+\dfrac{V_1'-V_2'}{\widetilde{\nu}^{\,2}}\,H(\nu)\right)\right|_{t=0}=E_3, & \widetilde{\nu}\neq 0,\\ \left.\left(E_3+\left(c_1^2-c_2^2\right)\,\dfrac{t^2}{2}\,H(\nu)\right)\right|_{t=0}=E_3, & \widetilde{\nu}=0,\end{cases}$$

де $V_1'=\cosh[c_1\widetilde{\nu}t],\ V_2'=\cosh[c_2\widetilde{\nu}t].$

Твердження доведено.

Визначник матриці $T(h,\nu)$ має вигляд:

$$\det T(h,\nu)=V_{1,h}V_{2,h}^2,$$

де $V_{1,h}\equiv V_1(h,\nu)=\dfrac{\sinh[c_1\widetilde{\nu}h]}{c_1\widetilde{\nu}},\ V_{2,h}\equiv V_2(h,\nu)=\dfrac{\sinh[c_2\widetilde{\nu}h]}{c_2\widetilde{\nu}}.$

Введемо до розгляду множину

$$M\equiv\left\{\nu\in\mathbb{C}^3:\ \det T(h,\nu)=0\right\},$$

тобто

$$M=\left\{\nu\in\mathbb{C}^3:\, c_j^2\widetilde{\nu}^{\,2}h^2+\pi^2m^2=0,\ j=1,2,\ m\in\mathbb{N}\right\}. \tag{3.5}$$

Теорема 3.1. *Нехай $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\in M$ і ненульовий стовпчик $A=(A_1,A_2,A_3)^\tau$ задовольняє матричне рівняння $T(h,\alpha)A=O$. Тоді вектор-функція*

$$U(t,x)=e^{\alpha x}T(t,\alpha)A, \tag{3.6}$$

де $\alpha x=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3$, є нетривіальним розв'язком задачі (2.2), (2.3).

Доведення. Подіємо на вектор-функцію (3.6) матричним диференціальним виразом Ламе $L\left(\dfrac{\partial}{\partial t},\dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ і використаємо твердження 3.2:

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)U(t,x)=L\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)\left\{e^{\alpha x}T(t,\alpha)A\right\}=e^{\alpha x}L\left(\frac{d}{dt},\alpha\right)\left\{T(t,\alpha)A\right\}=$$

$$=e^{\alpha x}\left\{L\left(\frac{d}{dt},\alpha\right)T(t,\alpha)\right\}A=e^{\alpha x}\left\{O_3\right\}A=O.$$

Отже, вектор-функція (3.6) задовольняє систему рівнянь (2.2). Покажемо виконання умов (2.3):

$$U(0,x)=e^{\alpha x}T(0,\alpha)A=e^{\alpha x}O_3A=O,$$

$$U(h,x) = e^{\alpha x} T(h,\alpha) A = e^{\alpha x} O = O.$$

Нетривіальність функції (3.6) випливає з того, що

$$\left.\frac{\partial U}{\partial t}\right|_{t=0} = e^{\alpha x} \frac{dT}{dt}(0,\alpha) A = e^{\alpha x} E_3 A = e^{\alpha x} A,$$

оскільки A — ненульовий стовпчик.

Теорему доведено.

Зауваження 3.1. Множину M вигляду (3.5) можна подати у вигляді об'єднання двох множин $M = M_1 \cup M_2$ або об'єднання трьох множин $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3$, де

$$M_j = M_{*j} \backslash M_3, \qquad M_{*j} = \left\{\nu \in \mathbb{C}^3 \colon c_j^2 \widetilde{\nu}^2 h^2 + \pi^2 m^2 = 0,\ m \in \mathbb{N}\right\}, \quad j = 1, 2,$$

причому $M_3 = M_{*1} \cap M_{*2}$. З таких позначень випливає, що $M_3 \neq \varnothing$ у разі раціонально залежних c_1 і c_2, тобто c_1/c_2 є раціональним числом, і $M_3 = \varnothing$, якщо c_1 та c_2 не є раціонально залежними.

Формула (3.6) розв'язку задачі (2.2), (2.3) для векторів α з множин $M_1,\ M_2$ та M_3 набуває відповідно вигляду

$$U(t,x) = A\, e^{\alpha x} V_1(t,\alpha) \alpha^{\tau}, \tag{3.7}$$

де $A \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$;

$$U(t,x) = e^{\alpha x} V_2(t,\alpha) A, \tag{3.8}$$

де $A = (A_1, A_2, A_3)^{\tau}$ — довільний ненульовий вектор, що ортогональний до α;

$$U(t,x) = e^{\alpha x} T(t,\alpha) A, \tag{3.9}$$

де $A = (A_1, A_2, A_3)^{\tau}$ — довільний ненульовий вектор.

4. Приклад побудови нетривіальних розв'язків двоточкової задачі. Знайдемо нетривіальні розв'язки задачі (2.2), (2.3), що відповідають векторам $\beta_{m,\gamma} = \left(\gamma, \dfrac{i\pi m}{c_2 h}, i\gamma\right) \in M_2$, $m \in \mathbb{Z} \backslash \{0\},\ \gamma \in \mathbb{C},\ i^2 = -1$, причому

$$c_2/c_1 \notin \mathbb{N}, \qquad c_2 \widetilde{\beta}_{m,\gamma} = \frac{i\pi m}{h}, \qquad V_2(t,\beta_{m,\gamma}) = \frac{\sin \dfrac{\pi m t}{h}}{\dfrac{\pi m}{h}}.$$

Візьмемо, наприклад, $A = (1, 0, i)^{\tau}$. Тоді за формулою (3.8) знаходимо нетривіальні розв'язки задачі (2.2), (2.3) у вигляді

$$U_{m,\gamma}(t,x) = e^{\frac{i\pi m}{c_2 h} x_2 + \gamma(x_1 + i x_3)} \frac{\sin \dfrac{\pi m t}{h}}{\dfrac{\pi m}{h}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

Наявність неперервного параметра γ у формулі (4.1) відповідно до диференціально-символьного методу дозволяє на підставі останнього зображення записати інше зображення розв'язку задачі (2.2), (2.3). Справді, отриманий розв'язок (4.1) задачі (2.2), (2.3) залежить від параметра $\gamma \in \mathbb{C}$ аналітично. Дія довільного диференціального виразу $\chi\left(\dfrac{d}{d\gamma}\right)$ з цілим символом $\chi(z)$ на $U_{m,\gamma}(t,x)$ є також розв'язком задачі (2.2), (2.3). Оскільки

$$\chi\left(\frac{d}{d\gamma}\right) e^{\gamma(x_1+ix_3)} = \chi(x_1+ix_3)e^{\gamma(x_1+ix_3)}$$

і праву частину останньої рівності можна записати як деяку функцію $\varphi(x_1+ix_3)$, то розв'язок задачі (2.2), (2.3) можна подати у вигляді

$$U_{m1}(t,x) = \varphi(x_1+ix_3)e^{\frac{i\pi m}{c_2 h}x_2}\sin\frac{\pi m t}{h}\begin{pmatrix}1\\0\\i\end{pmatrix}, \quad m\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}. \tag{4.2}$$

У формулі (4.2) за φ можна взяти не лише цілу функцію, а й довільну двічі неперервно диференційовну на $\mathbb{R}$ функцію, тобто $\varphi \in C^2$.

Отже, формула (4.2) визначає класичні розв'язки задачі (2.2), (2.3) для кожного $m \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$.

За рахунок дискретного параметра $i\pi m/(hc_2)$, цілком аналогічно до попередніх міркувань, можна розширити множину розв'язків задачі (2.2), (2.3) до вигляду

$$U(t,x) = \varphi(x_1+ix_3)\big[\psi(x_2+tc_2)-\psi(x_2-tc_2)\big]\begin{pmatrix}1\\0\\i\end{pmatrix}, \tag{4.3}$$

де ψ — довільна двічі неперервно диференційовна на $\mathbb{R}$ функція з періодом $T = 2c_2h$, тобто $\psi \in C^2_{2c_2h}$.

Отже, формула (4.3), в якій φ та ψ — нетривіальні функції з класу C^2 та $C^2_{2c_2h}$ відповідно, визначає класичний нетривіальний розв'язок задачі (2.2), (2.3).

Розглянемо тепер випадок побудови розв'язку задачі (2.2), (2.3) за належності вектора α до множини M_3. Нехай $\beta_{m,0} = \left(0, \dfrac{i\pi m}{c_2 h}, 0\right)$, $m \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, причому $\dfrac{mc_1}{c_2} = k \in \mathbb{N}$. Тоді за формулою (3.9) знаходимо нетривіальні розв'язки задачі (2.2), (2.3) у вигляді:

$$U_{k,0}(t,x) = e^{\frac{i\pi k}{c_1 h}x_2}\begin{pmatrix} a_{1k}\sin\dfrac{c_2\pi k t}{c_1 h}\\[2mm] a_{2k}\sin\dfrac{\pi k t}{h}\\[2mm] a_{3k}\sin\dfrac{c_2\pi k t}{c_1 h}\end{pmatrix}, \tag{4.4}$$

де $a_{1k},\ a_{2k},\ a_{3k}$ — довільні (не всі одночасно рівні нулю) сталі, $k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$.

З останнього зображення (4.4), в якому є дискретний параметр $i\pi k/(c_1 h)$, за допомогою диференціально-символьного методу можна отримати розв'язки задачі (2.2), (2.3) у вигляді

$$U(t,x) = \begin{pmatrix}\varphi_1(x_2+tc_2)-\varphi_1(x_2-tc_2)\\ \varphi_2(x_2+tc_1)-\varphi_2(x_2-tc_1)\\ \varphi_3(x_2+tc_2)-\varphi_3(x_2-tc_2)\end{pmatrix}, \tag{4.5}$$

де $\varphi_1, \varphi_3 \in C^2_{2c_2h}, \varphi_2 \in C^2_{2c_1h}$.

Зауважимо, що знайдений розв'язок (4.5) співпадає з (2.4), якщо $\varphi_1 = \varphi_3 = 0,\ \varphi_2(x) = \sin\dfrac{\pi x}{c_1 h}$.

Розглянемо ще один випадок побудови нетривіальних розв'язків задачі (2.2), (2.3) для векторів $\beta_{m,\gamma} = \left(\gamma, \dfrac{i\pi m}{c_1 h}, i\gamma\right)$ з множини $M_1,\ m \in \mathbb{Z}\backslash\{0\},\ \gamma \in \mathbb{C}$, причому $c_2/c_1 \notin \mathbb{N}$, $V_1(t, \beta_{m,\gamma}) = \dfrac{\sin(\pi m t/h)}{\pi m/h}$. За формулою (3.7) при $A = 1$ знаходимо

$$U_{m,\gamma}(t,x) = e^{\gamma x_1 + \frac{i\pi m}{c_1 h}\, x_2 + i\gamma x_3}\, \frac{\sin\dfrac{\pi m t}{h}}{\dfrac{\pi m}{h}} \begin{pmatrix} \gamma \\ \dfrac{i\pi m}{c_1 h} \\ i\gamma \end{pmatrix}. \tag{4.6}$$

Наявність неперервного параметра γ у формулі (4.6) дозволяє аналогічно до попередніх міркувань за допомогою диференціально-символьного методу отримати розв'язки задачі (2.2), (2.3) у вигляді

$$U_{m0}(t,x) = e^{\frac{i\pi m}{c_1 h} x_2} \sin\frac{\pi m t}{h} \begin{pmatrix} \varphi'(x_1 + i x_3) \\ \dfrac{i\pi m}{c_1 h}\, \varphi(x_1 + i x_3) \\ i\,\varphi'(x_1 + i x_3) \end{pmatrix}, \tag{4.7}$$

де $\varphi \in C^3$.

Оскільки у формулі (4.7) є дискретний параметр $i\pi m/(hc_1)$, то диференціально-символьний метод дозволяє на підставі (4.7) отримати класичні розв'язки задачі (2.2), (2.3) у вигляді

$$U(t,x) = \begin{pmatrix} \varphi'(x_1 + i x_3)\,[\psi(x_2 + tc_1) - \psi(x_2 - tc_1)] \\ \varphi(x_1 + i x_3)\,[\psi'(x_2 + tc_1) - \psi'(x_2 - tc_1)] \\ i\,\varphi'(x_1 + i x_3)\,[\psi(x_2 + tc_1) - \psi(x_2 - tc_1)] \end{pmatrix}, \tag{4.8}$$

де $\psi \in C^3_{2c_1 h}$.

Отже, формула (4.8), в якій φ та ψ — нетривіальні функції з класу C^3 та $C^3_{2c_1 h}$ відповідно, визначає класичний нетривіальний розв'язок задачі (2.2), (2.3).

Зауваження 4.1. Розв'язки (4.3), (4.5) і (4.8) задачі (2.2), (2.3) отримано на основі деяких (параметризованих комплексним γ та цілим m параметрами) підмножин векторів α з множини M та підпросторів векторів A з формул (3.7) – (3.9). Сукупність розв'язків можна значно розширити, використовуючи в аналогічний спосіб інші підмножини векторів α та A.

Висновки. Для однорідної системи рівнянь динамічної теорії пружності (2.2) досліджено задачу з однорідними двоточковими умовами за часом (2.3). Встановлено достатні умови (теорема 3.1) існування її нетривіальних класичних розв'язків. Наведено формули (3.7) – (3.9) розв'язків задачі (2.2), (2.3), а також подано приклади їхньої побудови.

Література

1. *Vallée-Poussin Ch. J.* Sur l'equation differentielle lineaire du second ordre. Determination d'une integrale par deux valeurs assignees. Extension aux equations d'ordre n // J. Math. Pures Appl. (9). – 1929. – **9**, № 8. – P. 125 – 144.
2. *Picone M.* Sui valori eccezionali di un parametro da cui dipende un'equazione differenziale lineare ordinaria del second'ordine // Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (1). – 1910. – **11**, № 1. – P. 1 – 144.
3. *Пташник Б. Й.* Задача типу Валле-Пуссена для гіперболічних рівнянь із сталими коефіцієнтами // Допов. АН УРСР. – 1966. – № 10. – С. 1254 – 1257.
4. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984. – 264 с.
5. *Пташник Б. Й., Симотюк М. М.* Багатоточкова задача для неізотропних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 2. – С. 241 – 254; ***English translation:*** Ukr. Math. J. – 2003. – **55**, № 2. – P. 293 – 310.
6. *Пташник Б. Й., Тимків І. Р.* Багатоточкова задача для параболічного рівняння зі змінними коефіцієнтами // Допов. НАН України. – 2008. – № 12. – С. 42 – 48.
7. *Пташник Б. Й., Тимків І. Р.* Багатоточкова задача для параболічних рівнянь високого порядку в паралелепіпеді // Нелін. коливання. – 2009. – **12**, № 3. – С. 252 – 265; ***English translation:*** Nonlinear Oscil. – 2009. – **12**, № 3. – P. 346 – 357.
8. *Symotyuk M. M., Tymkiv I. R.* Problem with two-point conditions for parabolic equation of second order on time // Carpathian Math. Publ. – 2014. – **6**, № 2. – P. 151 – 160.
9. *Борок В. М.* Классы единственности решения краевой задачи в бесконечном слое // Докл. АН СССР. – 1968. – **183**, № 5. – С. 995 – 998.
10. *Борок В. М., Перельман М. А.* О классах единственности решения многоточечной краевой задачи в бесконечном слое // Изв. вузов. Математика. – 1973. – № 8. – С. 29 – 34.
11. *Malanchuk O. M., Nytrebych Z. M.* Homogeneous two-point problem for PDE of the second order in time variable and infinite order in spatial variables // Open Math. – 2017. – № 15. – P. 101 – 110.
12. *Nytrebych Z., Malanchuk O., Il'kiv V., Pukach P.* Homogeneous problem with two-point in time conditions for some equations of mathematical physics // Azerb. J. Math. – 2017. – **7**, № 2. – P. 176 – 191.
13. *Nytrebych Z., Il'kiv V., Pukach P., Malanchuk O.* On nontrivial solutions of homogeneous Dirichlet problem for partial differential equations in a Layer // Kragujevac J. Math. – 2018. – **42**, № 2. – P. 193 – 207.
14. *Nytrebych Z., Malanchuk O., Il'kiv V., Pukach P.* On the solvability of two-point in time problem for PDE // Ital. J. Pure Appl. Math. – 2017. – № 38. – P. 715 – 726.
15. *Каленюк П. І., Нитребич З. М.* Узагальнена схема відокремлення змінних. Диференціально–символьний метод. – Львів: Вид-во нац. ун-ту "Львів. політехніка", 2002. – 292 с.
16. *Il'kiv V. S., Nytrebych Z. M., Pukach P. Y.* Boundary-value problems with integral conditions for a system of Lamé equations in the space of almost periodic functions // Electron. J. Differential Equations. – 2016. – **2016**, № 304. – P. 1 – 12.
17. *Бондаренко Б. А.* Базисные системы полиномиальных и квазиполиномиальных решений уравнений в частных производных. – Ташкент: ФАН, 1987.
18. *Лурье А. И.* Теория упругости. – М.: Наука, 1970.
19. *Снеддон И. Н., Берри Д. С.* Классическая теория упругости. – М.: Вузов. книга, 2008.

Одержано 04.03.18,
після доопрацювання — 25.06.19, 15.09.19