УДК 517.9

ІНВАРІАНТНІ МІРИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ ЛІНІЙНИХ СТОХАСТИЧНИХ СИСТЕМ У ГІЛЬБЕРТОВИХ ПРОСТОРАХ

І. Г. Новак, А. О. Станжицький

Нац. техн. ун-т України "КПІ"
просп. Перемоги, 37, Київ, 03056, Україна
e-mail: kavonk@ukr.net
blacksailsch@gmail.com

Coefficient conditions for the existence and uniqueness of invariant measures in Hilbert spaces for linear stochastic equations are found.

Для лінійних стохастичних рівнянь у гільбертових просторах знайдено коефіцієнтні умови існування та єдиності інваріантних мір.

Вступ. У даній роботі вивчаються умови існування інваріантних мір для такого лінійного стохастичного рівняння в гільбертовому просторі H:

$$du = Audt + dW_b(t), \tag{1}$$

де $A\colon D(A) \subset H \to H$ — лінійний замкнутий оператор, що генерує C_0 — напівгрупу в H, а H — значний процес Вінера $W_b(t)$ у вигляді

$$W_b(t) := \sum_{n=1}^{\infty} b_n \beta_n(t), \tag{2}$$

де $\{\beta_n, n \geq 0\}$ — незалежні скалярні процеси Вінера, задані на деякому ймовірнісному просторі $(\Omega, F, P),\ t \geq 0,\ b_n \in H$ і

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|b_n\|_H^2 < \infty. \tag{3}$$

При дослідженні асимптотичної поведінки розв'язків важливу роль відіграють інваріантні міри. Вивченню умов існування інваріантних мір для стохастичних рівнянь присвячено багато робіт (див., наприклад, роботи [1, 2], в яких наведено велику біографію). Базуючись на теоремі Крилова – Боголюбова про існування інваріантної міри [3], в [1, 2] запропоновано такий загальний підхід до питання про існування інваріантних мір.

1. Встановлюється компактність відповідної напівгрупи операторів $S(t)$, згенерованої оператором A в H.

2. Доводиться марковська властивість розв'язків рівняння та властивість Фелера перехідної напівгрупи.

3. Доводиться існування обмеженого при $t \geq 0$ у певному ймовірнісному сенсі розв'язку.

Альтернативний підхід до існування інваріантних мір, що базується на каплінг-методі, розвинуто, наприклад, у [4, 5].

У багатьох роботах для конкретних стохастичних рівнянь у частинних похідних з використанням згаданих вище абстрактних підходів отримано коефіцієнтні умови існування інваріантних мір [6 – 10].

Окрім умов існування інваріантних мір, важливим є питання їхньої єдиності, лише в цьому випадку можна сподіватися на ергодичну поведінку розв'язків.

Питанням існування та єдиності інваріантних мір для рівняння (1) і присвячено дану статтю. Вона складається зі вступу та двох частин. У першій частині дано постановку задачі та сформульовано основний результат. Його доведення, а також приклад конкретної реалізації рівняння (1) міститься в другій частині.

2. Постановка задачі та основний результат. Нехай $u, v \in H$. Через (u, v) позначимо скалярний добуток в H. Введемо до розгляду лінійний оператор в H

$$u \otimes v[h] := u(v, h), \quad h \in H.$$

Через Q позначимо лінійний в H оператор, пов'язаний з $W_b(t)$:

$$Q := \sum_{i=1}^{\infty} b_i \otimes b_i. \tag{4}$$

Лема 1. *Означений формулою (2) випадковий процес $W_b(t)$ є Q-вінерівським процесом у H з коваріаційним оператором (4).*

Нехай $\{F_t, t \geq 0\}$ — нормальна фільтрація, узгоджена з $W_b(t)$. Позначимо через $S(t)$ напівгрупу обмежених в H операторів, генератором якої є оператор A. Процес

$$W_A(t) = \int_0^t S(t-s)dW_b(s)$$

згідно з [1] називається стохастичною конволюцією. Як випливає з теореми 5.2 [1], процес $W_A(t)$ є гаусівським і

$$\operatorname{Cov} W_A(t) = Q_t = \int_0^t S(s)QS^*(s)ds,$$

де S^* — спряжений до S оператор.

Лема 2.

$$\operatorname{Tr} Q_t = \int_o^t \sum_{i=1}^{\infty} \|S(s)b_i\|^2 ds.$$

Якщо $\operatorname{Tr} Q_t$ скінченний, то згідно з теоремою 5.4 [1] рівняння (1) має для кожного $u_0(\omega) \in H$, $u_0 \in F_0$, вимірний єдиний слабкий розв'язок $u(t)$, $u(0) = u_0$, що задається формулою

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_o^t S(t-s)dW_b(s), \quad t \geq 0.$$

Даний розв'язок є процесом Маркова з перехідною функцією

$$P(t, x, A) = P\{u(t, x) \in A\},$$

де $u(t, x)$ — розв'язок (1) з початковою умовою $u(0, x) = x \in H$.

Із перехідною функцією пов'язана перехідна напівгрупа $P_t,\ t \geq 0$:

$$P_t\phi(x) = E\phi(u(t, x)), \quad \phi \in B_b(H), \quad t \geq 0, \quad x \in H, \tag{5}$$

де $B_b(H)$ — простір борелевих обмежених функціоналів на H.

Нехай $B(H)$ — σ-алгебра борелевих множин із H. Ймовірнісна міра μ на $(H, B(H))$ називається інваріантною відносно напівгрупи P_t, якщо

$$\int\limits_H P_t\phi(x)d\mu(x) = \int\limits_H \phi(x)d\mu(t)$$

для довільного $t \geq 0$ і довільної неперервної обмеженої на H функції ϕ.

Щодо оператора A будемо вважати виконаною умову:

а) A є самоспряженим оператором на H, що має дискретний спектр $\sigma = \{\lambda_k\}$, та існує $\epsilon > 0$ таке, що $|\mathrm{Re}\,(\lambda_k)| > \epsilon$ для всіх k.

Нехай $\{\phi_k\}$ — відповідні власні функції A. Позначимо

$$U_A := \mathrm{Span}\,\{\phi_k, \mathrm{Re}\,(\lambda_K) < 0\}.$$

Тоді, як випливає з [11] (п. 7.6) оператор A є експоненціально дихотомічним і для довільного $b \in U_A$ $\|S(t)b\| \to 0,\ t \to \infty$, а для довільного $b \notin U_A$ $\|S(t)b\| \to \infty,\ t \to \infty$.

Лема 3. $\|S(t)u_0\| \leq e^{-\mu t}\|u_0\|$ *для довільного* $u_0 \in U_A$, *де* $\mu = \max\{2\mathrm{Re}\,\lambda_k\}$, *для таких* λ_k, *що* $\mathrm{Re}\,\lambda_k < 0$.

Отже, дана лема показує, що напівгрупа $S(t)$ має експоненціально стискаючу властивість на U_A.

Основним результатом даної статті є така теорема.

Теорема 1. *Нехай для оператора* A *виконується умова а). Для рівняння (1) існує єдина інваріантна міра тоді і тільки тоді, коли* $b_n \in U_A$ *для всіх* $n \geq 1$; *іншими словами,*

$$b_n = \sum_{k\colon \mathrm{Re},(\lambda_k)<0} b_k^{(n)}\phi_k.$$

У цьому випадку носій інваріантної міри лежить у U_A.

3. Доведення лем та теореми 1. ***Доведення леми 1.*** Порахуємо $E\|W_b(t)\|^2$. Маємо

$$E\|W_b(t)\|^2 = E\left(\sum_i b_i(t)\beta_i(t), \sum_i b_i\beta_i(t)\right) = t\sum_i |bi|^2 < \infty.$$

Отже, $W_b(t)$ належить H з імовірністю 1. Очевидно, що $W_b(t)$ є гаусівським процесом із незалежними приростами і має неперервні в H траєкторії. Покажемо, що Q, визначений формулою (4), є обмеженим у H оператором. Дійсно, для довільного $h \in H$ отримуємо

$$\|Qh\| \leq \sum_i \|b_i(b_i, h)\| \leq \sum_i \|b_i\|^2\|h\|.$$

Звідси, згідно з (3), випливає обмеженість Q. Нехай $h,\ y$ — довільні елементи в H. Зі співвідношень

$$(Qh, y) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} b_i(b_i, h), y\right) = \sum_{i=1}^{\infty}(b_i(b_i, h), y) = \sum_{i=1}^{\infty}(b_i, h)(b_i, y)$$

та

$$(h, Qy) = \left(h, \sum_{i=1}^{\infty} b_i(b_i, y)\right) = \sum_{i=1}^{\infty}(h, b_i)(b_i, y)$$

випливає самоспряженість оператора Q, а при $h = y$ — його невід'ємність. Доведемо, що Q — ядерний оператор.

Нехай $\{e_i\}_1^{\infty}$ — ортонормований базис у H. Тоді

$$\operatorname{Tr} Q = \sum_{j=1}^{\infty}(Qe_j, e_j) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}((b_i \otimes b_i)e_j, e_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}(b_i(b_i, e_j)e_j) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(b_i, e_j)^2 = \sum_{i=1}^{\infty}\|b_i\|^2 < \infty.$$

Залишилося порахувати $\operatorname{Cov} W_b[h]$ для довільного $h \in H$. Маємо

$$\operatorname{Cov} W_b[h] := E(W_b \otimes W_b)[h] =$$

$$= E\left(\sum_{i=1}^{\infty} b_i\beta_i(t)\left(\sum_{j=1}^{\infty} b_j\beta_j(t), h\right)\right) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i(b_i t, h) = tQ[h],$$

що й доводить лему 1.

Доведення леми 2. Порахуємо слід оператора Q_t. Одержуємо

$$S(t)QS^*(t) = S(t)\left(\sum_{i=1}^{\infty} b_i \otimes b_i\right)S^*(t) = \sum_{i=1}^{\infty} S(t)(b_i \otimes b_i)S^*(t). \tag{6}$$

Але

$$S(t)(b_i \otimes b_i)S^*(t) = (S(t)b_i) \otimes (S(t)b_i). \tag{7}$$

Тоді для довільного $h \in H$ отримуємо

$$S(t)(b_i \otimes b_i)S^*(t)h = S(t)\left(b_i\left(b_i, S^*(t)h\right)\right) = S(t)b_i(S(t)b_i, h)) = (S(t)b_i) \otimes (S(t)b_i)$$

згідно з означенням операції $\otimes$. Далі, з (7) випливає, що (6) набирає вигляду

$$S(t)QS^*(t) = \sum_{i=1}^{\infty}(S(t)b_i) \otimes (S(t)b_i),$$

а тому

$$TrQ_t = \sum_{k=1}^{\infty}(Q_t e_k, e_k) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^t (S(s)b_i) \otimes (S(s)b_i) \otimes (S(s)b_i)ds e_k, e_k\right) =$$

$$= \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} (S(s)b_i, e_k)^2 ds = \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} \|S(s)b_i\|^2 ds,$$

що й доводить лему 2.

Доведення леми 3. Виконується рівність $u_0 = \sum_{k=1}^{\infty} C_k^0 \phi_k$, де $C_0^k = 0$, якщо $\operatorname{Re}\lambda_k < \infty$. Нехай $u(t)$ — розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} u_t = Au, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{8}$$

Розкладаючи $u(t)$ за власним базисом $\{\phi_k\}$ оператора A, отримуємо

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k(t)\phi_k. \tag{9}$$

Тоді, підставляючи (9) в (8), одержуємо

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k'(t)\phi_k = \sum_{k=1}^{\infty} C_k(t)A\phi_k = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_k C_k(t)\phi_k,$$

звідки

$$C_k(t) = C_k^0 e^{\lambda_k t}.$$

А тому

$$\|u(t)\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |C_k(t)|^2 = \sum_{k:\ Re(\lambda_k)<0} \left(C_k^0\right)^2 e^{2\operatorname{Re}\lambda_k t} \le e^{-\mu t} \sum_{k=1}^{\infty} \left(C_k^0\right)^2 = e^{-\mu t}\|u_0\|^2.$$

Лему 3 доведено.

Доведення теореми 1. Із експоненціальної дихотомії A, як вказано вище, випливає, що або $\|S(t)b\| \to 0,\ t \to \infty$, або $\|S(t)b\| \to \infty,\ t \to \infty$ для кожного $b \in H$. Тому з пропозиції 11.10 [1] отримуємо, що існує не більше однієї інваріантної міри для рівняння (1). Але з теореми 11.7 [1] тоді маємо, що існування інваріантної міри рівносильне виконанню умови

$$\sup_{t \ge 0} \operatorname{Tr} Q_t < \infty. \tag{10}$$

Завдяки лемам 2 і 3 та умовам теореми 1 маємо

$$\operatorname{Tr} Qt = \int_0^t \sum_{i=1}^{\infty} |S(s)b_i|^2 ds \le \int_0^t \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\mu t}|b_i|^2 \le \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^{\infty} |bi|^2 < \infty.$$

Отже, (10) виконано.

Врахувавши тепер, що $\|S(t)b\| \to 0,\ t \to \infty$, якщо $b \notin U_A$, маємо, що (10) виконується лише у випадку, коли $b \in U_A$. Отже, для (1) існує єдина інваріантна міра.

Покажемо, що вона зосереджена на U_A.

Для цього доведемо інваріантність підпростору U_A для рівняння (1), тобто покажемо, що коли $u_0 = u(0) \in U_A$, тоді $u(t) \in U_A$ для всіх $t > 0$ з імовірністю 1.

Зазначимо, що згідно з теоремою 5.4 [1] єдиний слабкий розв'язок із початковою умовою $u(0) = u_0$ має вигляд

$$u(t) = S(t)u_0 + \int\limits_0^t S(t-s)dW_b(s), \tag{11}$$

де $W_b(t) = \sum_{i=1}^{\infty} b_k\beta_k(t)$ і $b_k \in U_A$. Але для довільного $h \in H$ $Qh = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(b_k, h) \in U_A$. Отже, $Q\colon H \to U_A$.

Оскільки Q є самоспряженим додатно визначеним компактним оператором, то в U_A існує його ортонормований базис $\{\varphi_k\}$ із додатними власними числами $\{\mu_k\}$, тобто

$$Q\varphi_k = \mu\varphi_k.$$

А отже, $W_b(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\mu_i}\varphi_k\beta_i(t)$ згідно з пропозицією 4.1 [1].

Звідси маємо, що

$$\int\limits_0^t S(t-s)dW_b(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\mu_i} \int\limits_0^t S(t-s)\varphi_k d\beta_i(s).$$

Але, з іншого боку, з означення U_A випливає, що ψ_k є базисом в U_A, а тому

$$\varphi_k = \sum_k C^0_{k,i}\psi_k.$$

Аналогічно до доведення леми 3 маємо, що

$$S(t-s)\varphi_k = \sum_k C^0_{k,i} e^{\lambda_k(t-s}\varphi_k \in U_A.$$

Отже, $\int_0^t S(t-s)dW_b(s) \in U_A$. Очевидно також, що коли $u_0 \in U_A$, тоді й $S(t)u_0 \in U_A$.

Тоді з (11) отримуємо, що U_A є інваріантним підпростором для рівняння (1). Далі, використовуючи експоненціальне затухання $S(t)$ на U_A, ми можемо показати існування інваріантної міри для (1) на U_A аналогічно до того, як це зроблено в теоремі 5 [9].

Теорему 1 доведено.

Наведемо тепер приклад оператора A, що задовольняє умови теореми.

Приклад 1. Нехай $Au := \dfrac{1}{\rho}\operatorname{div}(\rho\nabla u)$, де $u = H = L^2_\rho\left(\mathbf{R^d}\right)$ і $\rho(x) \in L^1\left(\mathbf{R^d}\right) \bigcap C^2\left(\mathbf{R^d}\right)$, та задовольняє умову

$$\frac{1}{2}\frac{\Delta\rho}{\rho} - \frac{|\nabla\rho|^2}{4\rho^2} \to \infty, \quad |x| \to \infty. \tag{12}$$

Покажемо тоді, що A має дискретний спектр і U_A є підпростором, натягнутим на всі, окрім скінченного числа, власні функції оператора A.

Для цього введемо оператор $Bu := \Delta u - q(x)u$, де $q(x)$ — дійсна функція в $\mathbf{R^d}$. Надалі використаємо результат про характеризацію спектра оператора B в $L^2\left(\mathbf{R^d}\right)$, викладений у такій теоремі.

Теорема 2 ([12], пп. 16.4). *Нехай* $q(x)$ *— неперервна в* $\mathbf{R^d}$ *функція така, що* $q(x) \to \infty$, $|x| \to \infty$. *Тоді спектр оператора* B *в* $L^2\left(\mathbf{R^d}\right)$ *є дискретним.*

При цьому, якщо $q(x) \geq q_o$, *то власні значення* $\{\lambda_n\}$ *містяться в інтервалі* $(-\infty; -q_0]$ *і* $\lambda_n \to -\infty,\ n \to \infty$.

Розглянемо тепер спектральну задачу: знайти $\lambda \in \mathbf{R}$ і функції $u \in L^2_\rho\left(\mathbf{R^d}\right)$ такі, що

$$\frac{1}{\rho}\operatorname{div}(\rho\nabla u) + \lambda u = 0, \quad x \in \mathbf{R^d}. \tag{13}$$

За допомогою заміни $u = v\rho^{-\frac{1}{2}}$ співвідношення (13) запишеться у вигляді

$$\Delta v + \left(\frac{|\nabla\rho|^2}{2\rho^2} - \frac{\Delta\rho}{4\rho}\right)v + \lambda v = 0. \tag{14}$$

З теореми 2 тепер маємо, що коли виконана умова (12), тоді спектральна задача (14) має дискретний від'ємний спектр $\{\lambda_k\}$ із відповідними власними функціями $\left\{v_k(x) \in L^2\left(\mathbf{R^d}\right)\right\}$, що еквівалентне тому, що $\{\lambda_k\}$ і $\left\{u_k = v_k\rho^{-\frac{1}{2}}\right\} \in L^2_\rho\left(\mathbf{R^d}\right)$ є спектром і власними функціями для (13).

Література

1. *Da Plato G., Zabczyk J.* Stochastic equations in infinite dimensions // Encyclopedia Math. Appl. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992. – **44**. – 512 p.
2. *Da Plato G., Zabczyk J.* Ergodicity for infinite-dimensional systems // London Math. Soc. Lecture Note Ser. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1996. – **229**. – 352 p.
3. *Kryloff N., Bogoliouboff N.* La theorie generale de la measure dans son application a l'etude des systems dynamiques de la mecanique non lineaire // Ann. of Math. (2). – 1937. – **38**, № 1. – P. 65 – 113.
4. *Bogachev V. I., Rockner M.* Elliptic equations for measures on infinite-dimensional spaces and applications // Probab. Theory Related Fields. – 2001. – **120** (**4**). – P. 445 – 496.
5. *Mueller G.* Coupling and invariant measures for the heat equation with noise // Ann. Probab. – 1993. – **21(4)**. – P. 2189 – 2199.
6. *Assing S., Manthey R.* Invariant measures for stochastic heat equations with unbounded coefficients // Stochastic Process. Appl. – 2003. – **103(2)**. – P. 237 – 256.
7. *Cerrai S.* Stochastic reaction diffusion system with multiplicative noise and non-Lipschitz reaction term // Probab. Theory Related Fields. – 2003. – **125(2)**. – P. 271 – 304.
8. *Misiats O., Stanzhytskyi O., Yip N. K.* Existence and uniqueness of invariant measures for stochastic reaction-diffusion equations in unbounded domains // J. Theoret. Probab. – 2015. – **29(3)**. – P. 996 – 1026.
9. *Misiats O., Stanzhytskyi O., Yip N. K.* Asymptotic analysis and homogenization of invariant measures // Stoch. Dyn. – 2019. – **19**, № 2. – 1950015.
10. *Misiats O., Stanzhytskyi O., Yip N. K.* Invariant measures for stochastic reaction-diffusion equation with weakly dissipative nonlinearities // Stochastics. – 2019; doi.org/10.1080/17442508.2019.1691212.
11. *Henry D.* Geometric theory of semilinear parabolic equations // Lect. Notes Math. – 1981. – **840**. – 350 p.
12. *Titchmarsh E. C.* Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations // Oxford: Clarendon Press, 1958. – **2**. – 404 p.

Одержано 19.10.19