УДК 517.977.55, 519.62

МЕТОД ДИСКРЕТИЗАЦИИ ДРОБНО-ПРОИЗВОДНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Ф. А. Алиев, Н. А. Алиев, Н. И. Велиева

Ин-т прикл. математики, Бакин. гос. ун-т
ул. З. Халилова, 23, Баку, AZ1148, Азербайджан
e-mail: f_aliev@yahoo.com,
nihan.aliev@gmail.com,
nailavi@rambler.ru

К. Г. Гасымова

Азербайджан. гос. пед. ун-т
ул. У. Гаджибекова, 34, Баку, AZ1000, Азербайджан,
e-mail: kamile11@hotmail.com

We develop an exact method of discretization for the solution of linear systems of ordinary fractional-derivative differential equations with constant matrix coefficients. It is shown that the obtained linear discrete system in this case does not have constant matrix coefficients. Further, this method is compared with the known approximate method. The above scheme is developed for arbitrary linear systems with piecewise constant perturbations. The results are applied to the discretization of linear controlled systems and are illustrated by numerical examples.

Розвинуто точний метод дискретизації для розв'язку лінійних систем звичайних дробово-твірних диференціальних рівнянь із постійними матричними коефіцієнтами. Показано, що одержана лінійна дискретна система в даному випадку не має постійних матричних коефіцієнтів. Далі даний метод порівнюється з відомим наближеним методом. Наведена схема розвивається для довільних лінійних систем з кусково-постійними збуреннями. Результати застосовуються для дискретизації лінійних керованих систем та ілюструються числовими прикладами.

Введение. В последнее время много внимания уделяется задаче Коши и различным краевым задачам для решения дифференциальных уравнений дробного порядка [1 – 11]. Можно показать, что во многих практических задачах, таких как добыча нефти с помощью штанга-насосной установки, газлифтная процедура и других, движение описывается дифференциальным либо конечно-разностным соотношениями, где при постановке различных задач оптимизации и их решении сталкиваются с трудностями из-за их "неоднородности" [5, 6]. Поэтому приходится дискретизировать эти уравнения с помощью фундаментальных матриц для линейных систем дифференциальных уравнений дробного порядка.

В [1] дана приближенная дискретизация, которая при решении конкретных задач имеет много неточностей. В [5] имеется решение системы линейных дифференциальных уравнений в смысле Римана – Луивилля, однако приведенная там формула имеет неточности, что не позволяет восстановить соответствующую фундаментальную матрицу. Поэтому с использованием формул из [4, 8] в данной статье формируется фундаментальная матрица и приводится дискретизация линейных систем обыкновенных дробно-производных дифференциальных уравнений с постоянными матричными коэффициентами. Эти результаты распространяются для линейных систем дифференциальных уравнений дробного порядка с возмущением, которые можно использовать для дискретизации линейных систем уравнений с кусочно-постоянными управляющими воздействиями. На примере сравниваются результаты дискретизации, приведенные в [1], приближенных и предлагаемых в данной работе точных формул, где ошибки имеют точность 10^{-2}.

Постановка задачи. Как известно [12 – 14], задача Коши для систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными матричными коэффициентами

$$\dot{x} = Ax, \quad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

имеет решение в виде

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0), \tag{2}$$

где A — квадратная постоянная $(n \times n)$-мерная матрица, x — n-мерный неизвестный вектор.

Соотношение (2) позволяет вычислить численно решение $x(t)$ в каждой точке t_i, входящей в область определения $[t_0, T]$. Действительно, если разделить область определения $[t_0, T]$ с постоянным шагом Δ, то из (2) для каждой точки t_i и t_{i+1} имеем разностное соотношение

$$x(t_{i+1}) = e^{A\Delta}x(t_i), \quad x(t_0) = x_0. \tag{3}$$

Если удастся точно вычислить матрицу $e^{A\Delta}$, то разностное соотношение (3) в каждой точке t_i определяет $x(t_i)$ точно. Если шаг Δ не равномерный (не постоянный) и имеет вид Δ_i, то (3) заменяется следующим разностным уравнением [12 – 15]:

$$x(t_{i+1}) = e^{A\Delta_i}x(t_i), \tag{4}$$

которое является системой нестационарных линейных конечно-разностных уравнений.

Если рассмотреть дискретизацию задачи Коши (1), заменив производные $\dot{x}$ разностным выражением $\dfrac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{\Delta}$, то приближенная форма уравнения (1) будет иметь вид

$$\tilde{x}(t_{i+1}) = (E + \Delta \mathrm{A})\tilde{x}(t_i), \quad \tilde{x}(t_0) = x_0, \tag{5}$$

где при оптимальном выборе Δ можно обеспечить достаточную близость решения (5) к (3). Легко видеть, что (5) фактически является линеаризацией матриц $e^{A\Delta}$ из соотношения (3). Отметим, что, как и в [16], надо выбрать Δ таким образом, чтобы структурное свойство уравнения (1) не менялось при переходе к (5).

Приближенная дискретизация для дробных производных через фундаментальные матрицы. Если рассмотреть системы обыкновенных дробно-производных дифференциальных уравнений с постоянными матричными коэффициентами вида

$$D^{\alpha}x(t) = Ax(t), \quad x(t_0) = x_0, \tag{6}$$

в интервале $[t_0, T]$, то вид дискретизации (4) для данного случая изменится, т. е. простая формула (4) (или же (5)) для случая (6) полностью изменяется. Действительно (см. [1], формулы (3.109) при $B = 0$), приближенное решение уравнения (6) в интервале определения $[t_0, T]$ имеет вид

$$x((k+1)\Delta) = (A\Delta^\alpha + \alpha E)\, x(k\Delta) - \sum_{i=2}^{k+1} (-1)^i \binom{\alpha}{i} x((k+1-i)\Delta), \tag{7}$$

и для $k = 0$

$$x(\Delta) = (A\Delta^\alpha + \alpha E)\, x(0), \tag{8}$$

где

$$\binom{\alpha}{i} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-i+1)}{i!}.$$

Используя результаты [1], приведем приближенное вычисление между $x(k+1)$ и $x(k)$. Как известно [1], между $x(k+1)$ и $x(0)$ имеется связь:

$$x(k+1) = \Phi(k+1)x(0), \tag{9}$$

где

$$\Phi(k+1) = (A\Delta^\alpha + \alpha E)\, \Phi(k) - \sum_{i=2}^{k+1} (-1)^i \binom{\alpha}{i} \Phi(k+1-i), \tag{10}$$

$$\Phi(1) = (A\Delta^\alpha + \alpha E)\, \Phi(0), \quad \Phi(0) = I.$$

Из (9) для $x\,(0)$ имеем

$$x(0) = \Phi^{-1}(k)x(k). \tag{11}$$

Как следует из (9), (11), заменяя $k+1$ на k и m соответственно, получаем

$$x(k) = \Phi(k)x(0),$$

$$x(0) = \Phi^{-1}(m)x(m)$$

и

$$x(k) = \Phi(k)\Phi^{-1}(m)x(m).$$

Обозначим

$$\Phi(k,m) = \Phi(k)\Phi^{-1}(m). \tag{12}$$

Тогда $\Phi(k,m)$ из (12) можно рассматривать как фундаментальную матрицу уравнений (6), т. е.

$$x(k) = \Phi(k,m)x(m). \tag{13}$$

Таким образом, из (13) между $x(k+1)$ и $x(k)$ имеем связь

$$x(k+1) = \Phi(k+1,k)x(k), \tag{14}$$

что является приближенной дискретизацией уравнения (6) через фундаментальную матрицу (12).

Определение аналитических видов фундаментальной матрицы уравнения (6). Как показано [2 – 4], точное решение уравнения (6) (аналогично соотношению (2)) имеет вид

$$x(t)=\left[\sum_{s=0}^{2q}A^{\frac{s}{2p+1}}\frac{t_0^{\frac{s-2q}{2q+1}}}{\frac{s-2q}{2q+1}!}\right]^{-1}\sum_{s=0}^{2q}\left[A^{\frac{s}{2p+1}}\frac{t^{\frac{s-2q}{2q+1}}}{\frac{s-2q}{2q+1}!}+A^{\frac{s+2q+1}{2p+1}}\int\limits_{t_0}^{t}\frac{(t-\tau)^{\frac{s-2q}{2q+1}}}{\frac{s-2q}{2q+1}!}e^{A^{\frac{2q+1}{2p+1}}(\tau-t_0)}d\tau\right]x_0, \tag{15}$$

где $\alpha=\dfrac{2p+1}{2q+1}$, и p, q — натуральные числа.

Таким образом, аналогично дискретному соотношению (3) для задачи (6) можно построить соответствующее соотношение. Тогда из (14) аналитическая форма фундаментальной матрицы для уравнения (6) имеет вид

$$\Phi(t,t_0)=\left[\sum_{s=0}^{2q}A^{\frac{s}{2p+1}}\frac{t_0^{\frac{s-2q}{2q+1}}}{\frac{s-2q}{2q+1}!}\right]^{-1}\times$$

$$\times\sum_{s=0}^{2q}\left[A^{\frac{s}{2p+1}}\frac{t^{\frac{s-2q}{2q+1}}}{\frac{s-2q}{2q+1}!}+A^{\frac{s+2q+1}{2p+1}}\int\limits_{t_0}^{t}\frac{(t-\tau)^{\frac{s-2q}{2q+1}}}{\frac{s-2q}{2q+1}!}e^{A^{\frac{2q+1}{2p+1}}(\tau-t_0)}\,d\tau\right], \tag{16}$$

$$\Phi(t_0,t_0)=E.$$

Отметим, что соотношения (15), (16) позволяют представить общее решение уравнения (6) в виде

$$x(t)=\Phi(t,t_0)x(t_0), \tag{17}$$

которое, в свою очередь, позволяет дискретизировать (6) в соответствующем виде (точный аналог (13)).

Далее рассматривается дискретизация уравнения (6) с использованием соотношений (16), (17), приводится приближенный алгоритм для вычисления $\Phi(t,t_0)$ на основе [1] и эти результаты сравниваются на численном примере. Показывается, что при $\Delta\to 0$ оба результата становятся близкими друг к другу. Полученные результаты развиваются для случая, когда уравнение (6) заменяется уравнением с возмущением

$$D^{\alpha}x=Ax+f,\quad x(t_0)=x_0, \tag{18}$$

где f — n-мерный известный вектор возмущений. С использованием (15) приводится дискретизация уравнения (18). Отметим, что такая задача более подходит для линейной дискретной системы управлений [8 – 11, 17], требующей отдельной разработки.

Точная дискретизация уравнения (6). Пусть уравнение (6) определено в интервале (t_0,T). Разделим этот интервал на k частей (t_i,t_{i+1}), $i=0,1,2,\ldots,k-1$. Тогда на каждом из этих подинтервалов дискретный аналог уравнения (6) на основе соотношений (16), (17) имеет вид

$$x(t_{i+1})=\Phi(t_{i+1},t_i)x(t_i),\quad x(t_0)=x_0, \tag{19}$$

$$\Phi(t_{i+1},t_i)=\left[\sum_{s=0}^{2q}A^{\frac{s}{2p+1}}\frac{t_i^{\frac{s-2q}{2q+1}}}{\left(\dfrac{s-2q}{2q+1}\right)!}\right]^{-1}\times$$

$$\times\sum_{s=0}^{2q}\left[A^{\frac{s}{2p+1}}\frac{t_{i+1}^{\frac{s-2q}{2q+1}}}{\dfrac{s-2q}{2q+1}!}+A^{\frac{s+2q+1}{2p+1}}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\frac{(t_{i+1}-\tau)^{\frac{s-2q}{2q+1}}}{\dfrac{s-2q}{2q+1}!}e^{(\tau-t_i)A^{\frac{2q+1}{2p+1}}}d\tau\right]. \tag{20}$$

Отметим, что решения уравнений (6) по формулам (19), (20) дают точные значения в точках $t_i,\ i=0,1,\ldots,k.$ Фактически (18), (19) при $\alpha=1$ (при $p=0,\ q=0$) совпадают с (4).

Вычисление фундаментальных матриц (19) составляет определенные трудности из-за входящего в него интеграла. Поэтому, подставляя выражение экспоненциальной функции, входящее в подынтегральное выражение, как и в [4] имеем

$$\Phi(t_{i+1},t_i)=\left[\sum_{s=0}^{2q}A^{\frac{s}{2p+1}}\frac{t_i^{\frac{s-2q}{2q+1}}}{\left(\dfrac{s-2q}{2q+1}\right)!}\right]^{-1}\sum_{s=0}^{2q}\left[A^{\frac{s}{2p+1}}\frac{t_{i+1}^{\frac{s-2q}{2q+1}}}{\dfrac{s-2q}{2q+1}!}\right.$$

$$\left.-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k!}A^{\frac{s+(k+1)(2q+1)}{2p+1}}e^{\Delta_iA^{\frac{2q+1}{2p+1}}}\frac{\Delta_i^{k+\frac{s+1}{2q+1}}}{\dfrac{s-2q}{2q+1}!\left(k+\dfrac{s+1}{2q+1}\right)}\right], \tag{21}$$

где $\Delta_i=t_{i+1}-t_i=\mathrm{const}.$

Теперь остановимся на случае, когда начальная задача (6) заменяется задачей

$$D^{\alpha}x(t)=Ax(t)+f(t),\quad x(t_0)=x_0, \tag{22}$$

где $f(t)$ на интервалах (t_i,t_{i+1}) являются постоянными, т. е. в интервале (t_0,T) являются кусочно-постоянными. Тогда, используя соотношения (21) из [4], можно легко констатировать, что

$$x(t_{i+1})=\Phi(t_{i+1},t_i)x(t_i)+g(t_i), \tag{23}$$

где $\Phi(t_{i+1},t_i)$ определяется из (21), а $g(t_i)$ имеет вид [4]

$$g(t_i)=\left[\sum_{s=0}^{2q}A^{\frac{s}{2p+1}}\frac{t_i^{\frac{s-2q}{2q+1}}}{\left(\dfrac{s-2q}{2q+1}\right)!}\right]^{-1}\sum_{s=0}^{2q}A^{\frac{s}{2p+1}}\left[\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{A^{\frac{s+(k+1)(2q+1)}{2p+1}}}{\dfrac{s-2q}{2q+1}!k!\left(k+\dfrac{s+1}{2q+1}\right)}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\sum_{l=0}^{\infty}\frac{A^{l\frac{2q+1}{2p+1}}}{l!}\frac{(t_{i+1}-t_i)^{l+k+1+\frac{s+1}{2q+1}}}{l+k+1+\dfrac{s+1}{2q+1}}\right)+\left(\frac{t_{i+1}^{\frac{s+1}{2q+1}}-t_i^{\frac{s+1}{2q+1}}}{\dfrac{s+1}{2q+1}!}\right)\right]f(t_i). \tag{24}$$

Отметим, что формулы (23), (24) можно распространять для дискретизации линейных стационарных систем управления [18], которые в отличие от [1] позволят точно решать соответствующие задачи управления. Специфики дискретизации классических задач и данной задачи являются существенно различными. Если в задаче (1) фундаментальная матрица Φ при $\Delta_i = \Delta$ является постоянной, то здесь, как видно из (21) и (24), фундаментальная матрица не является постоянной.

Численные сравнения. Теперь остановимся на сравнении результатов приближенных и точных фундаментальных матриц (13) и (21). Поэтому проанализируем их на следующем примере.

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$D^{2\alpha}y + y = 0, \quad 0 < \alpha < 1, \tag{25}$$

где с помощью соответствующих преобразований

$$y_1 = y, \quad D^{\alpha}y_1 = y_2 \tag{26}$$

получим системы дробно-производных дифференциальных уравнений

$$D^{\alpha}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}. \tag{27}$$

Из-за отсутствия нахождения фундаментальных матриц [5] пытаемся провести сравнение с приближенным результатом [1].

Пусть уравнение (27) определено в интервале $[0.01, 1.01]$. Разделим этот интервал на пять частей с постоянным шагом 0.2. Тогда по формуле (10), (11) при $\alpha = \dfrac{1}{3}$ приближенные фундаментальные матрицы имеют вид

$$\begin{gathered}
\bar{\Phi}(0.21,\, 0.01) = \begin{bmatrix} 3.33333333e-01 & 9.1813688e-01 \\ -2.5147021e-01 & 3.33333e-01 \end{bmatrix} \\
\bar{\Phi}(0.41,\, 0.21) = \begin{bmatrix} -8.6618560e-03 & 6.120376e-01 \\ -1.6764680e-01 & 8.6618529e-03 \end{bmatrix}, \\
\bar{\Phi}(0.61,\, 0.41) = \begin{bmatrix} -5.804457e-02 & 2.9809285e-01 \\ -8.16452e-02 & -5.804457e-02 \end{bmatrix}, \\
\bar{\Phi}(0.81,\, 0.61) = \begin{bmatrix} -3.3543698e-02 & 1.7075667e-01 \\ -4.67688637e-02 & -3.354369-02 \end{bmatrix}, \\
\bar{\Phi}(1.01,\, 0.81) = \begin{bmatrix} -1.72097833e-02 & 1.3480937e-01 \\ -3.6923205e-02 & -1.72093e-02 \end{bmatrix}.
\end{gathered} \tag{28}$$

Теперь находим точные фундаментальные матрицы по формуле (21) и имеем

$$\Phi(0.21,\, 0.01) = \begin{bmatrix} 8.253515142e-02 & 6.623231589e-02 \\ 6.6232315e-02 & 8.2535151422e-02 \end{bmatrix},$$

$$\begin{gathered}\Phi(0.41,\,0.21)=\begin{bmatrix}4.014333789e-01 & 3.91934853e-02\\ -3.91934853771e-02 & 4.014333789e-01\end{bmatrix},\\ \Phi(0.61,\,0.41)=\begin{bmatrix}3.9781124825e-01 & 5.4958790553e-02\\ -5.495879055e-02 & 3.9781124811e-01\end{bmatrix},\\ \Phi(0.81,\,0.61)=\begin{bmatrix}3.957906410e-01 & 9.46203741871e-02\\ -9.46203741873e-02 & 3.9579064106e-01\end{bmatrix},\\ \Phi(1.01,\,0.81)=\begin{bmatrix}4.0040509424e-01 & 1.3019825994e-01\\ -1.3019825995e-01 & 4.0040509421e-01\end{bmatrix}.\end{gathered}\tag{29}$$

Составим таблицы фундаментальных матриц из (28) с точностью 10^{-4}:

$$\bar{\Phi}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0.3 & 0.9 & -0.0008 & 0.61 & -0.0058 & 0.029 & -0.033 & 0.017 & -0.017 & 0.134\\ 0 & 1 & -0.25 & 0.3 & -0.167 & -0.0008 & -0.8016 & -0.0058 & -0.046 & 0.033 & -0.0369 & -0.017\end{bmatrix}.$$

Составим таблицы фундаментальных матриц из (29) с точностью 10^{-4}:

$$\Phi=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0.08 & 0.06 & -0.0401 & 0.391 & 0.0397 & 0.0054 & 0.039 & 0.0946 & 0.0404 & 0.130\\ 0 & 1 & -0.062 & 0.08 & -0.0397 & -0.0401 & -0.054 & 0.0397 & -0.094 & 0.039 & -0.13 & 0.0404\end{bmatrix}.$$

Норма разностей фундаментальных матриц $\bar{\Phi}$ и Φ имеет вид $\|\bar{\Phi}-\Phi\|=1.39$.

Решение уравнение (27) по формуле (14) (см. [1], (3.109)) имеет вид

$$x(0)=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},\quad x(1)=\begin{bmatrix}2.69\\0.41\end{bmatrix},\quad x(2)=\begin{bmatrix}1.21\\-0.018\end{bmatrix},\quad x(3)\begin{bmatrix}0.53\\-0.019\end{bmatrix},$$

$$x(4)=\begin{bmatrix}0.30\\-0.011\end{bmatrix},\quad x(5)=\begin{bmatrix}0.25\\-0.0071\end{bmatrix},$$

а по формуле (23) —

$$y(0)=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},\quad y(1)=\begin{bmatrix}0.21\\0.098\end{bmatrix},\quad y(2)=\begin{bmatrix}0.091\\0.031\end{bmatrix},\quad y(3)=\begin{bmatrix}0.037\\0.0079\end{bmatrix},$$

$$y(4)=\begin{bmatrix}0.01\\-0.0005\end{bmatrix},\quad y(5)=\begin{bmatrix}0.006\\-0.0022\end{bmatrix}.$$

Разность между решениями x и y имеет вид $\|x-y\|=2.34$.

Отметим, что существует другой метод решения системы линейных дифференциальных уравнение дробного порядка [5]. В настоящей статье была составлена фундаментальная матрица $\tilde{\Phi}$ для (27), где норма разностей $\tilde{\Phi}$ и $\bar{\Phi}$ имеет 10^{-2} порядок точности.

Таким образом, приведенная здесь формула дискретизации (23) дает более адекватный результат.

Заключение. Приводится новая формула определения фундаментальных матриц для систем линейных однородных дробно-производных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Полученные результаты переносятся на случай с возмущениями. Такой подход позволяет дискретизировать задачу Коши. Показано, что в отличие от классических задач Коши соответствующая дискретизация для постоянных шагов дает нестационарные дискретные системы.

Литература

1. C. A. Monje, Y. Q. Chen, B. M. Vinagre, D. Xue, V. Felue, *Fractional-order systems and controls. Fundamentals and applications*, Springer, London (2010).
2. F. A. Aliev, N. A. Aliev, N. A. Safarova, *Transformation of the Mittag – Leffler function to an exponential function and some of its applications to problems with a fractional derivative*, Appl. Comput. Math., **18**, № 3, 316 – 325 (2019).
3. F. A. Aliev, N. A. Aliev, N. A. Safarova, K. G. Gasimova, N. I. Velieva, *Solving the linear fractional derivatives ordinary differential equations with constant matrix coefficients*; arXiv:1805.06700 [math.DS]
4. F. A. Aliev, N. A. Aliev, N. A. Safarova, *Solution of linear fractional derivative ordinary differential equations with constant matrix*, Appl. Comput. Math., **17**, № 3, 317 – 322 (2018).
5. B. Bonilla, M. Rivero, J. J. Trujillo, *On systems of linear fractional differential equations with constant coefficients*, Appl. Math. Comput., **187**, 68 – 78 (2007).
6. Z. M. Odibat, *Analytic study on linear systems of fractional differential equations*, Comput. Math. Appl., **59**, № 3, 171 – 1183.
7. F. A. Aliev, N. A. Aliev, N. A. Safarova, K. G. Gasimova, M. F. Radjabov, *Analytical construction of regulators for systems with fractional derivatives*, Proc. Inst. Appl. Math., **6**, № 2, 252 – 265.
8. Ф. А. Алиев, Н. А. Алиев, Н. А. Сафарова, Н. И. Велиева, *Алгоритм решения задачи Коши для стационарных линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений дробного порядка*, Proc. IAM, **7**, № 2, 234 – 246.
9. H. M. Srivastava, N. A. Aliev, G. H. Mammadova, F. A. Aliev, *Some remarks on the paper, entitled “Fractional and operational calculus with generalized fractional derivative operators and mittag-leffler type functions” by Z. Tomovski, R. Hilfer, H. M. Srivastava*, TWMS J. Pure Appl. Math., **8**, № 1, 112 – 114 (2018).
10. J. A. Lypez-Renteria, B. Aguirre-Hernandez, G. Fernandez-Anaya, *LMI stability test for fractional order initialized control systems*, Appl. Math. Comput., **18**, № 1, 50 – 61 (2019).
11. S. Abbas, M. Benchohra, Y. Zhou, A. Alsaedi, *Hilfer and Hadamard fractional differential equations in Frechet spaces*, TWMS J. Pure Appl. Math., **10**, № 1, 102 – 116 (2019).
12. Н. М. Матвеев, *Дифференциальные уравнения*, Москва, Просвещение (1988).
13. E. A. Coddington, N. Levinson, *The theory of ordinary differential equations*, McGraw-Hill, New York (1955).
14. Ю. И. Андреев, *Управление конечномерными линейными объектами*, Наука, Москва (1976).
15. В. Б. Ларин, *Управление шагающими аппаратами*, Наукова думка, Киев (1980).
16. В. Д. Михотин, Э. К. Шахов, *Дискретизация и восстановление сигналов в информационно-измерительных системах, Учеб. пособие*, Изд-во ППИ, Пенза (1982).
17. А. М. Летов, *Аналитическое конструирование регуляторов. I*, Автоматика и телемеханика, **21**, вып. 4, 436 – 441 (1960).
18. Ф. А. Алиев, В. Б. Ларин, *Об оценках области устойчивости системы при изменении ее параметров*, Proc. IAM, **7**, № 1, 131 – 138 (2018).

Получено 26.08.19