

ФУНКЦІЇ З ІЗОЛЬОВАНИМИ КРИТИЧНИМИ ТОЧКАМИ НА МЕЖІ НЕОРІЄНТОВАНОЇ ПОВЕРХНІ

Б. І. Гладіш

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
просп. акад. Глушкова, 4е, Київ, 03127, Україна
e-mail: biv92@ukr.net,
bohdanahlyadysh@gmail.com

We consider simple smooth functions with isolated critical points on the boundary of a smooth compact connected nonoriented surface with one component of the boundary which are also isolated critical points of the corresponding restrictions of the functions to the boundary. For the subsequent classification, we introduce the notion of a chord diagram of a saddle critical level. We give conditions of the topological equivalence in terms of chord diagrams. By using the obtained results, we determine the number of the mentioned functions on nonoriented surfaces of genera 1, 2, and 3 to within layer and topological equivalences.

Розглядаються прості гладкі функції з ізольованими критичними точками на межі гладкої компактно зв'язної неорієнтованої поверхні з однією компонентою межі, які є також ізольованими критичними точками відповідних обмежень функцій на межу. Для подальшої класифікації формулюється поняття хордової діаграми сідлового критичного рівня. Наводяться умови топологічної еквівалентності в термінах хордових діаграм та, з використанням отриманих результатів, виводиться число зазначених функцій на неорієнтованих поверхнях роду 1, 2 і 3 з точністю до пошарової та топологічної еквівалентностей.

1. Вступ. Повна топологічна класифікація є базовою задачею топологічних досліджень. Класичними роботами з дослідження топологічних властивостей функцій є праці М. Морса [1], Г. Рібба [2], А. С. Кронрода [3], О. О. Пришляка [4], В. В. Шарка [5] та ін. [6–8]. Так, Г. Рібба та А. С. Кронрод побудували граф, який дозволяє класифікувати прості функції Морса на замкненій поверхні, а О. В. Болсинов та А. Т. Фоменко [8] ввели поняття атома та f -атома, розглядаючи для цього пошарову та пошарово оснащену еквівалентності. На орієнтованих поверхнях класифікація функцій задає класифікацію гамільтонових динамічних систем.

Багато робіт присвячено топологічним властивостям простих функцій (із однією критичною точкою на кожному критичному рівні) на поверхнях з межею (див., наприклад, [9–14]).

У роботі [11] розглянуто прості функції Морса з критичними точками на межі, які є також невідродженими критичними точками обмеження функцій на межу поверхні (так звані mt -функції), а роботу [13] присвячено топологічній еквівалентності простих функцій з ізольованими критичними точками на межі поверхні M , які є також ізольованими критичними точками обмеження функцій на межу поверхні (функції класу $\Omega(M)$). Основними результатами праць [11, 13] є топологічне представлення в околі сідлової критичної точки mt -функцій і функцій класу $\Omega(M)$ відповідно, які є в свою чергу узагальненням результатів, отриманих у [1, 15]. Також важливим є питання мінімальності числа критичних точок функції на заданому многовиді (оптимальність функції). Для mt -функцій у [11] отримано число критичних точок на поверхні роду g з k компонентами межі. Доведено

критерій оптимальності функції класу $\Omega(M)$ на зв'язній поверхні M із зв'язною межею [13]. Інструментом для побудови критеріїв топологічної еквівалентності часто виступають хордові діаграми з певними властивостями (див. [13, 16, 17]), які суттєво спрощують подальші обчислення для фіксованих поверхонь.

Дана робота є продовженням [13] у випадку неорієнтованої зв'язної поверхні з однією компонентою межі. Основною метою є опис хордових діаграм сідлового критичного рівня та знаходження з їхньою допомогою числа пошарово та топологічно нееквівалентних оптимальних функцій у випадку поверхонь роду 1, 2 і 3.

2. Локальна класифікація: попередні відомості. Нехай M — гладка компактна зв'язна поверхня з межею ∂M і $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ — гладка функція, задана на M зі скінченним числом критичних точок, які належать ∂M . З компактності поверхні M маємо, що скінченність числа критичних точок рівносильне їхній ізольованості.

Введемо такі позначення:

$f|_{\partial M}$ — обмеження функції f на межу ∂M поверхні M ;

$\Omega(M)$ — множина гладких функцій, заданих на поверхні M , всі критичні точки яких є ізольованими, належать межі і також є ізольованими критичними точками відповідних обмежень функцій на ∂M , тобто

$$\Omega(M) = \{f: M \rightarrow \mathbb{R} \mid f \in C^\infty(M), CP(f) = ICP(f) = ICP(f|_{\partial M})\},$$

де $CP(f)$ ($ICP(f)$) — множина (ізольованих) критичних точок функції f .

Означення 2.1. Гладкі функції f і g , задані на гладких компактних поверхнях M і N відповідно, називаються пошарово (пошарово оснащено) еквівалентними, якщо існує гомеоморфізм $\lambda: M \rightarrow N$ такий, що переводить компоненти лінії рівня функції f у компоненти лінії рівня функції g (зберігаючи при цьому напрямки зростання функцій).

Означення 2.2. Гладкі функції f і g , задані на поверхнях M і N відповідно, називатимемо топологічно еквівалентними, якщо існують гомеоморфізми $h_1: M \rightarrow N$ і $h_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такі, що $h_2 \circ f = g \circ h_1$ та h_2 зберігає орієнтацію прямої \mathbb{R} .

Означення 2.3. Ізольовану критичну точку, яка не є точкою локального мінімуму або максимуму, називатимемо сідловою.

Теорема 2.1 [13]. Нехай $f \in \Omega(M)$. Тоді мають місце такі твердження:

1) в околі локального мінімуму функція f топологічно еквівалентна функції $x^2 + y^2$, $y \geq 0$;

2) в околі локального максимуму функція f топологічно еквівалентна функції $-x^2 - y^2$, $y \geq 0$;

3) нехай p_0 — сідлова критична точка функції f ; тоді існує окіл $U(p_0)$ точки p_0 такий, що обмеження $f|_{U(p_0)}$ є топологічно еквівалентним функції $g(x, y) = \operatorname{Re}(x + iy)^k$, $y \geq 0$, заданій у деякому околі точки $(0, 0)$, для деякого натурального k .

Окремо розглянемо випадки різних значень k у формулі $f(x, y) = \operatorname{Re}(x + iy)^k$, $y \geq 0$, та відповідної структури околу $U(p_0)$ точки p_0 :

а) $k = 1$: $f(x, y) = x$, $y \geq 0$, $U(p_0)$ має два сектори зі спільною межею (рис. 1(1));

б) $k = 2$: $f(x, y) = \operatorname{Re}(x + iy)^2 = x^2 - y^2$, $y \geq 0$, і рівень функції $f(x, y) = 0$ складається з двох променів $y = x$, $y \geq 0$, та $y = -x$, $y \geq 0$ (рис. 1(2));

в) $k = 3$: $f(x, y) = \operatorname{Re}(x + iy)^3 = x^3 - 3xy^2$, $y \geq 0$; лінії рівня функції f зображені на рис. 1(3), а критичний рівень $f(x, y) = 0$ містить три промені $x = 0$, $y \geq 0$, $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$, $y \geq 0$,

і $y = -\frac{x}{\sqrt{3}}$, $y \geq 0$;

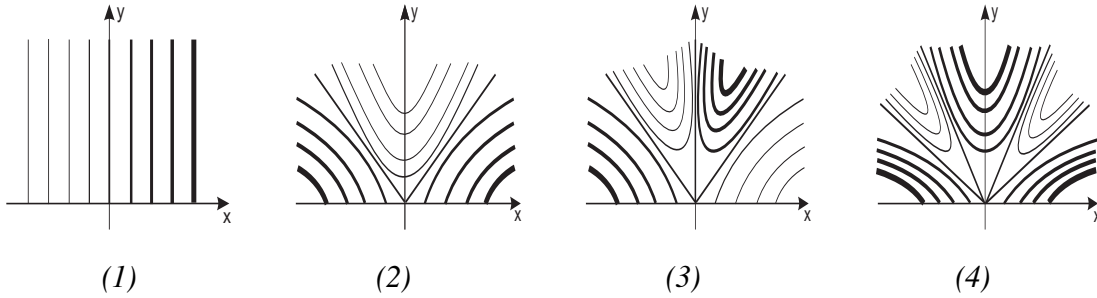


Рис. 1

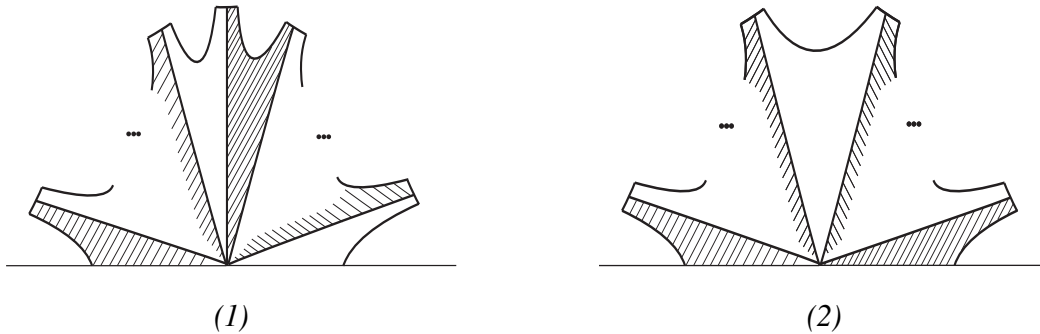


Рис. 2

г) $k = 4$: $f(x, y) = \operatorname{Re}(x + iy)^4 = x^4 - 4x^2y^2 + y^4$, $y \geq 0$, і лінія рівня $f(x, y) = 0$ складається з чотирьох променів $y = x\sqrt{2 + \sqrt{3}}$, $y \geq 0$, $y = x\sqrt{2 - \sqrt{3}}$, $y \geq 0$, $y = -x\sqrt{2 + \sqrt{3}}$, $y \geq 0$, і $y = -x\sqrt{2 - \sqrt{3}}$, $y \geq 0$ (рис. 1(4));

д) $k = 2n+1$: $f(x, y) = \operatorname{Re}(x + iy)^{2n+1} = \sum_{j=0}^n (-1)^j C_{2n+1}^{2j} x^{2n+1-2j} y^{2j}$, $y \geq 0$ (рис. 2(1));

е) $k = 2n$: $f(x, y) = \operatorname{Re}(x + iy)^{2n} = \sum_{j=0}^n (-1)^j C_{2n}^{2j} x^{2n-2j} y^{2j}$, $y \geq 0$ (рис. 2(2)).

Означення 2.4. Розглянемо околі критичного рівня c функції f , який позначимо через $V = \{x | c - \varepsilon \leq f(x) \leq c + \varepsilon\}$. Тоді атом (f -атом) визначається як клас пошарової (пошарово оснащеної) еквівалентності пари $(U, f|_U)$, де U — об'єднання компонент лінійної зв'язності множини V , які містять критичні точки.

Кожному атому відповідають два f -атоми, які отримуються один з одного заміною знака функції.

Означення 2.5. Функція, яка має не більше однієї критичної точки на кожному рівні, називається простою.

Означення 2.6. Атом, f -атом називається простим, якщо він містить одну критичну точку.

Оскільки всі функції, які будуть розглядатися в даному та наступних пунктах статті, є простими, то в подальшому кожен розглянутий атом та f -атом також будуть простими.

Надалі будемо вважати, що $f(p_0) = 0$, де p_0 — сідлова критична точка функції $f \in \Omega(M)$. Тоді з теореми 2.1 отримаємо представлення (з точністю до топологічної еквівалентності) функції $f \in \Omega(M)$ в околі точки p_0 у вигляді $f(x, y) = \operatorname{Re}(x + iy)^k$, $y \geq 0$, для деякого натурального $k > 1$.

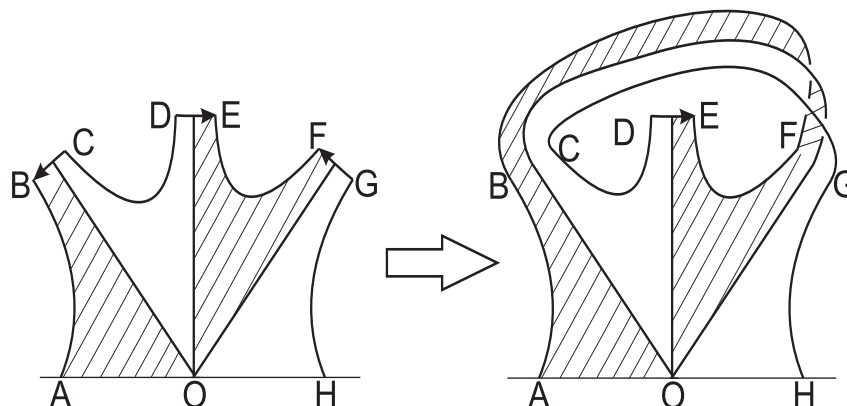


Рис. 3

Слід зауважити, що в означенні f -атома пошарово означена еквівалентність може бути замінена на топологічну, оскільки розглядаються прості функції.

Розглянемо окіл критичної точки p_0 , обмежений $f^{-1}(-\varepsilon)$, $f^{-1}(\varepsilon)$ для деякого достатньо малого $\varepsilon > 0$, траєкторіями поля градієнта та межею ∂M . Частини поверхні, для яких $f > 0$ і $f < 0$, називатимемо додатними і від’ємними секторами функції f . Ці сектори зображатимемо заштрихованими і незаштрихованими відповідно. Отримана поверхня має структуру $(2k+2)$ -кутника. Якщо розглянутий окіл розширити до околу критичного рівня, то отримаємо окіл, гомеоморфний багатокутнику зі склеєними за лінійним гомеоморфізмами сторонами (наприклад, на рис. 3 сторона BC приклеюється до сторони FG).

Так, кожен атом має структуру багатокутника, який зображений на одному з рис. 2(1), 2(2) зі склеєними сторонами.

Поставимо у відповідність описаному вище багатокутнику коло з відміченими точками.

Колу відповідатиме межа багатокутника, а відміченим точкам — точки на межі, які належать перетину заштрихованих і незаштрихованих секторів, тобто відмічені точки належать критичному рівню функції.

Відмічені точки з’єднаємо хордою тоді і тільки тоді, коли відповідні сторони багатокутника склеюються при збільшенні околу. Таким чином, отримаємо коло з відміченими точками і хордами з вершинами в цих точках.

Зауважимо, що в орієнтованому випадку хорди відповідали приклеїці до багатокутника тільки неперекручених прямокутників, що рівносильно різній парності кінців хорд. У випадку неорієнтованої поверхні можливим є варіант перекрученого прямокутника, що рівносильно однакою парності кінців хорд. Тому немає строгої необхідності виділення для хорд, які відповідають перекрученим прямокутникам, окремого позначення, але, з іншого боку, для кращого сприйняття рисунків такі хорди будемо зображати так, як це зроблено на рис. 4. Хорди, які відповідають неперекрученим (перекрученим) прямокутникам, називатимемо хордами 1 -го (2 -го) типу.

Надалі зафіксуємо орієнтацію на межі для того, щоб пронумерувати відмічені точки на колі. При зміні орієнтації отримаємо атом, рівний початковому. Далі, пронумеруємо відмічені точки таким чином: точку на колі, яка відповідає критичній точці p_0 , позначимо через Q_0 , а інші точки — відповідно до орієнтації межі, починаючи від Q_1 і до Q_k , при цьому точка Q_0 розглядається як точка відліку. Точки Q_0, Q_1, \dots, Q_k розбивають коло на

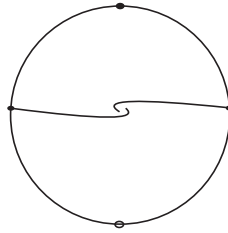


Рис. 4

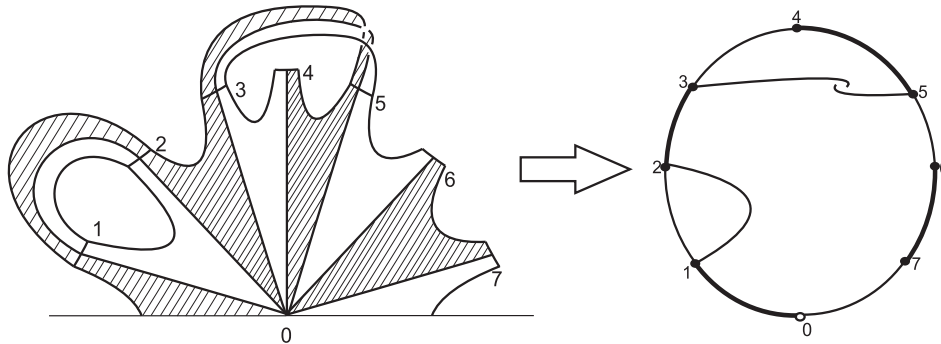


Рис. 5

$k + 1$ товстих і тонких дуг, які відповідають секторам додатних і від'ємних значень функції (див. рис. 5).

Так, кожен f -атом може бути визначений за допомогою кола з k відміченими точками та точкою Q_0 , l хордами, для деякого $l \in \left\{ 0, 1, 2, \dots, \left[\frac{k}{2} \right] \right\}$ (серед яких немає петель), якщо додатково розглянути фіксоване розбиття дуг таке, що кожні дві дуги зі спільною вершиною (можливо, окрім тих, які містять вершину Q_0) є різної товщини (таких розбиттів є рівно два). Тому коло з описаними вище елементами (побудоване з f -атома функції) називатимемо *хордовою діаграмою сідлового критичного рівня функції*.

Зауважимо, що таким чином визначена хордова діаграма сідлового критичного рівня функції задає f -атом. Якщо ж не фіксувати розбиття дуг, то вона буде задавати атом.

Означення 2.7. *Оснащеною хордовою діаграмою називатимемо коло, яке містить такі елементи:*

- 1) відмічені точки, які є пронумерованими і серед яких виділена одна точка;
- 2) хорди з кінцями у відмічених точках, окрім виділеної точки;
- 3) розбиття дуг кола на товсті і тонкі таке, що кожні дві дуги (можливо, окрім тих, які містять виділену точку) є різної товщини.

Пронумеруємо відмічені точки оснащеної хордової діаграми від 0 до k (для деякого натурального k) за годинниковою стрілкою, починаючи з виділеної точки. Тоді хорду називатимемо хордою 1-го (2-го) типу, якщо вона з'єднує відмічені точки з номерами різної (однакової) парності.

Кожна хордова діаграма сідлового критичного рівня функції буде оснащеною хордовою діаграмою. Тому надалі всі поняття, визначені для оснащених хордових діаграм, будуть задані і для хордових діаграм сідлового критичного рівня функції.

Означення 2.8. Дві оснащені хордові діаграми називаються еквівалентними, якщо вони можуть бути отримані одна з другої за допомогою повороту або симетрії і зберігають при цьому елементи 1)–3) означення 2.7.

Означення 2.9. Вільною відміченою точкою на оснащеній хордовій діаграмі називається відмічена точка, яка не є з'єднаною хордою з іншими відміченими точками.

Означення 2.10. З оснащеної хордової діаграми, яка містить $(k+1)$ -ту відмічену точку, побудуємо підстановку $\tau^{(k)}$ таку, що $\tau^{(k)}$ містить цикл (ij) (для деяких $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$) тоді і тільки тоді, коли відмічені точки Q_i і Q_j з'єднані хордою. Задана у такий спосіб підстанова містить тільки цикли довжини 2 і називається підстановкою склейки на множині $\{1, 2, \dots, k\}$.

Атом разом із заданою підстановкою склейки $\tau^{(k)}$ будемо позначати через $A_{\tau^{(k)}}$.

Зауважимо, що для хордової діаграми сідлового критичного рівня функції рівносильними є такі поняття: 1) неперекручений прямокутник; 2) хорда 1-го типу; 3) підстанова (i, j) хордової діаграми, в якій $i, j > 0$ і мають різну парність. Також поняття 2) і 3) є рівносильними для оснащеної хордової діаграми.

Теорема 2.2 [13]. Кожен атом сідлового критичного рівня співпадає з атомом $A_{\tau^{(k)}}$ для деякої підстановки склейки $\tau^{(k)}$ на множині $\{1, 2, \dots, k\}$ і ця підстанова задає склейку сторін атома.

3. Глобальна класифікація: оптимальні функції на неорієнтованій поверхні з однією компонентою межі. Далі розглянемо гладку поверхню M з однією компонентою межі ∂M і просту гладку функцію $f \in \Omega(M)$.

Означення 3.1. Функція $f \in \Omega(M)$ називається оптимальною на поверхні, якщо вона має найменше можливе число критичних точок на M серед усіх функцій з $\Omega(M)$.

Теорема 3.1 [13]. Нехай $f \in \Omega(M)$ і M — зв'язна компактна поверхня зі зв'язною межею, яка негомеоморфна двовимірному диску. Тоді функція f є оптимальною тоді і тільки тоді, коли вона має рівно три критичні точки, дві з яких є точками мінімуму і максимуму, а третя — сідловою.

Зауважимо, що існування гладкої функції з трьома критичними точками на гладкій (не)орієнтованій поверхні M роду g впливає з рис. 6(1) (рис. 6(2), на якому зображена хордова діаграма $(8g+4)$ -кутника ($(4g+4)$ -кутника), якому відповідає f -атом сідлової критичної точки гладкої функції.

У випадку двовимірного диска оптимальна функція має дві критичні точки і може бути реалізована за допомогою функції висоти.

Надалі припустимо, що критичні значення оптимальної функції дорівнюють $-1, 0, 1$ (це можна зробити, оскільки існує гомеоморфізм прямої, який переводить три критичні значення функції у точки $-1, 0, 1$). Також, для спрощення викладок, на рисунках розбиття дуг не будемо зображати (тобто всі дуги будуть однакової товщини), а за умовчанням вважатимемо першу дугу зліва від точки Q_0 товстою (що автоматично задає розбиття всіх дуг оснащеної хордової діаграми).

Оснащену хордову діаграму можна розглядати як граф, вершинами якого є відмічені точки, а ребрами — дуги і хорди. Тоді для хордових діаграм коректно заданим є поняття шляху та суміжності дуг і хорд (як ребер графу).

Означення 3.2. Шлях між відміченими точками на оснащеній хордовій діаграмі називається правильним, якщо він задовольняє такі умови:

- 1) під час проходження цього шляху хорди і дуги чергуються;

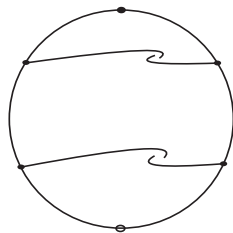


Рис. 7

значень, рівне 2. Тому, згідно з описаними вище бієкціями, існує рівно 2 повні шляхи між вільними точками.

3) Повні шляхи, описані у доведенні п. 2) теореми 3.2, мають 4 кінці. Тому, оскільки з кожної вільної точки виходить рівно 2 повні шляхи, то хордова діаграма містить 2 вільні точки, а отже, $2n + 2$ відмічених точок, де n — число хорд.

Теорему 3.1 доведено.

Зауважимо, що рівність у п. 2) теореми 3.2 є наслідком більш загального співвідношення, а саме:

$$v = k + 1 - 2n,$$

де v — число вільних точок, $k + 1$ — число відмічених точок, а n — число хорд.

Також зауважимо, що для хордових діаграм сідлового критичного рівня функції належність хорди до класу хорд 1-го (2-го) типу рівносильне тому, що вона своїми кінцями розбиває коло на дуги, кожна з яких містить парне (непарне) число відмічених точок, оскільки згідно з умовою 3 теореми 3.2 загальне число відмічених точок є парним.

Наслідок 3.1. Підстановка склейки хордової діаграми сідлового критичного рівня оптимальної функції на поверхні з однією компонентою межі не містить одночасно двох циклів $(i, j + 1)$ та $(i + 1, j)$ для всіх $i, j \in \{0, k\}$ з однаковою парністю.

Доведення. Припустимо від супротивного, що для деяких i, j однакової парності підстановка склейки містить комбінацію циклів $(i, j + 1)(i + 1, j)$. Тоді відповідна хордова діаграма містить дві хорди 1-го типу, а саме: $Q_i Q_{j+1}$ та $Q_{i+1} Q_j$. У такому випадку не існує двох повних шляхів, оскільки кожен шлях з точки Q_0 у довільну точку Q_p , $p \in \{0, k\} \setminus \{i, i + 1, j, j + 1\}$ не проходить через дуги $Q_i Q_{i+1}$, $Q_j Q_{j+1}$ і хорди $l_{i,j+1}$, $l_{i+1,j}$. Тому функція не є оптимальною. Отримали суперечність.

На відміну від випадку орієнтованої поверхні, хордова діаграма може містити комбінацію циклів $(i, j + 1)(i + 1, j)$ для i, j різної парності і відповідні хорди $l_{i,j+1}$ та $l_{i+1,j}$ будуть 2-го типу (див. рис. 7).

У роботі [13] доведено критерій топологічної еквівалентності оптимальних функцій та теорему про існування оптимальної функції для заданої хордової діаграми з додатковими умовами у випадку орієнтованої поверхні з однією компонентою межі. Аналогічні результати можна отримати у випадку неорієнтованої поверхні з однією компонентою межі. Так, справедливі такі твердження.

Твердження 3.1 (критерій топологічної еквівалентності). *Оптимальні функції на гладких (не)орієнтованих поверхнях з однією компонентою межі топологічно еквівалентні тоді і тільки тоді, коли відповідні хордові діаграми сідлових критичних точок еквівалентні.*

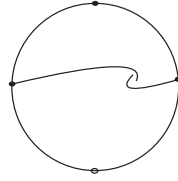


Рис. 8

Твердження 3.2 (реалізація). *Якщо оснащена хордова діаграма задовольняє умови 1)–3) теореми 3.2, то існує оптимальна функція на гладкій неорієнтованій поверхні з однією компонентою межі, хордова діаграма сідлового критичного рівня якої співпадає із заданою.*

Зауваження 3.1. Із теорем 3.1, 3.2 та тверджень 3.1, 3.2 випливає, що знаходження числа топологічно еквівалентних оптимальних функцій класу $\Omega(M)$ зводиться до класифікації оснащених хордових діаграм, які задовольняють умови 1)–3) теореми 3.2.

Теорема 3.3. *На листі Мебіуса існує єдиний клас пошарової та топологічної еквівалентності оптимальних функцій.*

Доведення. Хордова діаграма оптимальної функції на неорієнтованій поверхні роду 1 містить чотири точки, дві з яких є вільними (див. теорему 3.2). Тоді єдиність пошарово нееквівалентних функцій випливає з існування рівно одного способу з'єднання вершин, які не є вільними, хордою, а саме: як це показано на рис. 8. Зауважимо, що дана хордова діаграма відповідає підстановці склейки (1, 3). Оскільки ця хордова діаграма є симетричною, то число нееквівалентних оптимальних функцій на листі Мебіуса не збільшується при топологічній класифікації. Тому з урахуванням зауваження 3.1 на неорієнтованій поверхні роду 1 із межею існує єдина з точністю до топологічної (пошарової) еквівалентності функція.

Теорема 3.4. *На пляшці Клейна з діркою існує 2 (3) пошарово (топологічно) нееквівалентні оптимальні функції.*

Доведення. Поверхня оптимальної функції гомеоморфна атому сідлової точки, який в свою чергу гомеоморфний диску з приклеєними стрічками відповідно до розташування та типу хорд. Для того щоб з диска отримати пляшку Клейна з діркою, до нього потрібно приклеїти дві стрічки, принаймні одна з яких повинна бути перекрученою. Тому надалі задача зводиться до знаходження числа оснащених хордових діаграм, які містять 6 відмічених точок і 2 хорди, хоча б одна з яких 2-го типу, та задовольняють умови 1)–3) теореми 3.2.

Пронумеруємо вершини оснащеної хордової діаграми від Q_0 до Q_6 . Як і раніше, вершину Q_0 вважатимемо вільною відміченою точкою (яка відповідає сідловій критичній точці функції). Зауважимо, що оснащена хордова діаграма повинна задовольняти умови 1)–3) теореми 3.2. Розглянемо можливі варіанти з'єднання вершини Q_1 з іншими вершинами: (c1) Q_1 є вільною точкою; (cі) Q_1 з'єднано хордою з Q_i , $i \in \{2, 5\}$.

У випадку (c1) можливі наступні варіанти побудови хорд:

- (c1): (c1-1) хорди з'єднують такі пари точок: Q_2 і Q_3 ; Q_4 і Q_5 ;
- (c1-2) хорди з'єднують такі пари точок: Q_2 і Q_4 ; Q_3 і Q_5 ;
- (c1-3) хорди з'єднують такі пари точок: Q_2 і Q_5 ; Q_3 і Q_4 .

Але в усіх варіантах побудови (c1) і (c2) хордові діаграми не задовольняють умову 2) теореми 3.2.

Для випадків (c3), (c4) і (c5) розглянемо такі можливі варіанти:

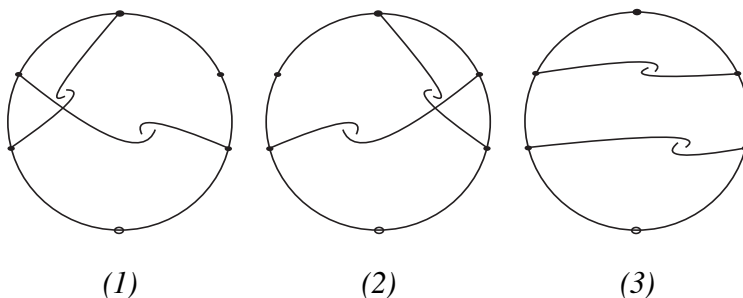


Рис. 9

- (с3): (с3-1) вершина Q_1 з'єднана хордою з Q_3 , Q_2 — вільна відмічена точка, тоді вершини Q_4 і Q_5 будуть з'єднані хордою;
 (с3-2) Q_1 з'єднана хордою з Q_3 , а Q_2 — з Q_4 ;
 (с3-3) Q_1 з'єднана хордою з Q_3 , а Q_2 — з Q_5 ;
- (с4): (с4-1) Q_1 з'єднана хордою з Q_4 , а Q_2 — вільна відмічена точка, тоді Q_3 з'єднана хордою з Q_5 ;
 (с4-2) Q_1 з'єднана хордою з Q_4 , а Q_2 — з Q_3 ;
 (с4-3) Q_1 з'єднана хордою з Q_4 , а Q_2 — з Q_5 ;
- (с5): (с5-1) Q_1 з'єднана хордою з Q_5 , а Q_2 — вільна відмічена точка, тоді Q_3 з'єднана хордою з Q_4 ;
 (с5-2) Q_1 з'єднана хордою з Q_5 , а Q_2 — з Q_3 ;
 (с5-3) Q_1 з'єднана хордою з Q_5 , а Q_2 — з Q_4 .

У випадках (с3-1), (с3-2), (с4-2), (с5-1), і (с5-2) отримана оснащена хордова діаграма не містить повного шляху, тому не задовольняє умову 2) теореми 3.2, а хордова діаграма для варіанта (с4-3) не містить хорди 2-го типу (відповідає орієнтованій поверхні). Оснащені хордові діаграми, описані в (с3-3) (див. рис. 9(1)), (с4-1) (див. рис. 9(2)), (с5-3) (див. рис. 9(3)) задовольняють умови теореми 3.2 і їхні підстановки склейки відповідно дорівнюють (13)(25), (14)(35) і (15)(24).

Так, зображені на рис. 9 оснащені хордові діаграми задають три класи топологічної еквівалентності функцій на неорієнтованій поверхні роду 2.

Оскільки у випадках (с3-3) та (с4-1) оснащені хордові діаграми є взаємно симетричними, то при розгляді пошарової еквівалентності число нееквівалентних функцій зменшується на 1.

Аналогічно можна отримати число пошарово (топологічно) нееквівалентних оптимальних функцій на неорієнтованій поверхні роду 3 з однією компонентою межі.

Теорема 3.5. *На неорієнтованій поверхні роду 3 з однією компонентою межі існує 12 пошарово і 20 топологічно нееквівалентних оптимальних функцій.*

Хордові діаграми пошарово нееквівалентних функцій зображено на рис. 10.

4. Висновки. При розгляді простих гладких функцій на гладких неорієнтованих поверхнях з однією компонентою межі отримано такі результати:

- описано властивості хордової діаграми сідлового критичного рівня;
- наведено критерій топологічної еквівалентності та теорему реалізації оптимальних функцій;

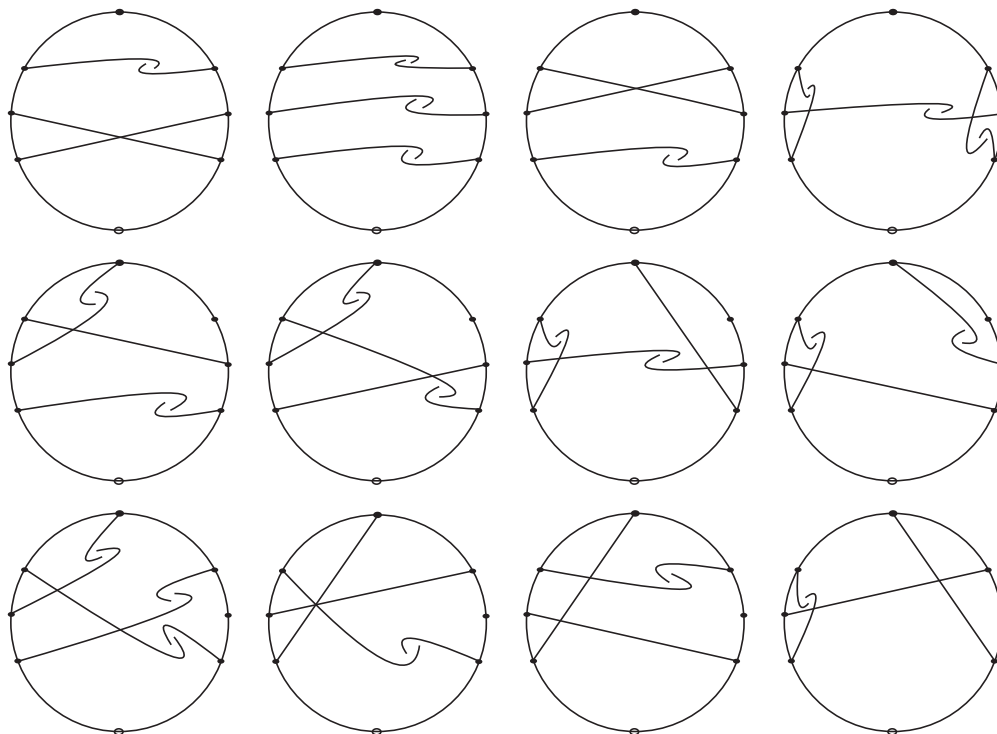


Рис. 10

– знайдено число пошарово та топологічно нееквівалентних функцій на листі Мебіуса, пляшці Клейна з діркою та на поверхні роду 3.

Література

1. M. Morse, *The calculus of variations in the large*, Colloquium Publications, Amer. Math. Soc., Providence, RI, **18** (1934).
2. G. Reeb, *Sur les points singuliers d'une forme de Pfaff complètement intégrable ou d'une fonction numérique*, C.R.A.S., **222**, 847 – 849 (1946).
3. А. С. Кронрод, *О функциях двух переменных*, Успехи мат. наук, **5**, вип. 1(35), 24 – 134 (1950).
4. А. О. Prishlyak, *Topological properties of functions on two and three dimensional manifolds*, Palmarium Acad. Publ., Saarbrücken (2012).
5. V. V. Sharko, *Functions on manifolds. Algebraic and topological aspects*, Translations of Mathematical Monographs, Amer. Math. Soc., Providence, RI, **131** (1993).
6. О. А. Кадубовський, *Перерахування топологічно нееквівалентних гладких мінімальних функцій на замкнених поверхнях*, Зб. праць Ін-ту математики НАН України, **12**, № 6, 105 – 145 (2015).
7. І. А. Iurchuk, *Properties of a pseudo-harmonic function on closed domain*, Proc. Int. Geom. Cent., **4**, № 4, 50 – 59 (2014).
8. A. V. Bolsinov, A. T. Fomenko, *Integrable Hamiltonian systems: geometry, topology and classification*, CRC Press (2004).
9. Н. В. Лукова-Чуйко, О. О. Пришляк, К. О. Пришляк, *M-функції на неорієнтованих поверхнях*, Журн. обчисл. та прикл. математики, **2**, № 108, 176 – 185 (2012).
10. S. I. Maksymenko, Y. O. Polulyakh, *Foliations with all non-closed leaves on non-compact surfaces*, Methods Funct. Anal. Topology, **22**, № 3, 266 – 282 (2016).

11. Б. І. Гладіш, О. О. Пришляк, *Функції з невірдженими критичними точками на межі поверхні*, Укр. мат. журн., **68**, № 1, 28–37 (2016).
12. O. M. Vyatchaninova, *Atoms and molecules of functions with isolated critical points on the boundary of 3-dimensional handlebody*, Proc. Int. Geom. Cent., **5**, № 3–4, 15–23 (2012).
13. B. I. Hladysh, A. O. Prishlyak, *Topology of functions with isolated critical points on the boundary of a 2-dimensional manifold*, Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications (SIGMA), **13**, № 050 (2017).
14. M. Borodzik, A. Nemethi, A. Ranicki, *Morse theory for manifolds with boundary*, Algebr. Geom. Topol., **16**, 971–1023 (2016).
15. A. O. Prishlyak, *Topological equivalence of smooth functions with isolated critical points on a closed surface*, Topology Appl., **119**, № 3, 257–267 (2002).
16. A. Stoimenov, *On the number of chord diagrams*, Discrete Math., **218**, № 1–3, 209–233 (2000).
17. A. Khruzin, *Enumeration of chord diagrams* (2000); <https://arxiv.org/abs/math/0008209v1>

Одержано 30.08.19,
після доопрацювання — 15.01.20