УДК 517.98

ЕВОЛЮЦІЙНІ ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ В ПРОСТОРАХ УЗАГАЛЬНЕНИХ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ

В. В. Городецький, О. В. Мартинюк

Чернів. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича
вул. Коцюбинського, 2, Чернівці, 58012, Україна
e-mail: v.gorodetskiy@chnu.edu.ua,
alfaolga1@gmail.com

The correct solvability of the nonlocal multipoint in time problem for the evolutionary equation with the pseudodifferential operator in the space of generalized periodic functions and the initial function, which is an element of the space of periodic ultradistributions, is proved.

Доведено коректну розв'язність нелокальної багатоточкової за часом задачі для еволюційного рівняння з псевдодиференціальним оператором у просторі узагальнених періодичних функцій та початковою функцією, яка є елементом простору періодичних ультрарозподілів.

При дослідженні багатьох задач аналізу та математичної фізики виникають різні класи узагальнених функцій (розподілів, ультрарозподілів, гіперфункцій тощо). Якщо розглядати періодичні узагальнені функції, то, як доведено в [1 – 3], всі ці класи вкладаються у простір формальних тригонометричних рядів, які ототожнюються з лінійними неперервними функціоналами, заданими на просторі тригонометричних поліномів. У просторах узагальнених періодичних функцій визначені та є неперервними операції диференціювання, множення на нескінченно диференційовні періодичні функції та згортки. Оператори дробового диференціювання та задача Коші для еволюційних рівнянь із такими операторами в просторах узагальнених періодичних функцій досліджувалися в [4].

У цій роботі розглядається досить широкий клас псевдодиференціальних операторів у просторах узагальнених періодичних функцій, які трактуються як оператори згортки. Для еволюційних рівнянь із такими операторами досліджується задача, яку можна розуміти як певне узагальнення задачі Коші у випадку, коли початкова умова $u(t,\cdot)|_{t=0} = f$ замінюється умовою

$$\sum_{k=0}^{m} \alpha_k B_k u(t,\cdot)|_{t=t_k} = f,$$

де $t_0 = 0$, $\{t_1, \ldots, t_m\} \subset (0, T]$, $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m \leq T$, $\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \subset \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, — фіксовані числа, $B_0, B_1, \ldots, B_m$ — псевдодиференціальні оператори в просторі узагальнених періодичних функцій, f — деяка періодична функція (якщо $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = 0$, $B_0 = I$ — одиничний оператор, то маємо, очевидно, задачу Коші). Вказана умова трактується в класичному розумінні або в слабкому сенсі, якщо f — узагальнена функція, тобто як граничне співвідношення $\sum_{k=0}^{m} \alpha_k \lim_{t \to t_k} \langle B_k u(t,\cdot), \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle$ для довільної функції φ з основного простору (тут $\langle f, \cdot \rangle$ позначає дію функціонала f на основну функцію). Така задача відноситься до нелокальних багатоточкових за часом задач для рівнянь із частинними похідними. Нелокальні за часом задачі, у свою чергу, належать до нелокальних крайових задач, які виникають при моделюванні багатьох процесів і задач практики (див., наприклад, [5–9]).

У цій статті доведено коректну розв'язність такої нелокальної багатоточкової за часом задачі, встановлено властивості фундаментального розв'язку, знайдено зображення розв'язку у вигляді згортки фундаментального розв'язку з початковою узагальненою функцією.

1. Формальні ряди Фур'є узагальнених періодичних функцій. Позначимо через T множину всіх тригонометричних поліномів

$$P(x) = \sum_{k=-s}^{s} c_{k,p} e^{ikx}, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad s \in \mathbb{Z}_+, \quad i = \sqrt{-1},$$

над полем комплексних чисел, тобто $c_{k,p} \in \mathbb{C}$. Очевидно, що стосовно звичайних операцій додавання поліномів та множення їх на числа T є лінійним простором.

Нехай $T_m,\ m \in \mathbb{Z}_+$, — сукупність усіх поліномів з T, степінь яких не перевищує m. Тоді $T = \bigcup\limits_m T_m$. Збіжність у просторі T визначається таким чином: послідовність $\{P_n, n \geq 1\} \subset T$ збігається в T до полінома P, якщо, починаючи з деякого номера, всі P_n належать до одного простору $T_m,\ P \in T_m$ (з деяким m), і $c_{k,p_n} \to c_{k,p}$ при $n \to \infty$ для кожного $k\colon 0 \leq |k| \leq m$. У такий спосіб визначена збіжність — це збіжність в T як індуктивної границі просторів $T_m\colon T = \lim\limits_{m \to \infty} \operatorname{ind} T_m$.

У T природно вводяться операції диференціювання, множення поліномів та згортки, які є неперервними в T.

Символом T' позначимо простір усіх лінійних неперервних функціоналів на T зі слабкою збіжністю. Елементи з T' назвемо 2π-періодичними узагальненими функціями.

Операція диференціювання у просторі T' визначається за допомогою формули

$$\left\langle f^{(k)}, P \right\rangle = (-1)^k \left\langle f, P^{(k)} \right\rangle, \qquad P \in T, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Вона є неперервною в T', оскільки неперервною є така ж операція в просторі T. Отже, кожний елемент з T' є нескінченно диференційовним в T'.

Операція згортки двох узагальнених періодичних функцій $\{f, g\} \subset T'$ визначається так:

$$\langle f * g, P \rangle = \left\langle f_x, \langle g_y, P(x+y) \rangle \right\rangle \quad \forall P \in T.$$

Згортка $f * g$ є неперервною в T' у тому розумінні, що коли $f_n \to f$ при $n \to \infty$ в T', то $f_n * g \to f * g$ при $n \to \infty$ в T' для $\forall g \in T'$. Цей факт випливає з самого означення згортки. Крім того, правильною є формула [2]:

$$(f * g)^{(k)} = f^{(k)} * g = f * g^{(k)}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Простір T неперервно вкладається в T' у тому розумінні, що коли $Q \subset T$, тоді елемент $f_Q \in T'$, який відповідає Q, визначається формулою

$$\langle f_Q, P \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q(x) \overline{P(x)} dx \quad \forall P \in T.$$

Відображення

$$F\colon T' \ni f \to \left\{c_k(f) = \langle f, e^{-ikx}\rangle,\ k\in\mathbb{Z}\right\} \in S,$$

де S — множина всіх послідовностей комплексних чисел, є бієкцією [2]. При цьому збіжність в T' рівносильна покоординатній збіжності відповідних послідовностей в S. Таким чином, F взаємно однозначно і взаємно неперервно відображає T' на S.

Вказана бієкція переводить T у сукупність усіх фінітних із обох боків послідовностей. Зазначимо також, що операція диференціювання під дією відображення F переходить в операцію множення на ik:

$$F\left[f'\right] = \left\{c_k(f') = \left\langle f', e^{-ikx}\right\rangle = \left\langle f, ike^{-ikx}\right\rangle = ik\left\langle f, e^{-ikx}\right\rangle = ikc_k(f)\right\} \in S \quad \forall f\in T',$$

а згортка — в покоординатне множення:

$$c_k\left(f*g\right) = \left\langle f*g, e^{-ikx}\right\rangle = \left\langle f, \left\langle g_t, e^{-ik(x+t)}\right\rangle\right\rangle =$$

$$= \left\langle f, \left\langle g_t, e^{-ikt}\right\rangle e^{-ikx}\right\rangle = c_k(f)c_k(g) \quad \forall\{f,g\}\subset T'.$$

Звідси випливають властивості комутативності та асоціативності згортки в T'. Отже, T' — кільце (відносно згортки) з одиницею, роль якої виконує δ-функція Дірака.

Рядом Фур'є узагальненої 2π-періодичної функції $f \in T'$ називається ряд $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f)e^{ikx}$, де $c_k(f) = \left\langle f, e^{-ikx}\right\rangle$, $k\in\mathbb{Z}$, — коефіцієнти Фур'є функції f. Для довільної узагальненої 2π-періодичної функції f її ряд Фур'є збігається до f у просторі T'. Навпаки, послідовність частинних сум довільного тригонометричного ряду $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}$ збігається в T' до деякого елемента $f\in T'$, і цей ряд є рядом Фур'є для f [2] (звідси випливає також, що T лежить щільно в T'). Отже, будь-яку узагальнену 2π-періодичну функцію $f\in T'$ можна ототожнити з її рядом Фур'є, тобто T' можна розуміти як простір формальних тригонометричних рядів вигляду $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}$ (без жодних обмежень на числову послідовність $\{c_k, k\in\mathbb{Z}\}$).

Розглянемо монотонно зростаючу послідовність $\{m_k, k\in\mathbb{Z}_+\}$, $m_0 = 1$, додатних чисел, яка має властивості [3]:

1) $\forall\alpha>0\ \exists c_\alpha>0\ \forall k\in\mathbb{Z}_+\colon m_k \ge c_\alpha\cdot\alpha^k$ (тобто $\{m_k, k\in\mathbb{Z}_+\}$ зростає швидше за експоненту);

2) $\exists M>0\ \exists h>0\ \forall k\in\mathbb{Z}_+\colon m_{k+1}\le Mh^k m_k$ (стабільність відносно диференціювання);

3) $\exists A>0\ \exists L>0\ \forall\{k,l\}\subset\mathbb{Z}_+\colon m_k\cdot m_l \le AL^{k+l}m_{k+l}$ (стабільність відносно множення);

4) $\exists B>0\ \exists s>0\ \forall k\in\mathbb{Z}_+\colon m_k\le Bs^k\min_{0\le l\le k} m_{k-l}m_l$ (стабільність відносно згортки).

Прикладами таких послідовностей є послідовності Жевре вигляду $m_k = (k!)^\beta$, $m_k = k^{k\beta}$, $\beta>0$. Введемо тепер деякі класи нескінченно диференційовних періодичних функцій. Символом $H\langle m_k\rangle$ позначимо сукупність усіх 2π-періодичних нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій φ, які мають таку властивість: існують сталі c, $B>0$ такі, що

$$|\varphi^{(k)}(x)| \le cB^k m_k, \qquad k\in\mathbb{Z}_+, \quad x\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Множина функцій $\varphi \in H\langle m_k\rangle$, для яких оцінка (1) виконується з фіксованою сталою $B > 0$, утворює банахів простір $H_B\langle m_k\rangle$ відносно норми

$$\|\varphi\|_B = \sup_{\substack{x\in[0,2\pi]\\ k\in\mathbb{Z}_+}} \frac{|\varphi^{(k)}(x)|}{B^k m_k}.$$

При цьому $H_{B_1}\langle m_k\rangle \subset H_{B_2}\langle m_k\rangle$, якщо $B_1 < B_2$ і $H\langle m_k\rangle = \bigcup\limits_{B>0} H_B\langle m_k\rangle$. Отже, в $H\langle m_k\rangle$ природно ввести топологію індуктивної границі банахових просторів $H_B\langle m_k\rangle$: $H\langle m_k\rangle = \lim_{B\to\infty} \operatorname{ind} H_B\langle m_k\rangle$. При цьому $H\langle m_k\rangle$ перетворюється в повний локально опуклий простір. Унаслідок властивостей 2) – 4) послідовностей $\{m_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ цей простір інваріантний відносно операцій диференціювання, множення та згортки, які є неперервними в $H\langle m_k\rangle$. Відносно операцій множення та згортки цей простір утворює також топологічні алгебри [3]. Якщо послідовність $\{m_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ збігається з однією із послідовностей Жевре, то $H\langle (k!)^\beta\rangle = H\langle k^{k\beta}\rangle \equiv G_{\{\beta\}}$, $\beta > 0$, — простір Жевре порядку β. Простір $H\langle k!\rangle = H\langle k^k\rangle \equiv G_{\{1\}}$ складають аналітичні 2π-періодичні на $\mathbb{R}$ функції.

Символом $H'\langle m_k\rangle$ позначатимемо простір усіх лінійних неперервних функціоналів на $H\langle m_k\rangle$ зі слабкою збіжністю. Як доведено в [3], $H'\langle m_k\rangle = \lim_{B\to\infty} \operatorname{pr} H'_B\langle m_k\rangle$. Елементи простору $H'\langle m_k\rangle$ називаються ультрарозподілами класу $\{m_k\}$. Елементи з $H'\langle k!\rangle$ називаються гіперфункціями або аналітичними функціоналами. У праці [3] дається характеристика просторів $H\langle m_k\rangle$ та $H'\langle m_k\rangle$ з точки зору поведінки коефіцієнтів Фур'є їхніх елементів.

Покладемо

$$\rho(\lambda) = \sup_{k\in\mathbb{Z}_+} \frac{\lambda^k}{m_k}, \quad \lambda \in [1, +\infty).$$

Із властивостей послідовності $\{m_k,\ k \in \mathbb{Z}_+\}$ випливає, що функція ρ неперервна, монотонно зростає на $[1, +\infty)$ (швидше, ніж $\lambda^n\ \forall n \in \mathbb{N}$), $\rho(\lambda) \ge 1\ \forall\lambda \in [1, +\infty)$. Нехай

$$H_{\{\alpha\}} := \left\{ f \in T' \,\middle|\, \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2 \rho^2\left(\frac{|k|}{\alpha}\right) < \infty,\ c_k(f) = \left\langle f, e^{-ikx}\right\rangle \right\}, \quad \alpha > 0.$$

$H_{\{\alpha\}}$ — гільбертів простір [3] зі скалярним добутком

$$(f, g)_{H_{\{\alpha\}}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f)\overline{c_k(g)}\rho^2\left(\frac{|k|}{\alpha}\right), \quad \{f, g\} \subset H_{\{\alpha\}}.$$

Якщо $\alpha_1 > \alpha_2$, то $H_{\{\alpha_1\}} \supset H_{\{\alpha_2\}}$, і це вкладення є неперервним внаслідок монотонності функції ρ. Покладемо $H\{m_k\} = \bigcup\limits_{\alpha} H_{\{\alpha\}}$, тоді $H\{m_k\} = \lim_{\alpha\to 0} \operatorname{ind} H_{\{\alpha\}}$. В [3] доведено, що простори $H\langle m_k\rangle$ та $H\{m_k\}$ збігаються не лише як множини, але й топологічно.

З точки зору поведінки коефіцієнтів Фур'є їхніх елементів простори $H\langle m_k\rangle$ та $H'\langle m_k\rangle$ описуються так [3]:

$$(f \in H\langle m_k\rangle) \Leftrightarrow (\exists\mu > 0\ \ \exists c > 0\ \ \forall k \in \mathbb{Z}\colon |c_k(f)| \le c\rho^{-1}(\mu|k|)); \tag{A}$$

$$(f \in H'\langle m_k\rangle) \Leftrightarrow (\forall\mu > 0\ \ \exists c = c(\mu) > 0\ \ \forall k \in \mathbb{Z}\colon |c_k(f)| \le c\rho(\mu|k|)). \tag{B}$$

Якщо $m_k = k^{k\beta},\ \beta > 0$, то $\rho(\lambda) \sim \exp\left\{\lambda^{1/\beta}\right\}$; у цьому випадку для $f \in T'$ правильними є такі співвідношення еквівалентності:

$$(f \in G_{\{\beta\}}) \Leftrightarrow \left(\exists \mu > 0 \ \ \exists c > 0 \ \ \forall k \in \mathbb{Z}\colon |c_k(f)| \le c \exp\left\{-\mu |k|^{1/\beta}\right\}\right);$$

$$\left(f \in G'_{\{\beta\}}\right) \Leftrightarrow \left(\forall \mu > 0 \ \ \exists c = c(\mu) > 0 \ \ \forall k \in \mathbb{Z}\colon |c_k(f)| \le c \exp\left\{\mu |k|^{1/\beta}\right\}\right).$$

Зауважимо також, що функція $\ln \rho$ опукла на $[1, +\infty)$ [10], тобто

$$\forall \{x_1, x_2\} \subset [1, +\infty)\colon \qquad \ln \rho(x_1) + \ln \rho(x_2) \le \ln \rho(x_1 + x_2), \tag{2}$$

(2) відповідає означенню опуклої функції f з [11]:

$$f(x_1) + f(x_2) \le f(x_1 + x_2), \qquad x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

У просторі $H'\langle m_k \rangle$ згортку визначено для довільних $\{f_1, f_2\} \subset H'\langle m_k \rangle \subset T'$. Правильним є таке твердження.

Лема 1. *1. Якщо $\{f_1, f_2\} \subset H'\langle m_k \rangle$, то $f_1 * f_2 \in H'\langle m_k \rangle$.*

2. Для довільних $\varphi \in H\langle m_k \rangle$ та $f \in H'\langle m_k \rangle$ згортка $f * \varphi$ є елементом простору $H\langle m_k \rangle$.

Доведення. Доведемо, наприклад, твердження 2. Оскільки $\varphi \in H\langle m_k \rangle$, то з умови (A) випливає, що

$$\exists \mu > 0 \quad \exists c > 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}\colon \quad |c_k(\varphi)| \le c \rho^{-1}(\mu |k|).$$

Внаслідок умови (B) для $\mu_1 = \mu/2$ існує стала $c_1 > 0$ така, що $|c_k(f)| \le c_1 \rho(\mu_1 |k|),\ k \in \mathbb{Z}$. Тоді з нерівності опуклості (2) маємо нерівність

$$\ln \rho(\mu_1 |k|) - \ln \rho(\mu |k|) \le -\ln \rho((\mu - \mu_1)|k|) \equiv -\ln \rho\left(\frac{\mu}{2}|k|\right), \quad |k| \ge 1.$$

Отже,

$$\rho(\mu_1 |k|) \rho^{-1}(\mu |k|) \le \rho^{-1}\left(\frac{\mu}{2}|k|\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Таким чином, для коефіцієнтів Фур'є згортки $f * \varphi$ справджуються оцінки

$$|c_k(f * \varphi)| \le \tilde{c} \rho^{-1}(\tilde{\mu} |k|), \quad k \in \mathbb{Z},$$

де $\tilde{c} = c_1 c_2,\ \tilde{\mu} = \mu/2$. Звідси вже випливає, що $f * \varphi \in H\langle m_k \rangle$.

Лему доведено.

Для згортки $f * \varphi,\ f \in H'\langle m_k \rangle,\ \varphi \in H\langle m_k \rangle$ існує інше (еквівалентне вихідному) зображення, а саме:

$$(f * \varphi)(x) = \langle f, T_{-x} \check{\varphi}(\cdot) \rangle \equiv \langle f(t), \varphi(x - t) \rangle, \tag{3}$$

де T_{-x} — оператор зсуву аргументу у просторі $H\langle m_k \rangle,\ \check{\varphi}(\xi) = \varphi(-\xi)$. Справді,

$$\forall \psi \in H\langle m_k \rangle\colon \langle f * \varphi, \psi \rangle = \big\langle f(\xi), \langle \varphi(y), \psi(\xi + y) \rangle \big\rangle =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left\langle f(\xi), \int_0^{2\pi} \varphi(y) \psi(\xi + y) dy \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\langle f(\xi), \int\limits_0^{2\pi} \varphi(t-\xi)\psi(t)dt \right\rangle =$$

$$= \langle f(\xi), \langle \psi(t), \varphi(t-\xi)\rangle\rangle = \langle f * \psi, \varphi(-\xi)\rangle =$$

$$= \langle \psi * f, \varphi(-\xi)\rangle = \langle \psi(t), \langle f(\xi), \varphi(-\xi+t)\rangle\rangle =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \psi(t)\langle f, T_{-t}\check{\varphi}(\cdot)\rangle dt = \langle\langle f, T_{-t}\check{\varphi}(\cdot)\rangle, \psi\rangle.$$

Отже,

$$(f * \varphi)(t) = \langle f, T_{-t}\check{\varphi}(\cdot)\rangle, \qquad f \in H'\langle m_k\rangle, \quad \varphi \in H\langle m_k\rangle,$$

тобто співвідношення (3) справджується.

2. Псевдодиференціальні оператори в просторах періодичних функцій. Нехай $\tilde{G}\colon \mathbb{R} \to \to [0,\infty)$ — неперервна парна функція така, що $\tilde{G}(x) \geq |x|,\ x \in \mathbb{R} \setminus (-1,1)$. За допомогою функції $\tilde{G}$ у просторі T' побудуємо оператор $\hat{A}\colon T' \to T'$:

$$T' \ni \tilde{f} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\big(\tilde{f}\big)e^{ikx} \to \hat{A}f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{G}(k)c_k\big(\tilde{f}\big)e^{ikx} \in T',$$

$$c_k\big(\tilde{f}\big) = \big\langle f, e^{-ikx}\big\rangle, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Неважко бачити, що оператор $\hat{A}$ лінійний та неперервний в T'. Оператор $\hat{A}$ — згортувач у алгебрі T'. Справді, якщо розглянути узагальнену функцію

$$f_{\tilde{G}}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{G}(k)e^{ikx} \in T',$$

то для довільної узагальненої функції $\tilde{f} \in T'$ маємо

$$\hat{A}f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{G}(k)c_k\big(\tilde{f}\big)e^{ikx} = \tilde{f} * f_{\tilde{G}},$$

тому що

$$c_k(\tilde{f} * f_{\tilde{G}}) = c_k\big(\tilde{f}\big)c_k(f_{\tilde{G}}) = c_k\big(\tilde{f}\big)\tilde{G}(k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Якщо $\tilde{G}(x) = |x|^\gamma,\ \gamma \geq 1,\ x \in \mathbb{R}$, то $\hat{A}$ збігається з оператором $\hat{A}_\gamma$ дробового диференціювання в T' [4]. Зазначимо, що сім'я операторів $\hat{A}_\gamma$ має властивості:

а) $\forall \tilde{f} \in T'\ \forall\{\alpha,\beta\} \subset (0,\infty)\colon \hat{A}_\alpha(\hat{A}_\beta\tilde{f}) = \hat{A}_{\alpha+\beta}\big(\tilde{f}\big)$;

б) $\forall \tilde{f} \in T'\colon \hat{A}_{2k}\tilde{f} = (-1)^k D_x^{2k}\tilde{f},\ k \in \mathbb{N}$.

Якщо A — звуження оператора $\hat{A}$ на простір $H = L_2[0,2\pi]$, то, як доведено в [4], A — невід'ємний самоспряжений оператор у H зі щільною в H областю визначення $\mathcal{D}(A)$, причому $T \subset \mathcal{D}(A)$. Оператор A надалі називатимемо псевдодиференціальним оператором у просторі $L_2[0,2\pi]$.

Нехай $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ — деяка неперервна функція. За функцією f та оператором A побудуємо оператор $f(A)$:

$$f(A)\varphi = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(\lambda_k)c_k(\varphi)e^{ikx}, \quad \lambda_k = \tilde{G}(k), \qquad \tilde{G}(k) = \tilde{G}(-k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Тоді $f(A) := A_f$ — невід'ємний самоспряжений оператор у H зі щільною в H областю визначення

$$\mathcal{D}(A_f) = \left\{\varphi \in H\colon \sum_{k\in\mathbb{Z}} f^2(\lambda_k)|c_k(\varphi)|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(A_f\varphi)|^2 < \infty\right\},$$

причому

$$T \subset \mathcal{D}(A_f), \quad \sigma(A_f) = \{f(\lambda_k)\colon \lambda_k = \tilde{G}(k),\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Теорема 1. *Якщо неперервна на* $[0,\infty)$ *функція* f *задовольняє умову*

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists c_\varepsilon > 0 \quad \forall x \in [0,\infty)\colon \quad 0 \le f(x) \le c_\varepsilon \rho(\varepsilon x), \tag{4}$$

то оператор A_f *неперервний у просторі* $H\langle m_k\rangle \subset H$ *і відображає цей простір у себе.*

Доведення. Передусім доведемо, що функція $A_f\varphi$ належить $H\langle m_k\rangle$, якщо

$$\varphi = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(\varphi)e^{ikx} \in H\langle m_k\rangle.$$

Оскільки

$$c_k(A_f\varphi) = \left(A_f\varphi, e^{-ikx}\right) = \left(\varphi, A_f e^{-ikx}\right) = f(\lambda_k)\left(\varphi, e^{-ikx}\right) = f(\lambda_k)c_k(\varphi), \quad k \in \mathbb{Z},$$

то, внаслідок умови (А), досить довести, що

$$\exists\mu_0 > 0 \quad \exists c_0 > 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}\colon \quad f(\lambda_k)|c_k(\varphi)| \le c_0\rho^{-1}(\mu_0|k|).$$

За умовою, $\varphi \in H\langle m_k\rangle$, тобто

$$\exists\mu_1 > 0 \quad \exists c_1 > 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}\colon \quad |c_k(\varphi)| \le c_1\rho^{-1}(\mu_1|k|).$$

Отже,

$$f(\lambda_k)|c_k(\varphi)| \le c_\varepsilon c_1 \rho(\varepsilon|k|)\rho^{-1}(\mu_1|k|) = c_\varepsilon c_1 e^{\ln\rho(\varepsilon|k|) - \ln\rho(\mu_1|k|)}.$$

Візьмемо параметр ε з проміжку $(0,\mu_1)$. Урахувавши нерівність опуклості (2) для функції $\ln\rho$, знайдемо, що

$$\ln\rho(\varepsilon|k|) - \ln\rho(\mu_1|k|) \le -\ln\rho((\mu_1-\varepsilon)|k|) \equiv -\ln\rho(\mu_0|k|),$$

де $\mu_1 - \varepsilon = \mu_0$. Тоді

$$f(\lambda_k)|c_k(\varphi)| \le c_0 e^{-\ln\rho(\mu_0|k|)} = c_0\rho^{-1}(\mu_0|k|),$$

звідки й випливає, що $A_f\varphi \in H\langle m_k\rangle$.

Доведемо, що A_f — неперервний оператор у просторі $H\langle m_k\rangle$, тобто кожну обмежену множину цього простору A_f відображає в обмежену множину цього ж простору. Нехай L — обмежена множина в просторі $H\langle m_k\rangle$. Оскільки $H\langle m_k\rangle = \bigcup\limits_{\alpha>0} H_{\{\alpha\}}$, то L — обмежена множина в деякому гільбертовому просторі $H_{\{\alpha_0\}}$, тобто

$$\exists b > 0 \quad \forall\varphi \in L\colon \quad \|\varphi\|_{H_{\{\alpha_0\}}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(\varphi)|^2\rho^2\left(\frac{|k|}{\alpha_0}\right) \le b.$$

Отже,

$$\forall \varphi \in L\colon \quad |c_k(\varphi)| \le b_1 \rho^{-1}\left(\frac{|k|}{\alpha_0}\right), \qquad k \in \mathbb{Z}, \quad b_1 = \sqrt{b}.$$

Для нерівності (4) будемо вважати, що $\varepsilon = (2\alpha_0)^{-1}$. Тоді, скориставшись нерівністю опуклості (2), знайдемо, що

$$|c_k(A_f\varphi)| = f(\lambda_k)|c_k(\varphi)| \le$$

$$\le c_\varepsilon b_1 \rho(\varepsilon|k|)\rho^{-1}\left(\frac{|k|}{\alpha_0}\right) = b_1 c_\varepsilon e^{\ln\rho(\varepsilon|k|) - \ln\rho\left(\frac{|k|}{\alpha_0}\right)} \le$$

$$\le b_1 c_\varepsilon e^{-\ln\rho\left(\left(\frac{1}{\alpha_0} - \varepsilon\right)|k|\right)} = b_1 c_\varepsilon \rho^{-1}\left(\left(\frac{1}{\alpha_0} - \varepsilon\right)|k|\right) =$$

$$= b_2 \rho^{-1}\left(\frac{|k|}{2\alpha_0}\right), \quad b_2 = b_1 c_\varepsilon, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Отже, множина $A_f L$ обмежена в просторі $H_{\{2\alpha_0\}} \subset H\langle m_k\rangle$, тобто в просторі $H\langle m_k\rangle$.

Теорему доведено.

Зауваження 1. Умова (4) для функції f еквівалентна тому, що функція

$$F_f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(\lambda_k)e^{ikx} \equiv \sum_{k\in\mathbb{Z}} f\big(\tilde{G}(k)\big)e^{ikx}$$

є елементом простору $H'\langle m_k\rangle$.

Надалі вважатимемо, що функція f додатково задовольняє умову

$$\exists c_0 > 0 \quad \exists d_0 > 0 \quad \forall x \in [0,\infty)\colon \quad f(x) \ge d_0 \ln\rho(c_0 x). \tag{5}$$

3. Нелокальна багатоточкова за часом задача. Розглянемо еволюційне рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A_f u = 0, \quad (t,x) \in (0,T] \times \mathbb{R} \equiv \Omega, \tag{6}$$

де A_f — оператор, побудований у п. 2. Під розв'язком рівняння (6) розуміємо функцію $u(t,x)$, неперервно диференційовну по t при кожному $x \in \mathbb{R}$, яка задовольняє це рівняння, $u(t,\cdot) \in \mathcal{D}(A_f)$ при кожному $t \in (0,T]$.

Розглянемо таку задачу: знайти функцію u, яка є розв'язком рівняння (6) та задовольняє умову

$$\mu u(0,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k B_k u(t_k,\cdot) = g, \quad g \in L_2[0,2\pi], \tag{7}$$

де $m \in \mathbb{N}$, $\{\mu,\mu_1,\ldots,\mu_m\} \subset (0,\infty)$, $\{t_1,\ldots,t_m\} \subset (0,T]$ — фіксовані числа, причому $\mu > \sum_{k=1}^{m} \mu_k$, $t_1 < t_2 < \ldots < t_m \le T$, $B_1,\ldots,B_m$ — псевдодиференціальні оператори в просторі $L_2[0,2\pi]$, побудовані за функціями $g_1,\ldots,g_m$ відповідно та оператором A (див. п. 2). Тут $g_k\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$, $k \in \{1,\ldots,m\}$, — неперервна функція, яка задовольняє умову

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \forall x \in [0,\infty)\colon \quad 0 \le g_k(x) \le e^{\varepsilon f(x)}, \quad k \in \{1,\ldots,m\},$$

оператори $B_1, \ldots, B_m$ невід'ємні самоспряжені в $H = L_2[0, 2\pi]$ зі щільними в H областями визначення,

$$\sigma(B_i) = \{g_i(\lambda_k)\colon \lambda_k = \tilde{G}(k),\ k \in \mathbb{Z}\}, \quad i = \{1, \ldots, m\}.$$

При цьому $u(0, \cdot)$ розуміємо як $\lim_{t \to +0} u(t, \cdot)$, де границя розглядається в гільбертовому просторі $H = L_2[0, 2\pi]$. Задачу (6), (7) надалі називатимемо нелокальною багатоточковою за часом задачею для рівняння (6).

Нехай u — розв'язок рівняння (6). Оскільки $u(t, \cdot) \in H,\ H = L_2[0, 2\pi]$ при кожному $t \in (0, T]$, то

$$u(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{c}_k(t) e^{ikx}, \quad (t, x) \in \Omega,$$

$$\tilde{c}_k(t) \equiv c_k(u(t, \cdot)) = \big(u(t, \cdot), e^{-ikx}\big), \quad k \in \mathbb{Z},$$

причому

$$\|u(t, \cdot)\|_H^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\tilde{c}_k(t)|^2, \quad t \in (0, T].$$

Для того щоб знайти $\tilde{c}_k(t)$, домножимо (6) на e^{-ikx}, $k \in \mathbb{Z}$, у результаті одержимо співвідношення

$$\big(u_t', e^{-ikx}\big) + \big(A_f u, e^{-ikx}\big) = 0.$$

При фіксованому $k \in \mathbb{Z}$ маємо

$$\big(A_f u, e^{-ikx}\big) = \big(u, A_f e^{-ikx}\big) = \big(u, f(\lambda_k) e^{-ikx}\big) = f(\lambda_k)\big(u, e^{-ikx}\big) = f(\lambda_k)\tilde{c}_k(t),$$

$$\lambda_k = \tilde{G}(k) = \tilde{G}(-k)$$

(тут ураховано, що $e^{-ikx} \in \mathcal{D}(A_f)$ при кожному $k \in \mathbb{Z}$, причому e^{-ikx} — власна функція оператора A, а $f(\lambda_k)$ — його власне число).

Із диференційовності $u(t, \cdot)$ (за змінною $t \in (0, T]$) випливає диференційовність функції $\tilde{c}_k(t) = \big(u(t, \cdot), e^{-ikx}\big)$ на $(0, T]$. Отже,

$$\frac{d}{dt}\, \tilde{c}_k(t) = \frac{d}{dt}\, \Big(u(t, \cdot), e^{-ikx}\Big) = \left(\frac{d}{dt}\, u(t, \cdot), e^{-ikx}\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Зауважимо також, що $\lim_{t \to +0} \tilde{c}_k(t) = \tilde{c}_k(0) = c_k(u(0, \cdot))$. Справді,

$$\tilde{c}_k(t) = \big(u(t, \cdot), e^{-ikx}\big), \qquad \tilde{c}_k(0) = \big(u(0, \cdot), e^{-ikx}\big),$$

$$\big|\tilde{c}_k(t) - \tilde{c}_k(0)\big| = \big|(u(t, \cdot) - u(0, \cdot), e^{-ikx})\big| \leq \|u(t, \cdot) - u(0, \cdot)\| \to 0, \quad t \to +0.$$

Функція $\tilde{c}_k(t)$ задовольняє рівняння $\tilde{c}_k'(t) + f(\lambda_k)\tilde{c}_k(t) = 0$, $k \in \mathbb{Z}$, загальний розв'язок якого має вигляд

$$\tilde{c}_k(t) = c_k \exp\big\{-t f(\lambda_k)\big\}, \qquad c_k = \mathrm{const}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Тоді

$$u(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \exp\big\{-t f(\lambda_k)\big\} e^{ikx}, \quad (t, x) \in \Omega. \tag{8}$$

Для знаходження $c_k,\ k \in \mathbb{Z}$, помножимо (7) скалярно на $e^{-ikx},\ k \in \mathbb{Z}$; у результаті прийдемо до співвідношення

$$\mu\tilde{c}_k(0) - \sum_{n=1}^{m} \mu_n g_n(\lambda_k)\tilde{c}_k(t_n) = c_k(g), \quad c_k(g) = (g, e^{-ikx}), \quad k \in \mathbb{Z},$$

(тут враховано, що $e^{-ikx} \in \mathcal{D}(B_n)$ при кожному $k \in \mathbb{Z},\ e^{-ikx}$ — власна функція оператора B_n, а $g_n(\lambda_k)$ — його власне число, $n \in \{1, \ldots, m\}$). Врахувавши вигляд $\tilde{c}_k(t)$, знайдемо, що

$$c_k \left(\mu - \sum_{n=1}^{m} \mu_n g_n(\lambda_k) \exp\{-t_n f(\lambda_k)\} \right) = c_k(g).$$

Отже,

$$c_k = c_k(g) \left(\mu - \sum_{n=1}^{m} \mu_n g_n(\lambda_k) \exp\{-t_n f(\lambda_k)\} \right)^{-1}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Введемо позначення

$$Q_1(t, \lambda_k) := \exp\{-t f(\lambda_k)\},$$

$$Q_2(\lambda_k) := \left(\mu - \sum_{n=1}^{m} \mu_n g_n(\lambda_k) \exp\{-t_n f(\lambda_k)\} \right)^{-1} = \left(\mu - \sum_{n=1}^{m} \mu_n g_n(\lambda_k) Q_1(t_n, \lambda_k) \right)^{-1}.$$

Тоді

$$\tilde{c}_k(t) = c_k(u(t, \cdot)) = Q_1(t, \lambda_k) Q_2(\lambda_k) c_k(g), \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$u(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{c}_k(t) e^{ikx} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} Q_1(t, \lambda_k) Q_2(\lambda_k) c_k(g) e^{ikx} = G(t, x) * g(x), \quad (t, x) \in \Omega,$$

де

$$G(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} Q_1(t, \lambda_k) Q_2(\lambda_k) e^{ikx}, \qquad g(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(g) e^{ikx}.$$

Із обмежень, накладених на функції $f, g_1, \ldots, g_m$ і параметри задачі (6), (7), випливають нерівності

$$Q_1(t, \lambda_k) \le e^{-d_0 t \ln \rho(\mu_0 \lambda_k)} \le e^{-d_0 t \ln \rho(\mu_0 |k|)},$$

$$Q_2(\lambda_k) = \left(\mu - \sum_{n=1}^{m} \mu_n g_n(\lambda_k) e^{-t_n f(\lambda_k)} \right) \le \left(\mu - \sum_{n=1}^{m} \mu_n e^{\varepsilon f(\lambda_k) - t_1 f(\lambda_k)} \right)^{-1},$$

$$t_1 < t_2 < \ldots < t_m.$$

Поклавши $\varepsilon = t_1$, одержимо оцінку $Q_2(\lambda_k) \le \left(\mu - \sum_{n=1}^{m} \mu_n \right)^{-1}$ (тут враховано, що $\mu > > \sum_{n=1}^{m} \mu_n$). Отже, при кожному $t \in (0, T]$

$$|c_k(G)| = |Q_1(t, \lambda_k)||Q_2(\lambda_k)| \le \gamma e^{-d_0 t \ln \rho(\mu_0 |k|)}, \qquad \gamma = \left(\mu - \sum_{n=1}^{m} \mu_n \right)^{-1}.$$

Звідси та з характеристики класу $H\langle m_k\rangle$ випливає, що $G(t,\cdot)\in H\langle m_k\rangle$ при кожному $t\in(0,T]$. Справді, якщо φ — опукла на $[0,+\infty)$ функція, то крім нерівності (2) для такої функції справджуються ще нерівності [10]:

а) $\forall\alpha\in(0,1)\ \forall x\in[0,\infty)\colon \varphi(\alpha x)\le\alpha\varphi(x)$;

б) $\forall\alpha\ge 1\ \forall x\in[0,\infty)\colon \varphi(\alpha x)\ge\alpha\varphi(x)$.

Отже, якщо $d_0t<1$, то, врахувавши а), запишемо нерівності

$$|c_k(G)|\le\gamma e^{-d_0t\ln\rho(\mu_0\lambda_k)}\le\gamma e^{-d_0t\ln\rho(\mu_0|k|)}\le$$

$$\le\gamma e^{-\ln\rho(a_1|k|)}\equiv\gamma\rho^{-1}(a_1|k|),\quad k\in\mathbb{Z},\quad a_1=d_0t.$$

Якщо $d_0t>1$ і d_0t — не ціле, то $d_0t=[d_0t]+\{d_0t\}$. Тоді

$$e^{-d_0t\ln\rho(\mu_0\lambda_k)}\le e^{-d_0t\ln\rho\{\mu_0|k|\}}=e^{-[d_0t]\ln\rho(\mu_0|k|)}e^{-\{d_0t\}\ln\rho(\mu_0|k|)}\le$$

$$\le e^{-\{d_0t\}\ln\rho(\mu_0|k|)}\le e^{-\ln\rho(a_2|k|)}=\rho^{-1}(a_2|k|),\quad a_2=\{d_0t\}.$$

Якщо $d_0t=n,\ n\in\{2,3,4,\dots\}$, то $d_0t=1+n-1$ і

$$e^{-d_0t\ln\rho(\mu_0\lambda_k)}\le e^{-d_0t\ln\rho(\mu_0|k|)}=e^{-\ln\rho(\mu_0|k|)}e^{-(n-1)\ln\rho(\mu_0|k|)}\le$$

$$\le e^{-\ln\rho(\mu_0|k|)}=\rho^{-1}(\mu_0|k|),\quad k\in\mathbb{Z}.$$

Нехай $a=\min\{a_1,a_2,\mu_0\}$. Тоді, при фіксованому $t\in(0,T]$, справджується нерівність

$$|c_k(G)|\le\gamma\rho^{-1}(a|k|),\quad k\in\mathbb{Z},$$

з якої (та умови (A)) випливає, що $G(t,\cdot)\in H\langle m_k\rangle$ при кожному $t\in(0,T]$.

Оскільки $u(t,\cdot)=G(t,\cdot)*g$, де $g\in H\subset H'\langle m_k\rangle$, $G(t,\cdot)\in H\langle m_k\rangle$ при кожному $t\in(0,T]$, то на підставі відповідної властивості згортки стверджуємо, що $u(t,\cdot)\in H\langle m_k\rangle$.

Зауваження 2. Якщо функція $u(t,x)$ зображується формулою (8), то вона є розв'язком рівняння (6).

Справді, згідно з означенням оператора A_f маємо, що

$$A_fu(t,x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}c_kf(\lambda_k)e^{-tf(\lambda_k)}e^{ikx}.$$

Далі безпосередньо доводимо, що функція $u(t,x)$ диференційовна за змінною t на проміжку $(0,T]$ при кожному $x\in[0,2\pi]$ і

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}=-\sum_{k\in\mathbb{Z}}c_kf(\lambda_k)e^{-tf(\lambda_k)}e^{ikx}.$$

Звідси випливає, що u — розв'язок рівняння (6).

Отже, формула (8) описує *всі розв'язки рівняння (6), тобто функція $u(t,x)$ є розв'язком рівняння (6) тоді й лише тоді, коли вона зображується у вигляді (8)*. Звідси випливає, що задача (6), (7) має єдиний розв'язок. Справді, розв'язок цієї задачі подамо у вигляді $\sum_{k\in\mathbb{Z}}c_k\exp\{-tf(\lambda_k)\}e^{ikx}$, де $c_k=Q_2(\lambda_k)c_k(g)$, $c_k(g)=\left\langle g,e^{-ikx}\right\rangle$, $k\in\mathbb{Z}$. Якщо $g=0$, то $c_k(g) = 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}$, тобто $c_k = 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}$. Звідси випливає, що $u(t,x) = 0$ для кожного $t \in (0,T]$, що й доводить єдиність розв'язку задачі (6), (7).

Доведемо тепер, що розв'язок задачі (6), (7) неперервно залежить від початкової умови. Нехай $\{g, g_n, n \in \mathbb{N}\} \subset H$, причому $g_n \to g$ при $n \to \infty$ у просторі H, тобто $\|g_n - g\|_H^2 \to 0$ при $n \to \infty$. Це рівносильно тому, що

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(g_n - g)|^2 \to 0, \quad n \to \infty.$$

Нехай u_n — розв'язок задачі (6), (7), який відповідає граничному елементу g_n. Тоді

$$\|u_n - u\|_H^2 = \|G * (g_n - g)\|_H^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(G)|^2 |c_k(g_n - g)|^2.$$

Із доведеного раніше випливає, що $|c_k(G)| \le \gamma, \ k \in \mathbb{Z}$, де $\gamma = \left(\mu - \sum_{n=1}^{m} \mu_n\right)^{-1}$. Отже,

$$\|u_n - u\|_H^2 \le \gamma^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(g_n - g)|^2 \to 0, \quad n \to \infty,$$

що й потрібно було довести.

Підсумуємо одержані результати у вигляді такого твердження.

Теорема 2. *Нелокальна багатоточкова за часом задача (6), (7) коректно розв'язна, розв'язок визначається формулою* $u(t,x) = G(t,x) * g(x), \ (t,x) \in \Omega$, *де*

$$G(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} Q_1(t,\lambda_k) Q_2(\lambda_k) e^{ikx}, \qquad g(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(g) e^{ikx} \in H,$$

при цьому $\{G(t,\cdot), u(t,\cdot)\} \subset H\langle m_k\rangle$ *при кожному* $t \in (0,T]$.

Зазначимо, що внаслідок відповідної властивості згортки $u(t,\cdot) = G(t,\cdot) * g \in H\langle m_k\rangle$ при кожному $t \in (0,T]$, якщо $g \in H'\langle m_k\rangle$. Доведемо, що тоді функція $u(t,\cdot)$ є розв'язком рівняння (6), який задовольняє умову (7), де $g \in H'\langle m_k\rangle$, у тому розумінні, що

$$\mu \lim_{t\to+0} u(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} B_k u(t,\cdot) = g, \quad g \in H'\langle m_k\rangle \tag{9}$$

(границі розглядаються в просторі $H'\langle m_k\rangle$).

Лема 2. *Функція* $G(t,\cdot), \ t \in (0,T]$, *як абстрактна функція параметра* t *зі значеннями у просторі* $H\langle m_k\rangle$, *диференційовна по* t.

Доведення. Оскільки $H\langle m_k\rangle = H\{m_k\} = \bigcup_{\alpha>0} H_{\{\alpha\}}$, то для доведення твердження досить показати, що

$$\Phi_{\Delta t}(x) := \frac{1}{\Delta t}\big[G(t+\Delta t, x) - G(t,x)\big] \underset{\Delta t\to 0}{\longrightarrow} \frac{\partial}{\partial t} G(t,x)$$

у просторі $H\{m_k\}$ (якщо $\Delta t < 0$, то вважаємо Δt таким, що $t + \Delta t \ge t/2$). Це означає, що:

1) множина функцій $\big\{\Phi_{\Delta t} \colon |\Delta t| \le \varepsilon_0, \Delta t \ne 0\big\}$ ($\varepsilon_0 > 0$ — досить мале фіксоване число) обмежена в просторі $H\{m_k\}$, тобто

$$\exists c > 0 \quad \forall \Delta t \quad (|\Delta t| \le \varepsilon_0, \Delta t \ne 0): \quad \|\Phi_{\Delta t}\|_{H_{\{\alpha\}}}^2 \le c$$

при деякому $\alpha > 0$ та фіксованому $t \in (0,T]$;

2) $\Phi_{\Delta t} \to \dfrac{\partial}{\partial t} G(t,\cdot)$ при $\Delta t \to 0$ у просторі $H\{m_k\}$, тобто

$$\left\| \Phi_{\Delta t} - \frac{\partial}{\partial t} G(t,\cdot) \right\|^2_{H_{\{\alpha\}}} \to 0, \quad \Delta t \to 0,$$

при деякому $\alpha > 0$.

Передусім зазначимо, що функція $G(t,x)$ диференційовна по $t \in (0,T]$ (при кожному $x \in \mathbb{R}$). Справді, нехай $t \in [\tilde{\varepsilon}, T]$, де $\tilde{\varepsilon} > 0$. Доведемо, що ряд

$$-\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(\lambda_k) Q_1(t,\lambda_k) Q_2(\lambda_k) e^{ikx}, \quad t \in [\tilde{\varepsilon}, T], \tag{10}$$

збігається рівномірно по t (при фіксованому x), бо тоді

$$\frac{\partial G(t,x)}{\partial t} = -\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(\lambda_k) Q_1(t,\lambda_k) Q_2(\lambda_k) e^{ikx}. \tag{11}$$

Оскільки

$$\left| e^{ikx} \right| = 1, \quad k \in \mathbb{Z}, \qquad \left| Q_2(\lambda_k) \right| \le \gamma, \qquad \gamma = \left(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \right)^{-1},$$

то для $t \ge \tilde{\varepsilon}$ (з урахуванням умов (4), (5)) маємо, що

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists c_\varepsilon > 0\colon \quad \alpha(t,x) &:= \left| -f(\lambda_k) Q_1(t,\lambda_k) Q_2(\lambda_k) e^{ikx} \right| \le \\ &\le \gamma f(\lambda_k) \exp\{-\tilde{\varepsilon} f(\lambda_k)\} \le \\ &\le c_\varepsilon \gamma \exp\left\{-\tilde{\varepsilon} d_0 \ln \rho(c_0 \lambda_k)\right\} \exp\{\ln \rho(\varepsilon \lambda_k)\}. \end{aligned}$$

Вважаючи, що $\tilde{\varepsilon} d_0 < 1$ та враховуючи опуклість функції $\ln \rho$, приходимо до нерівності

$$\alpha(t,x) \le c_\varepsilon \gamma \exp\{-\ln \rho((\tilde{\varepsilon} d_0 - \varepsilon)\lambda_k)\}.$$

Оскільки $\varepsilon > 0$ довільне, то припустимо, що $\varepsilon = \tilde{\varepsilon} d_0 / 2$. Тоді

$$\alpha(t,x) \le \tilde{c} \exp\left\{ -\ln \rho \left(\frac{\tilde{\varepsilon} d_0}{2} \lambda_k \right) \right\} = \tilde{c} \rho^{-1}(\beta \lambda_k), \tag{12}$$

$$\beta = \frac{\tilde{\varepsilon} d_0}{2}, \quad t \in [\tilde{\varepsilon}, T], \quad x \in \mathbb{R}.$$

Із (12) та властивостей функції ρ випливає, що ряд (10) збігається рівномірно при $t \ge \tilde{\varepsilon}$. Цим доведено, що функція $G(t,\cdot)$ диференційовна по t на відрізку $[\tilde{\varepsilon}, T]$. Оскільки $\tilde{\varepsilon} > 0$ довільне, то функція $G(t,\cdot)$ диференційовна по t на проміжку $(0,T]$, при цьому правильне співвідношення (11), яке виконується у кожній точці $t \in (0,T]$. Зазначимо також, що при кожному $t \in (0,T]$ функція $\dfrac{\partial}{\partial t} G(t,\cdot)$ є елементом простору $H\langle m_k \rangle$, оскільки

$$c_k \left(\frac{\partial}{\partial t} G(t,\cdot) \right) = -f(\lambda_k) Q_1(t,\lambda_k) Q_2(\lambda_k)$$

і, як випливає з (12), для коефіцієнтів Фур'є функції $\dfrac{\partial}{\partial t}G(t,\cdot)$ справджується оцінка

$$\left|c_k\left(\frac{\partial}{\partial t}G(t,\cdot)\right)\right| \le c\rho^{-1}(\beta\lambda_k) \le c\rho^{-1}(\beta|k|), \quad k\in\mathbb{Z}.$$

Це й означає (див. (A)), що $\dfrac{\partial}{\partial t}G(t,\cdot)\in H\langle m_k\rangle$ при кожному $t\in(0,T]$.

Оскільки

$$\Phi_{\Delta t}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{\Delta t}\left[e^{-(t+\Delta t)f(\lambda_k)} - e^{-tf(\lambda_k)}\right]Q_2(\lambda_k)e^{ikx} =$$

$$= -\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(\lambda_k)e^{-(t+\theta\Delta t)f(\lambda_k)}Q_2(\lambda_k)e^{ikx}, \quad 0<\theta<1,$$

то

$$c_k(\Phi_{\Delta t}) = -f(\lambda_k)Q_1(t+\theta\Delta t,\lambda_k)Q_2(\lambda_k)$$

(якщо $\Delta t<0$, то внаслідок домовленості щодо Δt маємо $t+\theta\Delta t\ge t+\Delta t\ge t/2$). Тоді для довільного фіксованого $\alpha>0$, конкретне значення якого вкажемо пізніше, справджуються співвідношення

$$\|\Phi_{\Delta t}\|^2_{H_{\{\alpha\}}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_k(\Phi_{\Delta t})|^2\rho^2\left(\frac{|k|}{\alpha}\right) =$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} f^2(\lambda_k)\rho^2\left(\frac{|k|}{\alpha}\right)e^{-2(t+\theta\Delta t)f(\lambda_k)}Q_2^2(\lambda_k) \le$$

$$\le \gamma^2\sum_{k\in\mathbb{Z}} f^2(\lambda_k)\rho^2\left(\frac{|k|}{\alpha}\right)e^{-2tf(\lambda_k)} \le$$

$$\le \gamma^2\sum_{k\in\mathbb{Z}} f^2(\lambda_k)e^{2\ln\rho\left(\frac{|k|}{\alpha}\right)}e^{-2\ln\rho(a_1\lambda_k)},$$

$$a_1 = \{d_0t\}c_0, \qquad \gamma = \left(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k\right)^{-1},$$

$d_0,\ c_0$ — сталі з умови (5). З урахуванням (4) та властивості опуклості функції $\ln\rho$ маємо, що

$$f^2(\lambda_k)e^{-2\ln\rho(a_1\lambda_k)} \le c_\varepsilon^2 e^{2\ln\rho(\varepsilon\lambda_k)-2\ln\rho(a_1\lambda_k)} \le$$

$$\le c_\varepsilon^2 e^{-2\ln\rho((a_1-\varepsilon)\lambda_k)} = c_\varepsilon^2 e^{-2\ln\rho(a_2\lambda_k)}, \quad a_2 = a_1/2,$$

якщо вважати, що $\varepsilon = a_1/2$. Із властивостей функцій ρ і $\tilde G$ випливають нерівності

$$\rho(a_2\lambda_k) \ge a_2\lambda_k = a_2\tilde G(|k|) \ge a_2|k|, \quad k\in\mathbb{Z};$$

тоді, знову використовуючи властивість опуклості функції $\ln\rho$, одержуємо нерівність

$$\|\Phi_{\Delta t}\|^2_{H_{\{\alpha\}}} \le \gamma^2 c_\varepsilon^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{2\ln\rho\left(\frac{|k|}{\alpha}\right)} e^{-2\ln\rho(a_2|k|)} \le$$

$$\le b\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-2\ln\rho\left(\left(a_2-\frac{1}{\alpha}\right)|k|\right)} = b\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-2\ln\rho(a_3|k|)} =$$

$$= b\sum_{k\in\mathbb{Z}} \rho^{-2}(a_3|k|) \le \tilde{b}_1 + \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} a_3^{-2}|k|^{-2} < \infty,$$

$$a_3 = a_2 - \frac{1}{\alpha},$$

для фіксованого $\alpha > 0$ такого, що $a_2 - \dfrac{1}{\alpha} > 0$ $\left(\text{тобто для } \alpha > \dfrac{1}{a_2}\right)$. Отже, множина функцій $\left\{\Phi_{\Delta t},\ |\Delta t| \le \varepsilon,\ \Delta t \ne 0\right\}$ обмежена в просторі $H\{m_k\} = H\langle m_k\rangle$.

Перевіримо виконання умови 2). Нехай

$$\Psi_{\Delta t}(x) := \Phi_{\Delta t}(x) - \frac{\partial}{\partial t}G(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left[e^{-tf(\lambda_k)} - e^{-(t+\theta\Delta t)f(\lambda_k)}\right] Q_2(\lambda_k) f(\lambda_k) e^{ikx}.$$

Звідси випливають співвідношення

$$\|\Psi_{\Delta t}\|^2_{H_{\{\alpha\}}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(\Psi_{\Delta t})|^2 \rho^2\left(\frac{|k|}{\alpha}\right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(\Psi_{\Delta t})|^2 e^{2\ln\rho\left(\frac{|k|}{\alpha}\right)} =$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{2\ln\rho\left(\frac{|k|}{\alpha}\right)} |e^{-tf(\lambda_k)} - e^{-(t+\theta\Delta t)f(\lambda_k)}|^2 Q_2^2(\lambda_k) f^2(\lambda_k) \le$$

$$\le \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{2\ln\rho\left(\frac{|k|}{\alpha}\right)} e^{-2(t+\theta_1\Delta t)f(\lambda_k)} f^4(\lambda_k)\theta^2(\Delta t)^2 Q_2^2(\lambda_k) \le$$

$$\le \gamma^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{2\ln\rho\left(\frac{|k|}{\alpha}\right)} e^{-2tf(\lambda_k)} f^4(\lambda_k)(\Delta t)^2,$$

$$0 < \theta_1 < 1, \quad \gamma = \left(\mu - \sum_{k=1}^{m}\mu_k\right)^{-1}.$$

Внаслідок (4) і властивості опуклості функції $\ln\rho$ маємо

$$f^4(\lambda_k)e^{-2tf(\lambda_k)} \le c_\varepsilon^4 e^{-2\ln\rho(a_1\lambda_k)} e^{4\ln\rho(\varepsilon\lambda_k)} \le$$

$$\le c_\varepsilon^4 e^{-2\ln\rho(a_1\lambda_k)} e^{2\ln\rho(2\varepsilon\lambda_k)} \le$$

$$\le c_\varepsilon^4 e^{-2\ln\rho((a_1-2\varepsilon)\lambda_k)} = c_\varepsilon^4 e^{-2\ln\rho(a_4\lambda_k)}, \quad a_4 = \frac{a_1}{2},$$

якщо вважати, що $\varepsilon = \dfrac{a_1}{4}$. Оскільки

$$\rho(a_4\lambda_k) \geq a_4\lambda_k = a_4\tilde{G}(|k|) \geq a_4|k|, \quad k \in \mathbb{Z},$$

то

$$\|\Psi_{\Delta t}\|^2_{H_{\{\alpha\}}} \leq \tilde{b}\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{2\ln\rho\left(\frac{|k|}{\alpha}\right)} e^{-2\ln\rho(a_4|k|)} \leq \tilde{c}(\Delta t)^2,$$

де $\tilde{b} = \gamma^2 c_\varepsilon^4$,

$$\tilde{c} = \tilde{b}\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-2\ln\rho\left(\left(a_4-\frac{1}{\alpha}\right)|k|\right)} < \infty$$

для довільного фіксованого $\alpha > \dfrac{1}{a_4}$. Звідси вже випливає, що $\|\Psi_{\Delta t}\|_{H_{\{\alpha\}}} \to 0$ при $\Delta t \to 0$ $\left(\text{для } \alpha > \dfrac{1}{a_4}\right)$, тобто $\Phi_{\Delta t} \to \dfrac{\partial}{\partial t} G(t,\cdot)$ при $\Delta t \to 0$ у просторі $H\{m_k\} = H\langle m_k\rangle$.

Лему 2 доведено.

Лема 3. *Функція*

$$u(t,x) = G(t,x) * g = \big\langle g(y), G(t,x-y)\big\rangle, \quad g \in H'\langle m_k\rangle,$$

диференційовна по t, *при цьому*

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \Big\langle g(y), \frac{\partial}{\partial t} G(t,x-y)\Big\rangle = \frac{\partial}{\partial t} G(t,x) * g.$$

Доведення. Внаслідок леми 2

$$\tilde{\Phi}_{\Delta t,t,x}(y) := \frac{1}{\Delta t}\left[G(t+\Delta t, x-y) - G(t,x-y)\right] \to \frac{\partial}{\partial t} G(t,x-y), \quad \Delta t \to 0$$

(при фіксованому $x \in \mathbb{R}$), за топологією простору $H\langle m_k\rangle$. Із властивості неперервності функціонала g випливають співвідношення

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\big[u(t+\Delta t,x) - u(t,x)\big] =$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\left\langle g, \frac{1}{\Delta t}\left[G(t+\Delta t,x-y) - G(t,x-y)\right]\right\rangle =$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\left\langle g, \tilde{\Phi}_{\Delta t,t,x}(\cdot)\right\rangle = \left\langle g, \lim_{\Delta t\to 0}\tilde{\Phi}_{\Delta t,t,x}(\cdot)\right\rangle =$$

$$= \left\langle g, \frac{\partial}{\partial t} G(t,x-y)\right\rangle = \frac{\partial}{\partial t} G(t,x) * g,$$

що й потрібно довести.

Функція $u(t,x) = G(t,x) * g$, $g \in H'\langle m_k\rangle$, задовольняє рівняння (6). Справді, $u(t,\cdot) \in$ $\in H\langle m_k\rangle$ при кожному $t \in (0,T]$. Крім того,

$$A_f(G(t,x) * g) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(\lambda_k) c_k(G(t,x) * g) e^{ikx} =$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(\lambda_k)c_k(G)c_k(g)e^{ikx} =$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(\lambda_k)c_k(g)Q_1(t,\lambda_k)Q_2(\lambda_k)e^{ikx}.$$

З іншого боку (див. лему 3),

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\,G(t,x) * g = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\left(\frac{\partial}{\partial t}\,G\right)c_k(g)e^{ikx} =$$

$$= -\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(\lambda_k)Q_1(t,\lambda_k)Q_2(\lambda_k)c_k(g)e^{ikx}.$$

Звідси випливає, що функція $u(t,x),\ (t,x)\in\Omega,$ задовольняє рівняння (6).

Лема 4. *Нехай*

$$u(t,x) = G(t,x) * g, \qquad g\in H'\langle m_k\rangle, \quad (t,x)\in\Omega.$$

Тоді у просторі $H'\langle m_k\rangle$ *справджується граничне співвідношення*

$$\mu\lim_{t\to+0} u(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m}\mu_k \lim_{t\to t_k} B_k u(t,\cdot) = g. \tag{13}$$

Доведення. Для доведення (13) візьмемо довільний елемент

$$\varphi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(\varphi)e^{ikx} \in H\langle m_k\rangle$$

і зазначимо, що внаслідок неперервності вкладення $H\langle m_k\rangle$ в $H'\langle m_k\rangle$ і ортонормованості базису $\left\{e^{ikx}, k\in\mathbb{Z}\right\}$

$$\langle u(t,\cdot),\varphi\rangle = (u(t,\cdot),\varphi)_H = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(u(t,\cdot))c_k(\varphi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} Q_1(t,\lambda_k)Q_2(\lambda_k)c_k(g)c_k(\varphi).$$

Тоді

$$\mu\lim_{t\to+0}\langle u(t,\cdot),\varphi\rangle - \sum_{n=1}^{m}\mu_n\lim_{t\to t_n}\langle B_n u(t,\cdot),\varphi\rangle =$$

$$= \mu\lim_{t\to+0}\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(u(t,\cdot))c_k(\varphi) - \sum_{n=1}^{m}\mu_n\lim_{t\to t_n}\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(B_n u(t,\cdot))c_k(\varphi);$$

при цьому ряд $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(u(t,\cdot))c_k(\varphi)$ збігається рівномірно на $[0,T]$. Цей факт випливає з вигляду коефіцієнтів $c_k(u(t,\cdot)),\ k\in\mathbb{Z},$ і нерівності

$$|c_k(u(t,\cdot))|\cdot|c_k(\varphi)| \le \tilde{c}|c_k(g)|\cdot|c_k(\varphi)|, \qquad t\in[0,T], \quad k\in\mathbb{Z}.$$

Справді, за умовою леми 4, $g\in H'\langle m_k\rangle$, тобто

$$\forall\mu>0 \quad \exists c=c(\mu)>0 \quad \forall k\in\mathbb{Z}\colon \quad |c_k(g)|\le c\rho(\mu|k|).$$

Функція $\varphi \in H\langle m_k \rangle$, тому, внаслідок умови (A),

$$\exists \mu_0 > 0 \quad \exists c_0 > 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}\colon \quad |c_k(\varphi)| \le c_0 \rho^{-1}(\mu_0 |k|).$$

Тоді, поклавши $\mu = \mu_0/2$, внаслідок нерівності опуклості для $\ln \rho$ одержимо оцінку

$$|c_k(g)| \cdot |c_k(\varphi)| \le c_0 c \rho(\mu|k|)\rho^{-1}(\mu_0|k|) = c_0 c e^{\ln \rho(\mu|k|) - \ln \rho(\mu_0|k|)} \le$$

$$\le c_0 c e^{-\ln \rho\left(\frac{\mu_0}{2}|k|\right)} = \tilde{c} \rho^{-1}\left(\frac{\mu_0}{2}|k|\right) \le \tilde{c}|k|^{-1}, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

З останньої нерівності випливає сформульована властивість.

Ряд $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(B_n u(t,\cdot)) c_k(\varphi),\ n \in \{1,\ldots,m\}$, збігається рівномірно на $[t_1, T]$, де $0 < < t_1 < t_2 < \ldots < t_m \le T$. Справді,

$$c_k(B_n u(t,\cdot)) = g_n(\lambda_k) e^{-tf(\lambda_k)} Q_2(\lambda_k) c_k(g), \qquad t \in [t_1, T], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Врахувавши властивості функцій $Q_2,\ g_n,\ n \in \{1,\ldots,m\}$, одержимо співвідношення

$$\left|c_k(B_n u(t,\cdot))\right| \le b g_n(\lambda_k) e^{-tf(\lambda_k)} |c_k(g)| \le b e^{\varepsilon f(\lambda_k)} e^{-t_1 f(\lambda_k)} |c_k(g)|$$

(тут $\varepsilon > 0$ довільно фіксоване). Поклавши $\varepsilon = t_1$, знайдемо

$$|c_k(B_n u(t,\cdot))| \le b|c_k(g)|, \qquad t \in [t_1, T], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Далі, аналогічно попередньому, маємо

$$|c_k(g)| \cdot |c_k(\varphi)| \le \tilde{c}|k|^{-2}, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Отже,

$$\lim_{t\to+0} \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(u(t,\cdot)) c_k(\varphi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(u(0,\cdot)) c_k(\varphi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} Q_2(\lambda_k) c_k(g) c_k(\varphi), \tag{14}$$

$$\lim_{t\to t_n} \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(B_n u(t,\cdot)) c_k(\varphi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(B_n u(t_n,\cdot)) c_k(\varphi) =$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} g_n(\lambda_k) Q_1(t_n, \lambda_k) Q_2(\lambda_k) c_k(g) c_k(\varphi). \tag{15}$$

Враховуючи (14), (15), одержуємо

$$\mu \lim_{t\to+0} \langle u(t,\cdot), \varphi \rangle - \sum_{n=1}^{m} \mu_n \lim_{t\to t_n} \langle B_n u(t,\cdot), \varphi \rangle =$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left[\left(\mu - \sum_{n=1}^{m} \mu_n g_n(\lambda_k) Q_1(t_n, \lambda_k)\right) Q_2(\lambda_k)\right] c_k(g) c_k(\varphi) =$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\mu - \sum_{n=1}^{m} \mu_n g_n(\lambda_k) Q_1(t_n, \lambda_k)}{\mu - \sum_{n=1}^{m} \mu_n g_n(\lambda_k) Q_1(t_n, \lambda_k)} c_k(g) c_k(\varphi) =$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(g) c_k(\varphi) = \langle g, \varphi \rangle,$$

$$g = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(g)e^{ikx} \in H'\langle m_k\rangle, \quad \varphi \in H\langle m_k\rangle,$$

що й потрібно було довести.

Оскільки $u(t,x) = G(t,x)$, якщо $g = \delta \in H'\langle m_k\rangle$, то функція $G(t,x)$ є розв'язком рівняння (6) і з (13) випливає, що функція $G(t,x)$ у просторі $H'\langle m_k\rangle$ задовольняє граничне співвідношення

$$\mu \lim_{t\to+0} G(t,\cdot) - \sum_{n=1}^{m} \mu_n \lim_{t\to t_n} B_n G(t,\cdot) = \delta.$$

Надалі $G(t,x),\ (t,x)\in\Omega,$ називатимемо фундаментальним розв'язком нелокальної багатоточкової за часом задачі для рівняння (6).

Лема 4 дозволяє ставити нелокальну багатоточкову за часом задачу для рівняння (6) так: знайти розв'язок рівняння (6), який в просторі $H'\langle m_k\rangle$ задовольняє граничне співвідношення (13).

Теорема 3. *Нелокальна багатоточкова за часом задача (6), (13) коректно розв'язна, її розв'язок визначається формулою*

$$u(t,x) = G(t,x) * g, \quad (t,x)\in\Omega,$$

$u(t,\cdot) \in H\langle m_k\rangle$ *при кожному* $t\in(0,T]$.

Доведення. Із наведених вище тверджень випливає, що доведення вимагає властивість єдиності розв'язку задачі (6), (13) та його неперервну залежність від граничної умови.

Нехай $u(t,x)$ — розв'язок задачі (6), (13). Оскільки u — розв'язок рівняння (6), то u зображається у вигляді (див. (8)):

$$u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k Q_1(t,\lambda_k)e^{ikx}.$$

Якщо

$$c_k = c_k(g)Q_2(\lambda_k), \qquad g = \sum\nolimits_{k\in\mathbb{Z}} c_k(g)e^{ikx} \in H'\langle m_k\rangle,$$

то за умови $g=0$ маємо $c_k(g) = \left\langle g, e^{-ikx}\right\rangle = 0\ \forall k\in\mathbb{Z}$, тобто $u(t,x)=0,\ (t,x)\in\Omega$.

Доведемо, що розв'язок указаної задачі неперервно залежить від граничної умови. Нехай $\{g, g_n, n\ge 1\}\subset H'\langle m_k\rangle$, причому $g_n\to g$ при $n\to\infty$ у просторі $H'\langle m_k\rangle$. Звідси випливає, що

$$c_k(g_n) = \langle g_n, e^{-ikx}\rangle \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \langle g, e^{-ikx}\rangle = c_k(g)$$

для кожного $k\in\mathbb{Z}$. Крім того, $\{u, u_n, n\ge 1\}\subset H\langle m_k\rangle$, де u_n — розв'язок задачі (6), (13), який відповідає граничному елементу $g_n\in H'\langle m_k\rangle$. Тоді

$$\forall\varphi\in H\langle m_k\rangle:\quad \langle u_n,\varphi\rangle = (u_n,\varphi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(G)c_k(g_n)c_k(\varphi) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow}$$

$$\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(G)c_k(g)c_k(\varphi) = (u,\varphi) = \langle u,\varphi\rangle.$$

Отже, $u_n\to u$ при $n\to\infty$ у просторі $H'\langle m_k\rangle$.

Теорему 3 доведено.

Література

1. В. И. Горбачук, М. Л. Горбачук, *Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений*, Наук. думка, Киев (1984).
2. В. И. Горбачук, М. Л. Горбачук, *Тригонометрические ряды и обобщенные периодические функции*, Докл. АН СССР, **257**, № 4, 799–803 (1981).
3. В. И. Горбачук, *О рядах Фурье периодических ультрараспределений*, Укр. мат. журн., **34**, № 2, 144–150 (1982).
4. В. В. Городецький, *Множини початкових значень гладких розв'язків диференціально-операторних рівнянь параболічного типу*, Рута, Чернівці (1998).
5. А. М. Нахушев, *Уравнения математической биологии*, Высш. школа, Москва (1995).
6. И. А. Белавин, С. П. Капица, С. П. Курдюмов, *Математическая модель глобальных демографических процессов с учетом пространственного распределения*, Журн. вычисл. математики и мат. физики, **38**, № 6, 885 – 902 (1998).
7. А. А. Дезин, *Общие вопросы теории граничных задач*, Наука, Москва (1980).
8. В. В. Городецький, Д. І. Спіжавка, *Багатоточкова задача для еволюційних рівнянь з псевдобесселевими операторами*, Допов. НАН України, № 12, 7 – 12 (2009).
9. А. Х. Мамян, *Общие граничные задачи в слое*, Докл. АН СССР, **267**, № 2, 292 – 293 (1982).
10. В. В. Городецький, О. В. Мартинюк, *Задача Коші та нелокальні задачі для еволюційних рівнянь першого порядку за часовою змінною*, Родовід, Чернівці (2015).
11. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений*, Физматгиз, Москва (1958).

Одержано 19.02.20