

ПРО ОДНУ НЕЛІНІЙНУ МАТЕМАТИЧНУ МОДЕЛЬ, ЩО ОПИСУЄ БОРотьБУ ТА СПІВІСНУВАННЯ НОСІЇВ РІЗНИХ МОВ

В. В. Давидович, Р. М. Черніга

Ін-т математики НАН України

вул. Терещенківська, 3, Київ, 01024, Україна

e-mail: davydovych@imath.kiev.ua

r.m.cherniha@gmail.com

We investigate the known three-component nonlinear reaction-diffusion-type system of equations that simulates the processes of competition and coexistence of different language speakers. A simplified modification of this system is proposed. For this system, we describe the Lie symmetries, construct exact solutions in the form of travelling fronts, and establish their properties. Plots of the travelling fronts are presented and the relevant interpretation describing the language shift in Ukraine during the Soviet times is proposed.

Досліджується відома трикомпонентна нелінійна система рівнянь типу реакції-дифузії, яка моделює процеси боротьби та співіснування носіїв різних мов. Запропоновано спрощену модифікацію цієї системи, для неї описано симетрії Лі, побудовано точні розв'язки у формі біжучих фронтів та встановлено їхні властивості. Побудовано графіки отриманих біжучих фронтів та наведено відповідну інтерпретацію для опису мовного зміщення, яке відбулося в Україні за часів СРСР.

1. Вступ. Вже щонайменше півстоліття є загально прийнятим твердження про те, що велика кількість процесів, які зустрічаються у фізиці, хімії, екології, матеріалознавстві тощо можуть бути адекватно змодельовані лише *нелінійними* диференціальними (інтегрально-диференціальними, функціонально-диференціальними) рівняннями (див. детальнішу дискусію та наведену літературу в монографіях [1, 2]). Протягом останніх десятиліть відбувається також швидке зростання кількості робіт, присвячених моделюванню процесів живої природи, які також є суттєво нелінійними (див., наприклад, монографії [3, 4] та цитовану там літературу).

Порівняно недавно математичне моделювання стало використовуватися у соціальних та гуманітарних науках. Зокрема, протягом останніх двох десятиліть з'явилися роботи, в яких моделюється боротьба та співіснування носіїв різних мов у великих популяціях (спільнотах) людей, за допомогою нелінійних систем диференціальних рівнянь типу реакції-дифузії (РД) [5 – 9]. Оскільки ця проблема добре відома та актуальна для України, то автори поклали в основу цієї праці одну з таких моделей. Ми досліджуємо модель для опису взаємодії трьох популяцій носіїв однієї або двох мов, яка базується на системі, запропонованій у роботі [8]. У цій роботі анонсуємо перші результати, які вказують на перспективність таких досліджень.

Отже, модель ґрунтується на системі трьох нелінійних рівняннях типу РД, яка у випадку одновимірної апроксимації за просторовою змінною має вигляд [8] (в оригінальній роботі модель містить очевидні описки, які тут виправлено)

$$\begin{aligned}
 u_t &= \lambda_1 u_{xx} + a_1 u \left(1 - \frac{u}{K - (v + w)} \right) - c_{31} u w + c_{12} u v, \\
 v_t &= \lambda_2 v_{xx} + a_2 v \left(1 - \frac{v}{K - (u + w)} \right) + (c_{13} + c_{31}) u w - (c_{12} u + c_{32} w) v, \\
 w_t &= \lambda_3 w_{xx} + a_3 w \left(1 - \frac{w}{K - (u + v)} \right) - c_{13} u w + c_{32} v w.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Модель описує взаємодію трьох спільнот мовців. Функції u та w задають густину (кількість осіб у певний момент часу на одиницю простору) носіїв двох різних мов, які спілкуються винятково (або в абсолютній більшості випадків) лише своєю рідною мовою, тобто є монологічними. Функція v задає густину популяції, яка вільно володіє двома мовами і спілкується кожною з них залежно від обставин. Похідні за часом та просторовою змінною у системі (1) мають очевидну інтерпретацію, характерну для рівнянь типу дифузії (еволюція в часі та дифузія в просторі). Другі члени у правих частинах є узагальненнями стандартного логістичного члена, який зустрічається в багатьох моделях для опису біологічних процесів включно зі знаменитим рівнянням Фішера [10, 11]. У цій моделі замість квадратичних нелінійностей у логістичних членах введено дробові та припущено, що загальні ресурси (зокрема й продовольчі) навколишнього середовища характеризуються сталою K , яка обмежує зростання всіх трьох популяцій, тобто припускається, що $u + v + w \leq K$.

Мовне зміщення (the language shift) певної кількості монологічними до білінгвізмів внаслідок потреби спілкування з носіями іншої мови характеризується членами $c_{31} u w$ та $c_{13} u w$. Очевидно, що внаслідок мовного зміщення кількість білінгвізмів зростатиме (при відсутності інших факторів). Члени $c_{12} u v$ і $c_{32} v w$ описують протилежну тенденцію, коли білінгвізм через певні обставини стають монологічними. Наприклад, у випадку суттєвого зниження соціального статусу та зменшення потреби використання певної мови сім'ї білінгвізм вирішують, що їхнім дітям не варто вивчати непрестижну мову (як це часто траплялося в Україні в часи СРСР). Коефіцієнти c_{ij} по суті характеризують віднормовану частоту (або ймовірність) відповідних випадків. Скажімо, якщо w характеризує домінуючу мову (наприклад, російську в Україні в часи СРСР), а u — менш престижну, то зрозуміло, що $c_{12} \ll c_{32}$ і часом можна вважати, що $c_{12} = 0$.

У роботі [8] система (1) застосовувалася для моделювання (зокрема, й прогнозування наслідків) взаємодії носіїв англійської та галійської (Gaelic) мов у Шотландії протягом ХХ ст., коли там відбувався процес англіканізації (anglicization). У роботі не проводилося ґрунтовного математичного дослідження моделі, оскільки було завдання перевірити, чи модель адекватно описує статистичні дані, отримані протягом багатьох переписів населення у Шотландії. Розв'язання моделі методом скінченних елементів із відповідними коефіцієнтами показало дуже добру відповідність між числовими результатами та даними переписів (див. [8], графіки на рис. 3, 4).

У цій роботі ми більше уваги приділяємо математичному дослідженню моделі. Разом з тим отримані результати дуже добре інтерпретуються. У п. 2 проведено аргументоване спрощення системи (1), знайдено симетрії Лі та точні розв'язки спрощеної системи. У п. 3 отримано умови для коефіцієнтів системи та параметри, які гарантують адекватну інтерпретацію одержаних розв'язків, також побудовано графіки розв'язків та наведено відповідну інтерпретацію. В останньому пункті підсумовано здобуті результати та анонсовано подальші дослідження.

2. Симетрії Лі та біжучі фронти. Система РД (1) містить дробові нелінійності і є дуже складною щодо отримання точних розв'язків. З метою її спрощення ми застосовуємо поширений для біологічно вмотивованих моделей підхід, а саме: зведення дробових нелінійностей до квадратичних. Отже, ми припускаємо, що з певною точністю виконуються рівності $K - (v + w) = K_1$, $K - (u + w) = K_2$, $K - (u + v) = K_3$ (тут K_1 , K_2 та K_3 — деякі додатні сталі). Таким чином, система (1) набуває вигляду

$$\begin{aligned} u_t &= \lambda_1 u_{xx} + a_1 u \left(1 - \frac{u}{K_1}\right) - c_{31}uw + c_{12}uv, \\ v_t &= \lambda_2 v_{xx} + a_2 v \left(1 - \frac{v}{K_2}\right) + (c_{13} + c_{31})uw - (c_{12}u + c_{32}w)v, \\ w_t &= \lambda_3 w_{xx} + a_3 w \left(1 - \frac{w}{K_3}\right) - c_{13}uw + c_{32}vw, \end{aligned} \quad (2)$$

в якому присутні лише квадратичні нелінійності. Надалі ми вважатимемо, що коефіцієнти λ_i , a_i та K_i , $i = 1, 2, 3$, є додатними, а всі інші — невід'ємними (тобто деякі можуть бути нулями).

Можна помітити, що масштабними перетвореннями (в симетрійному аналізі такі перетворення називають перетвореннями еквівалентності) систему (2) можна звести до такої самої, але з меншою кількістю довільних коефіцієнтів. Справді, якщо замість невідомих функцій та незалежних змінних ввести нові за формулами

$$u = K_1 u^*, \quad v = K_2 v^*, \quad w = K_3 w^*, \quad t = \frac{1}{a_2} t^*, \quad x = \sqrt{\frac{\lambda_2}{a_2}} x^*,$$

то система (2) після відповідних перепозначень (верхні індекси “зірочки” нижче опущено) зводиться до еквівалентного вигляду

$$\begin{aligned} u_t &= d_1 u_{xx} + \beta_1 u(1 - u) - \alpha_1 uw + \alpha_2 uv, \\ v_t &= v_{xx} + v(1 - v) + (\kappa_1 \alpha_3 + \kappa_2 \alpha_1) uw - (\kappa_2 \alpha_2 u + \kappa_1 \alpha_4 w)v, \\ w_t &= d_3 w_{xx} + \beta_3 w(1 - w) - \alpha_3 uw + \alpha_4 vw. \end{aligned} \quad (3)$$

Очевидно, що система (3) містить на 3 довільні коефіцієнти менше, ніж (2).

Можна помітити, що при $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$ система (3) перетворюється в класичну дифузійну систему Лотки–Вольтера (ДСЛВ), яка описує низку процесів у біології та хімії (див., наприклад, [3, 4, 11] та цитовану там літературу). Проте наведене вище обмеження веде до $c_{13} = c_{31} = 0$, що в свою чергу суперечить первинному формулюванню моделі (див. вище інтерпретацію членів $c_{31}uw$ і $c_{13}uw$). Отже, надалі ми вважатимемо, що $c_{13}^2 + c_{31}^2 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$, тобто система (3) не є еквівалентною до ДСЛВ.

На сьогоднішній час не існує загальної теорії інтегрування нелінійних диференціальних рівнянь із частинними похідними. Найбільш ефективними методами для побудови точних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь типу РД вважається класичний метод Лі та низка його узагальнень (див. детальніше про ці методи в монографіях [2, 12]).

Нами встановлено, що застосування методу Лі до системи (3) приводить лише до тривіального результату, оскільки ця система (при зазначених вище обмеженнях на коефіцієнти)

допускає лише двовимірну алгебру Лі з базисними операторами

$$P_t = \frac{\partial}{\partial t}, \quad P_x = \frac{\partial}{\partial x}. \quad (4)$$

Доведення цього факту аналогічне до наведеного в роботі [13] для випадку трикомпонентної системи рівнянь реакції-дифузії з подібною (але не ідентичною) структурою, тому тут не наводиться.

Важливо зазначити, що на протигагу трикомпонентній ДСЛВ, яка допускає низку нетривіальних симетрій Лі [14], система (3) має значно “біднішу” літвську симетрію. Звичайно, можна припустити, що нелінійна система (3) має нетривіальну умовну симетрію (у сенсі означення [15]) чи Q -умовну (див. означення та приклади таких симетрій для систем рівнянь типу реакції-дифузії в [4] та цитованій там літературі). Проте встановлення цього факту є значно складнішою задачею (необхідно розв’язати відповідну визначальну систему, яка містить нелінійні ДРЧП), і цій проблемі буде присвячено іншу роботу.

Відомо, що за допомогою симетрій Лі (4) можна побудувати лише дві нееквівалентні підстановки (в симетрійному аналізі часто вживається термін “анзац”), які зводять систему (3) до системи звичайних диференціальних рівнянь. Оскільки перша з них веде до розв’язків, які не залежать від просторової змінної x і не є цікавими з точки зору будь-якої інтерпретації (ми розглядаємо популяції людей в обмеженій області), то ми використовуємо другу підстановку, яку породжує лінійна комбінація симетрій Лі $P_t + \mu P_x$.

Отже, отримуємо анзац

$$u = U(\omega), \quad v = V(\omega), \quad w = W(\omega), \quad \omega = x - \mu t, \quad \mu \in \mathbf{R}, \quad (5)$$

де U , V та W — нові невідомі функції від змінної ω . Розв’язки вигляду (5) для систем типу РД часто називають плоско-хвильовими (біжучими хвилями). Для застосувань особливе значення мають плоско-хвильові розв’язки, які є обмеженими та невід’ємними. Для них використовується термін “біжучі фронти” (traveling fronts). Пошуку таких розв’язків присвячено неймовірну кількість робіт. У випадку скалярних рівнянь реакції-дифузії-конвекції більшість відомих біжучих фронтів наведено в монографії [16] (див. також довідник [17]). У випадку нелінійних систем рівнянь типу РД прикладів таких розв’язків набагато менше. Можна стверджувати, що значний прогрес досягнуто лише у випадку пошуку біжучих фронтів для ДСЛВ (див. [4, 18–20] у випадку двокомпонентних систем та [21, 22] для трикомпонентних ДСЛВ).

Отже, наша мета — побудувати біжучі фронти для системи (3). Підставивши анзац (5) в систему (3), отримуємо

$$\begin{aligned} d_1 U'' + \mu U' + \beta_1 U(1 - U) - \alpha_1 U W + \alpha_2 U V &= 0, \\ V'' + \mu V' + V(1 - V) + (\kappa_1 \alpha_3 + \kappa_2 \alpha_1) U W - (\kappa_2 \alpha_2 U + \kappa_1 \alpha_4 W) V &= 0, \\ d_3 W'' + \mu W' + \beta_3 W(1 - W) - \alpha_3 U W + \alpha_4 V W &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Система (6) — це нелінійна система трьох звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) другого порядку. Хоч вона є простішим об’єктом, ніж початкова система РД, говорити про її інтегровність не доводиться, оскільки навіть у випадку двокомпонентної ДСЛВ аналогічна система ЗДР не розв’язується.

Для знаходження її частинних розв'язків — біжучих фронтів — ми спочатку знаходимо стаціонарні точки системи

$$(0, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 0), \\ \left(\frac{\beta_1 + \alpha_2}{\beta_1 + \kappa_2 \alpha_2^2}, \frac{\beta_1(1 - \kappa_2 \alpha_2)}{\beta_1 + \kappa_2 \alpha_2^2}, 0 \right), \left(0, \frac{\beta_3(1 - \kappa_1 \alpha_4)}{\beta_3 + \kappa_1 \alpha_4^2}, \frac{\beta_3 + \alpha_4}{\beta_3 + \kappa_1 \alpha_4^2} \right).$$

Очевидно, що система (3) також має стаціонарні точки вигляду (u_0, v_0, w_0) , де $u_0 v_0 w_0 \neq 0$, проте ми не наводимо цих точок через громіздкість викладок. Зауважимо, що серед наведених вище шести стаціонарних точок суттєво різними є лише чотири, оскільки третя та четверта, п'ята та шоста є попарно еквівалентними, тому що перше й третє рівняння системи (6) мають ідентичну структуру.

Для побудови біжучих фронтів у явному вигляді ми відразу зафіксуємо таку їхню властивість: кожен такий розв'язок з'єднує дві стаціонарні точки при граничному переході $\omega \rightarrow \pm\infty$.

Зупинімося лише на одному (з декількох можливих) випадку побудови розв'язків із зазначеною властивістю, а саме: побудуємо розв'язки, які з'єднують точки $(U_0, V_0, 0) = \left(\frac{\beta_1 + \alpha_2}{\beta_1 + \kappa_2 \alpha_2^2}, \frac{\beta_1(1 - \kappa_2 \alpha_2)}{\beta_1 + \kappa_2 \alpha_2^2}, 0 \right)$ (при $\omega \rightarrow -\infty$) та $(0, 0, 1)$ (при $\omega \rightarrow +\infty$). Цей випадок є цікавим, оскільки числові результати, наведені в [8] для початкової системи (1), вказують на те, що розв'язки такого типу можуть описувати взаємодію популяцій мовців.

Для отримання розв'язків у явному вигляді ми застосовували так званий тангенс-гіперболічний метод. Наскільки нам відомо, цей метод вперше був запропонований в роботі [23] (див. також [24]) і він зводиться до пошуку точного розв'язку у формі скінченного степеневого ряду відносно функції $\tanh \omega$. Отже, відразу шукаємо біжучі fronti у вигляді

$$U = \sigma_1(1 - \tanh \omega)^{n_1}, \quad V = \sigma_2(1 - \tanh \omega)^{n_2}, \quad W = 1 - \sigma_3(1 - \tanh \omega)^{n_3}, \quad (7)$$

де σ_i та n_i — відповідно дійсні та натуральні числа, які необхідно знайти. Оскільки шуканий розв'язок з'єднує стаціонарні точки $(U_0, V_0, 0)$ та $(0, 0, 1)$, то, провівши відповідні обчислення, можна відразу встановити, що

$$\sigma_1 = \frac{\beta_1 + \alpha_2}{2^{n_1} (\beta_1 + \kappa_2 \alpha_2^2)}, \quad \sigma_2 = \frac{\beta_1(1 - \kappa_2 \alpha_2)}{2^{n_2} (\beta_1 + \kappa_2 \alpha_2^2)}, \quad \sigma_3 = \frac{1}{2^{n_3}}. \quad (8)$$

Підставляючи тепер (7) в систему (6) з урахуванням (8) та аналізуючи отримані громіздкі вирази, нам вдалося встановити достатні умови на коефіцієнти n_i , за яких можна знайти біжучі fronti у явному вигляді.

У підсумку після відповідних обчислень отримано точний розв'язок

$$u = \frac{6d_1}{\beta_1} (1 - \tanh(x - \mu t))^2, \\ v = \frac{24d_1 - \beta_1}{2\alpha_2} (1 - \tanh(x - \mu t)), \\ w = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh(x - \mu t) \quad (9)$$

системи (3) при умові, що її коефіцієнти задовольняють обмеження

$$\alpha_1 = 16d_1 - 4\mu + \beta_1, \quad \alpha_3 = \frac{d_3\beta_1}{3d_1}, \quad \kappa_1 = \frac{5 - 2\mu}{\alpha_4}, \quad \kappa_2 = \frac{\beta_1(\alpha_2 + \beta_1 - 24d_1)}{24d_1\alpha_2^2},$$

$$\beta_1 = \frac{2\alpha_2^2(\alpha_4 + (2\mu - 5)d_3)}{(10d_1 - \mu + 2\alpha_2)\alpha_4} + 24d_1 - \alpha_2, \quad \beta_3 = \frac{2(2d_3 - \mu)\alpha_2 + (\beta_1 - 24d_1)\alpha_4}{\alpha_2}.$$
(10)

Ще один точний розв'язок

$$u = \frac{\beta_1 + \alpha_2}{4(\beta_1 + \kappa_2\alpha_2^2)} (1 - \tanh(x - 10t))^2,$$

$$v = \frac{\beta_1(1 - \kappa_2\alpha_2)}{4(\beta_1 + \kappa_2\alpha_2^2)} (1 - \tanh(x - 10t))^2,$$

$$w = 1 - \frac{1}{4} (1 - \tanh(x - 10t))^2$$
(11)

отримується при умові, що коефіцієнти системи (3) задовольняють такі обмеження:

$$d_1 = 1, \quad d_3 = 1, \quad \alpha_1 = \beta_1 - 24,$$

$$\kappa_1 = \frac{24\alpha_2\kappa_2 + 23\beta_1 - (\beta_1 - 24 + 24\alpha_2)\beta_1\kappa_2}{(\alpha_3 - \alpha_4)\beta_1 + (\alpha_3 + \alpha_4\beta_1\kappa_2)\alpha_2},$$

$$\beta_3 = \frac{(\alpha_3 - \alpha_4 - 24)\beta_1 - 24\kappa_2\alpha_2^2 + (\alpha_3 + \alpha_4\beta_1\kappa_2)\alpha_2}{\beta_1 + \kappa_2\alpha_2^2}.$$

Легко помітити, що точний розв'язок (9) є більш загальним, ніж (11), оскільки не фіксує швидкості біжучого фронту μ .

3. Аналіз та інтерпретація отриманих розв'язків. У цьому пункті ми детально досліджуємо біжучий фронт (9). Спочатку дамо відповідь на питання: які обмеження необхідно накласти на додатні коефіцієнти системи $d_1, d_3, \alpha_2, \alpha_4$ та швидкість фронту μ для того, щоб сталі $\alpha_1, \alpha_3, \beta_1, \beta_3, \kappa_1$ та κ_2 (які визначаються з формул (10)) також були додатними? Виявляється, що відповідь на це питання суттєво залежить від знака швидкості μ , тому необхідно дослідити два випадки: а) $\mu < 0$ та б) $\mu > 0$.

У випадку а) з обмежень (10) випливає $\alpha_1 > 0$ та $\kappa_1 > 0$. Отже, нам необхідно розв'язати такі нерівності:

$$\beta_1 > 0, \quad \beta_3 > 0, \quad \kappa_2 > 0.$$
(12)

При цьому ми повинні також враховувати той факт, що всі компоненти розв'язку (9) мають бути невід'ємними (вони характеризують розмір спільнот мовців). Таким чином, отримуємо додаткову нерівність $24d_1 - \beta_1 > 0$, яка випливає з умови $V \geq 0$.

Важливо також зауважити, що обмеження (10) у випадку $\mu < 0$ гарантують, що стаціонарна точка $(0, 0, 1)$ буде стійкою (у цьому легко переконатися, провівши лінеаризацію системи (6) за стандартною методикою), і це означає, що відповідний розв'язок прямуватиме до цієї точки при $t \rightarrow +\infty$.

Детальний аналіз вказаних вище нерівностей показав, що їхній розв'язок веде до великої кількості можливих випадків. Оскільки більшість із них ведуть до громіздких формул, то наведемо лише деякі з них.

Накладемо додаткові обмеження на параметр α_2 , а саме: а1) $\alpha_2 = \frac{2(10d_1 - \mu)}{1 - 2\mu}$ та а2) $\alpha_2 = 24d_1$.

Розглянемо детальніше перший підвипадок. Нерівності $24d_1 - \beta_1 > 0$ та (12) при виконанні обмеження а1) будуть еквівалентними відповідно до нерівностей

$$(10d_1 - \mu) \left(\frac{1}{5 - 2\mu} + \frac{4d_3}{\alpha_4(1 - 2\mu)} \right) > 0, \quad (13)$$

$$(40d_3(2\mu - 5) + 2(25 - 62\mu + 24\mu^2)\alpha_4) d_1 - \mu(4d_3(2\mu - 5) + (2\mu - 1)\alpha_4) > 0, \quad (14)$$

$$4\mu^2 + 2\mu(\alpha_4 - 5) - \alpha_4 > 0, \quad (15)$$

$$d_3(2\mu - 5) + \alpha_4 > 0. \quad (16)$$

Оскільки швидкість $\mu < 0$, то нерівність (13) виконується тотожно, а отже, $24d_1 - \beta_1 > 0$. Легко перевірити, що коефіцієнт при d_1 в нерівності (14) є додатним, якщо виконується нерівність (16). Таким чином, розв'язавши нерівності (14)–(16), отримуємо такі додаткові обмеження на параметри d_1 , d_3 та швидкість фронту μ :

$$d_1 > \frac{\mu(4d_3(2\mu - 5) + (2\mu - 1)\alpha_4)}{(40d_3(2\mu - 5) + 2(25 - 62\mu + 24\mu^2)\alpha_4)}, \quad (17)$$

$$d_3 < \frac{\alpha_4}{5 - 2\mu}, \quad \mu < \frac{1}{4} \left(5 - \alpha_4 - \sqrt{\alpha_4^2 - 6\alpha_4 + 25} \right).$$

Розгляд підвипадку а2) проводиться аналогічно і веде до таких додаткових обмежень:

$$\alpha_2 = 24d_1, \quad d_3 < 1, \quad \mu < \frac{d_3}{2(d_3 - 1)}, \quad (18)$$

$$(5 - 2\mu)d_3 < \alpha_4 < \frac{2}{10d_1 - \mu} (\mu^2 + 2(24d_1d_3 - d_3 - 29d_1)\mu - 4d_1d_3),$$

Виконання нерівностей (17) у випадку а1) та (18) у випадку а2) гарантує, що всі параметри, обчислені за формулами (10), будуть додатними.

У випадку б) отримуємо обмеження на швидкість $0 < \mu < \frac{5}{2}$. Аби уникнути громіздких алгебраїчних обчислень, ми зробимо додаткове припущення $\alpha_2 = \alpha_4 \equiv \alpha$ та введемо позначення

$$F \equiv 10d_1 - \mu + 2\alpha, \quad G \equiv 2\mu d_3 - 5d_3 + \alpha.$$

У нових позначеннях з обмежень (10) отримуємо нерівності

$$FG > 0, \quad \alpha_1 = 40d_1 - 4\mu - \alpha \left(1 - 2 \frac{G}{F} \right) > 0, \quad (19)$$

$$\beta_1 = 24d_1 - \alpha \left(1 - 2 \frac{G}{F} \right) > 0, \quad \beta_3 = 4d_3 - 2\mu - \alpha \left(1 - 2 \frac{G}{F} \right) > 0.$$

Враховуючи умову $\beta_1 < 24d_1$, отримуємо обмеження $\frac{G}{F} < \frac{1}{2}$. Легко переконатися, що $F > 0$ та $G > 0$ (випадок $F < 0$ та $G < 0$ веде до суперечності). Для того щоб задовольнити всі нерівності в (19), покладемо

$$G = \varepsilon \Leftrightarrow \alpha = (5 - 2\mu)d_3 + \varepsilon,$$

де $\varepsilon > 0$ — достатньо мала стала. Остання умова дає змогу записати четверту нерівність із (19) у вигляді

$$d_3 \geq \frac{2\mu + \varepsilon}{2\mu - 1}, \tag{20}$$

де $\mu > \frac{1}{2}$. Тепер для виконання 2-ї та 3-ї нерівностей у (19) достатньо вимагати виконання нерівностей

$$40d_1 > 4\mu + 5d_3 - 2\mu d_3 + \varepsilon, \quad 24d_1 > 5d_3 - 2\mu d_3 + \varepsilon. \tag{21}$$

Отже, можна сформулювати алгоритм, який дозволяє вибирати всі параметри в (10) додатними. Для початку ми фіксуємо швидкість μ з інтервалу $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$ і вибираємо достатньо малий ε , наприклад, $\varepsilon < 1$. На другому кроці ми фіксуємо сталу d_3 , яка задовольняє нерівність (20), та обчислюємо $\alpha = (5 - 2\mu)d_3 + \varepsilon$. Останнім кроком буде вибір достатньо великого коефіцієнта дифузії $d_1 > 0$, що задовольняє нерівності (21).

Зауваження 1. У випадку $\alpha_2 = \alpha_4 \equiv \alpha$ та $d_1 = d_3 \equiv d$ для вибору додатних параметрів у (10) достатньо вимагати виконання обмежень $d \geq \frac{2\mu + \varepsilon}{2\mu - 1}$ та $\alpha = (5 - 2\mu)d + \varepsilon$, де $\varepsilon > 0$, $\mu \in \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

Використавши наведені вище нерівності, ми можемо вибрати відповідним чином параметри та побудувати приклади графіків розв'язку (9).

На рис. 1, 2 зображено точний розв'язок (9) у випадку а) $\mu < 0$ та вказаних параметрах, які задовольняють умови невід'ємності всіх компонент. Три біжучі фронти рухаються справа наліво вздовж осі OX . Цей рух реалістично (не кількісно, але якісно) інтерпретує мовне зміщення, яке відбувалося в Україні протягом останніх двох поколінь існування СРСР, якщо вважати, що крива 1 зображує спільноту україномовних, крива 2 — двомовних, крива 3 — російськомовних. Якщо взяти одновимірну апроксимацію України із заходу ($x = -10.0$) на схід ($x = 2.0$), то момент часу $t = 0.01$ (див. графіки у лівій частині рис. 1) відображає ситуацію початку 50-х років минулого століття. Справді, на крайньому сході України (див. інтервал $x \in [0, 2]$) вже тоді кількість україномовних (крива 1) була дуже мала, з другого боку, була певна частина двомовних (крива 2), тобто громадян, які залежно від ситуації спілкувалися двома мовами. Зрештою була більшість, яка завжди (майже завжди) розмовляла лише російською (крива 3). У той же час, на практично всій території Правобережної та Західної України (див. інтервал $x \in [-10, -2]$) абсолютна більшість спілкувалася українською мовою (крива 1) та була певна частина (перш за все у містах), яка залежно від обставин вживала обидві мови (крива 2). Щодо громадян, які спілкувалися лише російською, то їх була мінімальна кількість. На частині Лівобережжя (див. інтервал $x \in [-2, 0]$) ситуація була найскладнішою, оскільки там співіснували у великій кількості всі три спільноти.

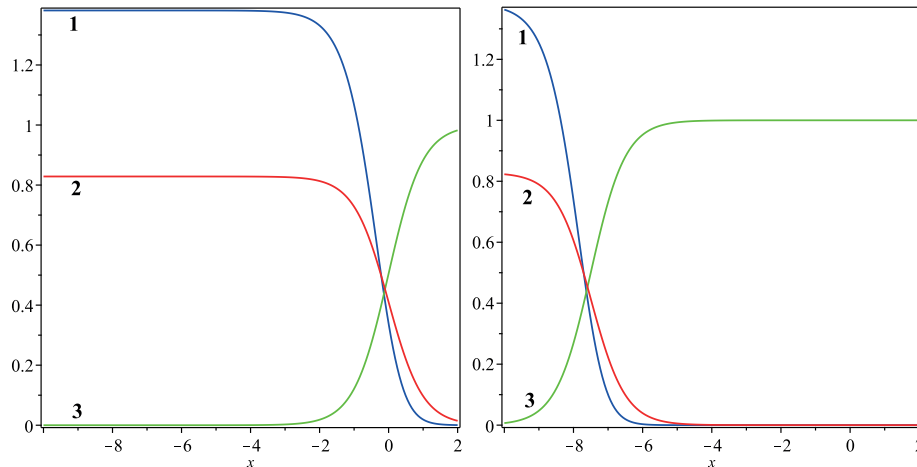


Рис. 1. Графіки кривих, що відповідають функціям $u(t_0, x)$ (крива 1), $v(t_0, x)$ (крива 2) і $w(t_0, x)$ (крива 3) з (9) для $t_0 = 0.01$ (ліворуч) та $t_0 = 7.5$ (праворуч) та параметрів $\mu = -1$, $d_1 = 0.5$, $d_3 = 0.2$, $\alpha_2 = 4$, $\alpha_4 = 2$ (інші параметри визначаються з формул (10)).

Момент часу $t = 7.5$ (див. графіки у правій частині рис. 1) відображає ситуацію наприкінці існування СРСР, тобто початок 1990-х років. На той час на сході України, Лівобережжі та частині Правобережжя повністю домінувала російська мова (крива 3), при цьому залишилася незначна частина населення, яка залежно від обставин могла спілкуватися двома мовами. Популяція суто україномовних там була практично відсутня (крива 1).

Єдиною частиною України, де все ще домінувала спільнота україномовних, але при цьому суттєво зросла спільнота двомовних, залишалася лише Західна Україна. Якби СРСР проіснував ще одне покоління (25 років) і мовна політика не зазнала б суттєвих змін, то згідно з нашим розв'язком на всій території України домінувала б спільнота російськомовних, а дві інші спільноти практично зникли б (такий сценарій впливає з тривимірного графіка на рис. 2).

Наголосимо, що наведена вище інтерпретація дозволяє якісно (але не кількісно) охарактеризувати мовне зміщення в Україні протягом останніх 40 років існування СРСР. Для кількісних показників наведені вище графіки не є придатними, оскільки спочатку необхідно вибрати коректні коефіцієнти в моделі (2) на основі відповідних даних із переписів населення в ті часи, а вже потім аналізувати кількісні наслідки моделі. Це є окремою й складною міждисциплінарною задачею.

4. Висновки. У цій роботі розглянуто нелінійну систему рівнянь РД (3), яка є математичною моделлю опису процесу мовного зміщення (як наслідок домінування носіїв однієї з мов) у країнах (чи на територіях), у яких найбільш поширеними є дві мови (зокрема, Україна є типовим прикладом). Встановлено, що симетрія Лі цієї системи не залежить від значення коефіцієнтів (при вказаних обмеженнях) і містить лише два оператори зсувів по часовій та просторовій змінних. За допомогою цих операторів систему зведено до системи ЗДР, до якої застосовано тангенс-гіперболічний метод. У підсумку знайдено точні розв'язки типу біжучих фронтів, що є новим результатом, оскільки не відомі жодні інші точні розв'язки для цієї системи. Для одного з побудованих розв'язків встановлено достатні умови, за яких усі три компоненти є невід'ємні, та наведено його інтерпретацію. Показано, що

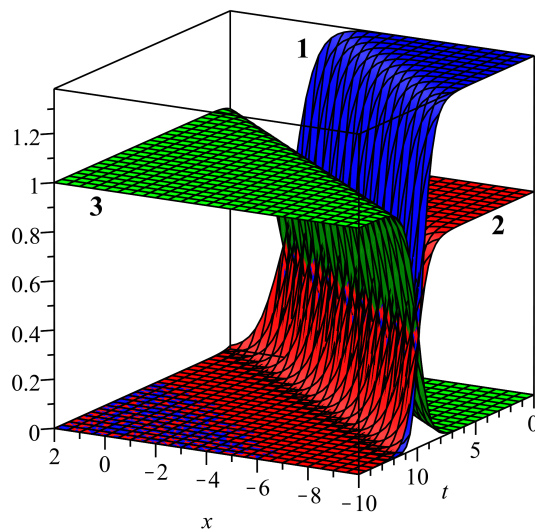


Рис. 2. Графіки функцій $u(t, x)$ (1-ша поверхня), $v(t, x)$ (2-га поверхня) і $w(t, x)$ (3-тя поверхня) з (9) для параметрів $\mu = -1$, $d_1 = 0.5$, $d_3 = 0.2$, $\alpha_2 = 4$, $\alpha_4 = 2$ (інші параметри визначаються з формул (10)).

він якісно описує процес мовного зміщення в Україні за часів СРСР на користь російської мови.

Доречно зауважити, що в роботі [25] (див. також щойно опубліковану статтю [13], в якій побудовано точні розв'язки) запропоновано математичну модель, яка описує цивілізаційний розвиток людства на початкових стадіях, коли мисливці та збирачі поступово перетворювалися у виробників продукції (фермерів). Згадану модель можна отримати з (2) як частинний випадок (додатково необхідно замінити відповідні знаки у коефіцієнтах).

Нелінійна модель (2), як і її більш загальна версія (1), не передбачає зміни тренду еволюції всіх трьох популяцій — носіїв різних (або обох) мов. При розгляді процесів на великих проміжках часу це не є реалістичним, оскільки, наприклад, держава може прийняти нове мовне законодавство, яке буде стимулювати розвиток саме однієї мови. Для врахування таких факторів необхідно відповідним чином узагальнити систему нелінійних рівнянь (2), і цьому буде присвячено окрему роботу.

Цю роботу виконано в рамках теми “Симетрія, суперсиметрія та суперінтегровність рівнянь математичної фізики” (№ держ. реєстрації 0116U003059) у межах бюджетної програми “Підтримка розвитку пріоритетних напрямів наукових досліджень” (КПКВК 6541230).

Література

1. W. F. Ames, *Nonlinear partial differential equations in engineering*, Academic Press, New York (1972).
2. R. Cherniha, M. Serov, O. Pliukhin, *Nonlinear reaction-diffusion-convection equations: Lie and conditional symmetry, exact solutions and their applications*, Chapman and Hall/CRC, New York (2018).
3. J. D. Murray, *Mathematical biology, II: Spatial models and biomedical applications*, Springer, Berlin (2003).
4. R. Cherniha, V. Davydovych, *Nonlinear reaction-diffusion systems — conditional symmetry, exact solutions and their applications in biology*, Lecture Notes in Mathematics, Springer (2017).
5. D. M. Abrams, S. H. Strogatz, *Modelling the dynamics of language death*, *Nature*, **424**, 900 (2003).
6. M. Patriarca, T. Leppänen, *Modeling language competition*, *Phys. A*, **338**, 296–299 (2004).

7. A. Kandler, *Demography and language competition*, *Human Biology*, **81**, 181–211 (2009).
8. A. Kandler, R. Unger, J. Steele, *Language shift, bilingualism and the future of Britain's Celtic languages*, *Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. B, Biol. Sci.*, **365**, 3855–3864 (2010).
9. A. Kandler, R. Unger, *Modeling language shift*, in: *Diffusive Spreading in Nature, Technology and Society*, Springer (2018), pp. 351–373.
10. R. A. Fisher, *The wave of advance of advantageous genes*, *Ann. Eugenics*, **7**, 353–369 (1937).
11. J. D. Murray, *Mathematical biology*, Springer, Berlin (1989).
12. G. W. Bluman, A. F. Cheviakov, S. C. Anco, *Applications of symmetry methods to partial differential equations*, Springer, New York (2010).
13. R. Cherniha, V. Davydovych, *A hunter-gatherer-farmer population model: Lie symmetries, exact solutions and their interpretation*, *European J. Appl. Math.*, **30**, 338–357 (2019).
14. R. Cherniha, V. Davydovych, *Lie and conditional symmetries of the three-component diffusive Lotka–Volterra system*, *J. Phys. A*, **46**, 185–204 (2013).
15. W. Fushchych, W. Shtelen, M. Serov, *Symmetry analysis and exact solutions of equations of nonlinear mathematical physics*, Acad. Publ., Kluwer (1993).
16. B. Gilding, R. Kersner, *Travelling waves in nonlinear diffusion-convection reaction*, Birkhäuser, Basel (2004).
17. A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev, *Handbook of nonlinear partial differential equations, 2-nd ed.*, CRC Press, Boca Raton (2012).
18. M. Rodrigo, M. Mimura, *Exact solutions of a competition-diffusion system*, *Hiroshima Math. J.*, **30**, 257–270 (2000).
19. Р. М. Черніга, В. А. Дутка, *Дифузійна система Лотки–Вольтерра: симетрії Лі, точні та числові розв'язки*, *Укр. мат. журн.*, **56**, № 10, 1395–1404 (2004).
20. L.-C. Hung, *Exact traveling wave solutions for diffusive Lotka–Volterra systems of two competing species*, *Jpn. J. Ind. Appl. Math.*, **29**, 237–251 (2012).
21. C.-C. Chen, L.-C. Hung, M. Mimura, D. Ueyama, *Exact travelling wave solutions of three-species competition-diffusion systems*, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, **17**, 2653–2669 (2012).
22. L.-C. Hung, *Traveling wave solutions of competitive-cooperative Lotka–Volterra systems of three species*, *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, **12**, 3691–3700 (2011).
23. W. Malfliet, W. Hereman, *The tanh method: I. Exact solutions of nonlinear evolution and wave equations*, *Phys. Scripta*, **54**, 563–568 (1996).
24. W. Malfliet, *The tanh method: a tool for solving certain classes of nonlinear evolution and wave equations*, *J. Comput. Appl. Math.*, **164**, 529–541 (2004).
25. K. Aoki, M. Shida, N. Shigesada, *Travelling wave solutions for the spread of farmers into a region occupied by hunter-gatherers*, *Theor. Popul. Biol.*, **50**, 1–17 (1996).

Одержано 26.11.19