

ГРАНИЧНІ СТАНИ БАГАТОКОМПОНЕНТНИХ ДИСКРЕТНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

О. Р. Сатур

Ін-т математики НАН України

вул. Терещенківська, 3, Київ, 01024, Україна

e-mail: oksana@satur.in.ua

We investigate the models of multicomponent discrete dynamic conflict systems with attracting interaction, which are characterized by a positive value called by an attractor index. The existence of equilibrium limiting states of such systems is proved and their description in terms of the attractor index is given. An explicit relationship between the limiting state of the system and the attractor index is established. A series of concrete examples is presented. They illustrate the dynamics of the system for different attractor indices.

Досліджуються моделі багатокомпонентних дискретних динамічних систем конфлікту з притягальною взаємодією, які характеризуються додатною величиною, яку називаємо показником атрактора. Доведено існування рівноважних граничних станів таких систем та дано їх опис в термінах показника атрактора. Встановлено явний взаємозв'язок граничного стану системи та показника атрактора. Наведено ряд конкретних прикладів, що ілюструють динаміку системи при різних показниках атрактора.

1. Вступ. В роботах [1–4] запропоновано побудову динамічних систем конфлікту з відштовхуванням ($\alpha = -1$) та притяганням ($\alpha = +1$) у просторі ймовірнісних мір. У випадку пари мір μ^t, ν^t рівняння динаміки мають вигляд

$$\mu^{t+1} = \frac{1}{z^t} (\mu^t(\theta^t + 1) + \alpha\tau^t), \quad \nu^{t+1} = \frac{1}{z^t} (\nu^t(\theta^t + 1) + \alpha\tau^t),$$

де z^t — нормуючий знаменник, $\theta^t = \theta(\mu^t, \nu^t)$ — додатний функціонал, а τ^t — додатна міра (величини θ^t та τ^t визначені в термінах мір μ^t, ν^t).

В роботах [5, 6] описано поведінку динамічної системи конфлікту з притягальною взаємодією у термінах координат стохастичних векторів \mathbf{p}_i^t для двох ($i = 2$) та трьох ($i = 3$) альтернативних сторін:

$$p_{ij}^{t+1} = \frac{1}{z^t} (p_{ij}^t(\theta^t + 1) + \tau_j^t), \quad j = \overline{1, n}, \quad t = 0, 1, \dots, \quad (1)$$

де τ_j^t дорівнює найменшій координаті серед j -х координат векторів \mathbf{p}_i^t , тобто $\tau_j^t = \min_i \{p_{ij}^t\}$.

У даній роботі досліджується багатокомпонентна динамічна система з притягальною взаємодією, що описує модель поведінки довільної скінченної кількості альтернативних сторін. У роботах [1–4, 7–19] розглянуто моделі динамічних систем, які подібні за побудовою, деякими властивостями або можливим застосуванням. Основним інструментом для побудови є поняття динамічної системи конфлікту, відображення в просторі стохастичних векторів, яке відповідає конфліктній взаємодії (перетворення конфлікту), та показника конфронтації [4]. Показником конфронтації в цій роботі є вектор $\mathcal{T}^t = (\tau_j^t)_{j=1}^n$. Він характеризує “силу” притягальної взаємодії і називається показником атрактора.

Зауважимо, що згідно з рівнянням (1) відстань між векторами \mathbf{p}_i^t , $i \geq 2$, в l_1 -нормі зменшується

$$\|\mathbf{p}_i^{t+1} - \mathbf{p}_k^{t+1}\|_1 < \|\mathbf{p}_i^t - \mathbf{p}_k^t\|_1 = \sum_{l=1}^n |p_{il}^t - p_{kl}^t|, \quad i \neq k, \quad i, k = \overline{1, m}.$$

Тому взаємодію, задану рівняннями (1), називаємо притягальною. В роботі розглянуто модель динамічної системи, поведінка якої залежить від показника атрактора \mathcal{T}^t . Доведено існування нерухомих станів та дано їхній опис у термінах граничних значень вектора $\mathcal{T}^{t=\infty}$. Побудовано декілька варіантів моделі з різними способами задання координат τ_j^t . Встановлено явний взаємозв'язок граничного стану системи та показника атрактора. Математичні результати ілюструються прикладами з комп'ютерними симуляціями.

2. Постановка задачі. Нехай $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$, $n > 1$, — деяка скінченна множина, причому на Ω задано дискретну топологію. Розглянемо множину дискретних ймовірнісних мір $\mu_i \in M_1^+(\Omega)$, $i = \overline{1, m}$, на Ω . Кожну з цих мір μ_i можна ототожити з стохастичним вектором $\mathbf{p}_i = (p_{ij})_{j=1}^n$, якщо покласти

$$p_{ij} = \mu_i(\omega_j), \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Надалі будемо вважати, що всі вектори \mathbf{p}_i не тотожно рівні між собою, тобто існують хоча б два індекси l, k , для яких виконується $\mathbf{p}_l \neq \mathbf{p}_k$.

Для побудови динамічної системи визначимо відображення \ast в просторі стохастичних векторів (перетворення конфлікту) таким чином. Кожному вектору $\mathbf{p}_i = (p_{ij})_{j=1}^n$ ставимо у відповідність вектор $\mathbf{p}_i^1 = (p_{ij}^1)_{j=1}^n$ за правилом, визначеним у термінах координат

$$p_{ij}^1 = \frac{1}{z} (p_{ij}(\theta + 1) + \tau_j),$$

де $\theta = \theta(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_m)$ — довільна обмежена додатна функція, $\mathcal{T} = (\tau_j)_{j=1}^n$ — деякий вектор із невід'ємними координатами (показник атрактора), а z — нормуючий знаменник.

Це відображення генерує багатокomпонентну динамічну систему конфлікту з траєкторіями

$$\{\mathbf{p}_1^t, \mathbf{p}_2^t, \dots, \mathbf{p}_m^t\} \xrightarrow{\ast, t} \{\mathbf{p}_1^{t+1}, \mathbf{p}_2^{t+1}, \dots, \mathbf{p}_m^{t+1}\}, \quad \mathbf{p}_i^{t=0} = \mathbf{p}_i, \quad t = 0, 1, \dots, \quad (2)$$

де координати кожного вектора $\mathbf{p}_i^t = (p_{ij}^t)_{j=1}^n$ змінюються згідно з рівняннями

$$p_{ij}^{t+1} = \frac{1}{z^t} (p_{ij}^t(\theta^t + 1) + \tau_j^t), \quad t = 0, 1, \dots, \quad (3)$$

$$\theta^t = \theta(\mathbf{p}_1^t, \mathbf{p}_2^t, \dots, \mathbf{p}_m^t), \quad z^t = 1 + \theta^t + W^t, \quad W^t = \sum_{j=1}^n \tau_j^t > 0.$$

Задача полягає в дослідженні поведінки траєкторій динамічної системи (2) залежно від способу задання τ_j^t , зокрема у випадку явної залежності координат τ_j^t від координат усіх векторів \mathbf{p}_i^t .

3. Результати. Доведемо допоміжні твердження, які необхідні для формулювання та доведення основних результатів.

Твердження 1. Для всіх $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, якщо $p_{ij} \geq p_{kj}$, то

$$p_{ij}^t \geq p_{kj}^t, \quad t = 0, 1, \dots$$

Доведення. Припустимо $p_{ij} > p_{kj}$. Елементарними перетвореннями маємо

$$\frac{p_{ij}(\theta + 1) + \tau_j}{z} > \frac{p_{kj}(\theta + 1) + \tau_j}{z},$$

тобто $p_{ij}^1 > p_{kj}^1$. За індукцією отримуємо

$$p_{ij}^t > p_{kj}^t, \quad t = 0, 1, \dots$$

Отже, знак різниці j -х координат різних векторів $\text{sign}(p_{ij}^t - p_{kj}^t)$, $i \neq k$, не змінюється.

Твердження 2. Припустимо, що існують граничні значення $\theta^\infty > 0$ і $W^\infty > 0$. Тоді

$$\|\mathbf{p}_i^t - \mathbf{p}_k^t\|_1 \rightarrow 0 \quad \forall i, k = \overline{1, m}. \quad (4)$$

Доведення. Позначимо $d_{ik,j}^t = |p_{ij}^t - p_{kj}^t|$. Нехай $p_{ij}^t \neq p_{kj}^t$, тоді

$$d_{ik,j}^{t+1} = |p_{ij}^{t+1} - p_{kj}^{t+1}| = |p_{ij}^t - p_{kj}^t| \frac{\theta^t + 1}{z^t} = d_{ik,j}^t \frac{\theta^t + 1}{\theta^t + 1 + W^t},$$

тобто

$$d_{ik,j}^{t+1} = d_{ik,j}^t k^t, \quad k^t = \frac{\theta^t + 1}{\theta^t + 1 + W^t}. \quad (5)$$

Тому

$$d_{ik,j}^{t+1} = d_j^t k^t = d_{ik,j}^{t-1} k^{t-1} k^t = \dots = d_{ik,j} k k^1 \dots k^t, \quad d_{ik,j} = d_{ik,j}^{t=0}.$$

Оскільки $W^t > 0$ для довільного t , то $0 < k^t < 1$. Звідси випливає

$$0 < d_{ik,j}^t < \dots < d_{ik,j}^1 < d_{ik,j} < 1;$$

це означає, що послідовність $(d_{ik,j}^t)_{t=0}^\infty$ є обмеженою та монотонною, а тому існує

$$d_{ik,j}^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} d_{ik,j}^t.$$

Припустимо $d_{ik,j}^\infty \neq 0$. З рівності (5) одержуємо

$$d_{ik,j}^\infty = d_{ik,j}^\infty k^\infty, \quad k^\infty = \frac{\theta^\infty + 1}{\theta^\infty + 1 + W^\infty}.$$

Зрозуміло, що $k^\infty \neq 1$, оскільки $\theta^\infty, W^\infty > 0$. Тому ця рівність виконується лише у випадку $d_j^\infty = 0$. Тим самим (4) доведено.

Введемо позначення $w_j^t := \frac{\tau_j^t}{W^t}$. Тоді вектор $\mathbf{w}^t = (w_j^t)_{j=1}^n$ є стохастичним. Якщо послідовності $(w_j^t)_{t=1}^\infty$, $j = \overline{1, n}$, монотонні, то існує $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{w}^t = \mathbf{w}^\infty$. Сформулюємо основний результат даної роботи.

Теорема 1. Нехай всі координати стохастичного вектора \mathbf{w}^t є монотонними (зростають або спадають незалежно одна від одної). Тоді кожна траєкторія динамічної системи (2) з початковим станом $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_m\}$ збігається до нерухомого граничного стану $\{\mathbf{p}_1^\infty, \mathbf{p}_2^\infty, \dots, \mathbf{p}_m^\infty\}$:

$$\mathbf{p}_i^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{p}_i^t \quad \forall i = \overline{1, m}.$$

При цьому всі граничні вектори \mathbf{p}_i^∞ співпадають із вектором \mathbf{w}^∞ , тобто

$$p_{ij}^\infty = \frac{\tau_j^\infty}{W^\infty} \quad \forall i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Доведення. Доведемо існування граничних векторів \mathbf{p}_i^∞ . Для деякого фіксованого $j = \overline{1, n}$ маємо

$$p_{ij}^{t+1} - p_{ij}^t = \frac{p_{ij}^t(\theta^t + 1) + \tau_j^t}{z^t} - p_{ij}^t = \frac{W^t}{z^t} \left(\frac{\tau_j^t}{W^t} - p_{ij}^t \right). \quad (6)$$

Далі розглянемо можливі випадки.

1. Припустимо, що координата w_j^t є монотонно зростаючою.

а) Нехай $p_{ij} < \frac{\tau_j}{W}$. Тоді згідно з (6) $p_{ij}^1 > p_{ij}$, оскільки $\frac{W}{z} = \frac{W}{1 + \theta + W} < 1$, причому координата p_{ij} зростає на величину, яка не перевищує $\frac{\tau_j}{W} - p_{ij}$, а це забезпечує виконання нерівності $p_{ij}^1 < \frac{\tau_j^1}{W^1}$. Далі за індукцією отримуємо $p_{ij}^t < \frac{\tau_j^t}{W^t}$ для довільного t . Це означає монотонне зростання координати p_{ij}^t за часом t . А тому існує

$$p_{ij}^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}^t.$$

Оскільки $p_{ij}^{t+1} - p_{ij}^t \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, то $p_{ij}^\infty = \frac{\tau_j^\infty}{W^\infty}$.

б) Нехай $p_{ij} > \frac{\tau_j}{W}$, тоді на наступному кроці можливі випадки

$$p_{ij}^1 > \frac{\tau_j^1}{W^1} \quad \text{або} \quad p_{ij}^1 < \frac{\tau_j^1}{W^1}.$$

Якщо нерівність $p_{ij}^t < \frac{\tau_j^t}{W^t}$ справедлива для довільного моменту часу t , то в такому випадку координата p_{ij}^t спадає, причому існує

$$p_{ij}^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}^t = \frac{\tau_j^\infty}{W^\infty}.$$

Якщо знак попередньої нерівності змінюється на деякому кроці t' , тобто $p_{ij}^{t'} < \frac{\tau_j^{t'}}{W^{t'}}$, то отримуємо випадок, який описано в п. 1а).

2. Аналогічні викладки справедливі для випадку монотонно спадної координати w_j^t . Якщо $p_{ij} < \frac{\tau_j}{W}$, то координата p_{ij} спадає на величину, меншу за $\frac{\tau_j}{W} - p_{ij}$, а це забезпечує

виконання нерівностей $p_{ij}^t < \frac{\tau_j^t}{W^t}$ та $p_{ij}^{t+1} < p_{ij}^t$ для довільного t . При $p_{ij} > \frac{\tau_j}{W}$ на наступному кроці знак нерівності може помінятися, тоді отримуємо описаний вище випадок. Якщо знак цієї нерівності не змінюється, то координата p_{ij}^t зростає і прямує до $\frac{\tau_j^\infty}{W^\infty}$ при $t \rightarrow \infty$.

Із доведеного вище випливає існування граничних векторів $\mathbf{p}_i = (p_{ij})_{j=1}^n$:

$$\mathbf{p}_i^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{p}_i^t.$$

Отже, всі граничні вектори $\mathbf{p}_i^\infty = (p_{ij}^\infty)_{j=1}^n$ рівні між собою та співпадають із вектором \mathbf{w}^∞ .

Далі розглянемо поведінку динамічної системи (2) з показником атрактора \mathcal{T}^t , координати якого задані явно за допомогою координат векторів \mathbf{p}_i^t . Означимо координати τ_j^t одним із способів:

1) як мінімальне значення j -х координат векторів \mathbf{p}_i^t :

$$\tau_j^t := \tau_{j,\min}^t = \min_i \{p_{ij}^t\}; \quad (7)$$

2) як максимальне значення j -х координат векторів \mathbf{p}_i^t :

$$\tau_j^t := \tau_{j,\max}^t = \max_i \{p_{ij}^t\}; \quad (8)$$

3) як середнє значення j -х координат векторів \mathbf{p}_i^t :

$$\tau_j^t := \bar{\tau}_j^t = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n p_{ij}^t; \quad (9)$$

4) всі координати вектора \mathcal{T}^t є однаковими (задані однаковою функцією від t)

$$\tau_{j_1}^t = \tau_{j_2}^t > 0, \quad j_1, j_2 = \overline{1, n}. \quad (10)$$

Твердження 3. Нехай координати показника атрактора \mathcal{T}^t задано рівністю (7) або (8). Тоді послідовність $(\tau_j^t)_{t=0}^\infty$ є монотонною, причому відношення $\frac{\tau_j^t}{W^t}$ не залежить від часу t :

$$\frac{\tau_j}{W} = \frac{\tau_j^t}{W^t}. \quad (11)$$

Доведення. Якщо координати τ_j^t задано рівністю (7) або (8), то τ_j^t співпадає з j -ю координатою деякого вектора \mathbf{p}_i^t . Звідси випливає

$$\tau_j^{t+1} = \tau_j^t \frac{\theta^t + 2}{\theta^t + 1 + W^t}. \quad (12)$$

Якщо $\tau_j^t = \tau_{j,\min}^t$, то $W^t \leq 1$ і $\tau_j^{t+1} \geq \tau_j^t$. Тоді за індукцією маємо монотонне зростання послідовності $(\tau_j^t)_{t=0}^\infty$.

Якщо $\tau_j^t = \tau_{j,\max}^t$, то $W^t \geq 1$. Це означає, що $\tau_j^{t+1} \leq \tau_j^t$. Звідси за індукцією випливає, що послідовність $(\tau_j^t)_{t=0}^\infty$ є монотонно спадною.

Безпосередньо встановлюємо, що для всіх координат τ_j^t , $j = \overline{1, n}$, виконуються співвідношення

$$\frac{\tau_j^{t+1}}{\tau_i^{t+1}} = \frac{\tau_j^t \frac{\theta^t + 2}{\theta^t + 1 + W^t}}{\tau_i^t \frac{\theta^t + 2}{\theta^t + 1 + W^t}} = \frac{\tau_j^t}{\tau_i^t} = \dots = \frac{\tau_j^t}{\tau_i^t} = \frac{\tau_j}{\tau_i}.$$

Тоді

$$\frac{\tau_j^t}{W^t} = \frac{\tau_j^t}{\tau_1^t + \dots + \tau_j^t + \dots + \tau_n^t} = \frac{1}{\frac{\tau_1^t}{\tau_j^t} + \dots + 1 + \dots + \frac{\tau_n^t}{\tau_j^t}} = \frac{1}{\frac{\tau_1}{\tau_j} + \dots + 1 + \dots + \frac{\tau_n}{\tau_j}} = \frac{\tau_j}{W}.$$

Отже, для довільного $t = 0, 1, \dots$ справедлива рівність (11).

Для динамічної системи (2) з показником атрактора, координати якого задані вище явною залежністю від координат векторів \mathbf{p}_i^t , справедлива така теорема.

Теорема 2. Нехай координати показника атрактора \mathcal{T}^t задані однією з рівностей (7)–(10). Тоді кожна траєкторія динамічної системи (2) з початковим станом $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_m\}$ збігається до нерухомого граничного стану $\{\mathbf{p}_1^\infty, \mathbf{p}_2^\infty, \dots, \mathbf{p}_m^\infty\}$:

$$\mathbf{p}_i^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{p}_i^t \quad \forall i = \overline{1, m}.$$

При цьому всі граничні вектори \mathbf{p}_i^∞ співпадають з початковим вектором \mathbf{w} , тобто

$$p_{ij}^\infty = \frac{\tau_j}{W} \quad \forall i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Граничний стан $\{\mathbf{p}_1^\infty, \mathbf{p}_2^\infty, \dots, \mathbf{p}_m^\infty\}$ є стійким тільки у випадку, коли координати показника атрактора задано рівністю (10), тобто коли всі граничні координати дорівнюють $d \frac{1}{n}$.

У всіх інших випадках граничний стан є нестійким.

Доведення. 1) Нехай координати показника атрактора \mathcal{T}^t задано рівністю (7) або (8). Зі стохастичності векторів \mathbf{p}_i^t випливає, що для всіх $t = 0, 1, \dots$ координати показника атрактора є обмеженими, тобто $0 \leq \tau_j^t \leq 1$. Враховуючи твердження 3, отримуємо існування границь

$$\tau_j^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \tau_j^t, \quad j = \overline{1, n},$$

а це свідчить про існування граничного вектора \mathbf{w}^∞ .

Враховуючи теорему 1 та умову (12), маємо

$$p_{ij}^\infty = \frac{\tau_j}{W}$$

для всіх $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

2) Якщо координати показника атрактора \mathcal{T}^t задано рівністю (9), то $W^t = 1$. Легко показати, що для довільного t

$$\bar{\tau}_j^{t+1} = \bar{\tau}_j^t = \dots = \bar{\tau}_j = \text{const},$$

а тому $w_j^\infty = \bar{\tau}_j$. За теоремою 1 це означає, що $p_{ij}^\infty = \bar{\tau}_j$.

3) У випадку рівності всіх координат τ_j^t рівняння (3) набувають вигляду

$$p_{ij}^{t+1} = \frac{p_{ij}^t(\theta^t + 1) + \tau^t}{\theta^t + 1 + n\tau^t}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \quad t = 0, 1, \dots$$

Тоді всі координати вектора \mathbf{w} дорівнюють $\frac{1}{n}$, причому вектор \mathbf{w}^t не залежать від часу t , тобто $w_i^t = \frac{1}{n}$ для довільного t , а тому $w_i^\infty = \frac{\tau}{W} = \frac{1}{n}$. У такому випадку виконується теорема 1, причому $p_{ij}^\infty = \frac{\tau}{W} = \frac{1}{n}$.

Якщо τ_i^t задано рівностями (7)–(9), то очевидно, що для довільної точки з ε -околу граничного стану $\{\mathbf{p}_1^\infty, \mathbf{p}_2^\infty, \dots, \mathbf{p}_m^\infty\}$ відношення $\frac{\tau_j}{W}$ є іншим. Тоді згідно з доведеним вище відповідний граничний стан буде також іншим. Це доводить нестійкість граничного стану $\{\mathbf{p}_1^\infty, \mathbf{p}_2^\infty, \dots, \mathbf{p}_m^\infty\}$ у такому випадку.

Якщо τ_i^t задано рівністю (10), то відношення $\frac{\tau_j}{W}$ є однаковим для будь-яких початкових станів. Це забезпечує стійкість граничного стану $\{\mathbf{p}_1^\infty, \mathbf{p}_2^\infty, \dots, \mathbf{p}_m^\infty\}$.

Зауваження 1. Теорема 2 також справедлива у випадку, коли координати показника атрактора \mathcal{T}^t задані таким чином:

1) як довільна лінійна комбінація j -х координат векторів \mathbf{p}_i^t :

$$\tau_j^t = \sum_{i=1}^n \alpha_i p_{ij}^t, \quad \alpha_i = \text{const} > 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad t = 0, 1, \dots; \quad (13)$$

2) як середнє арифметичне максимального та мінімального значень j -х координат векторів \mathbf{p}_i^t :

$$\tau_j^t := \frac{1}{2}(\tau_{j,\max}^t + \tau_{j,\min}^t); \quad (14)$$

3) як лінійна комбінація максимального та мінімального значень j -х координат векторів \mathbf{p}_i^t :

$$\tau_j^t = \alpha \tau_{j,\min}^t + \beta \tau_{j,\max}^t, \quad \alpha, \beta = \text{const} > 0, \quad t = 0, 1, \dots; \quad (15)$$

4) за допомогою додатних сталих

$$\tau_j^t := b_j^t, \quad b_j^t = \text{const} > 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (16)$$

де динаміка зміни цих сталих задається рівняннями

$$b_j^{t+1} = \frac{b_j^t}{z^t}(\theta + 2).$$

Тоді $W^t := \sum_{j=1}^n b_j^t$, причому, якщо $W^t = 1$, то відповідні сталі не залежать від часу.

4. Приклади. Нехай задано невід'ємну функцію $f_i(x)$, де $x \in [a; b]$. Задамо вектор \mathbf{p}_i за допомогою значень цієї функції, а саме: розіб'ємо відрізок $[a; b]$ на n частин $a = x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$ і визначимо координати вектора \mathbf{p}_i :

$$p_{ik} = \frac{f_i(x_k)}{D_{1,i}},$$

де $D_{1,i} = \sum_{k=1}^n f_i(x_k)$.

На рис. 1.1), 2.1) зображено початкові стани $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4\}$ та $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$, які задані функціями $f_i(x)$, $i = \overline{1, 4}$, $x \in [0; 6]$, та $f_i(x)$, $i = \overline{1, 3}$, $x \in [-5; 5]$, відповідно. На рис. 1.2)–1.6) та 2.2)–2.6) зображено граничний стан, одержаний у результаті динаміки, заданої рівняннями (3) залежно від способу задання показника атрактора τ_j^t .

На рис. 3.1)–5.1) початкові вектори \mathbf{p}_i утворені аналогічним способом, але за допомогою функції двох змінних $f_i(x, y)$, які набувають лише невід'ємних значень, а координати цих векторів дорівнюють

$$p_{ik} = \frac{f_i(x_{k'}, y_{k''})}{D_{2,i}},$$

де $D_{2,i} = \sum_{k'=1}^n \sum_{k''=1}^n f_i(x_{k'}, y_{k''})$, а $(x, y) \in [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$.

На рис. 3–5 зображено проекцію значень координат векторів \mathbf{p}_i на деяку площину, обмежену прямими $a_1 \leq x \leq b_1$, $a_2 \leq y \leq b_2$. Причому, чим інтенсивніший колір (червоний, синій, зелений чи білий), тим більше значення координат, а чорний колір відповідає нульовим значенням координат. Граничний стан системи ілюструється рисунками 3.2)–3.6), 4.2)–4.6) та 5.2)–5.6) для показника атрактора, визначеного формулами (7)–(9) у попередньому пункті.

Комп'ютерні приклади демонструють виконання теорем (1), (2) для конкретних моделей динамічних системи, еволюція яких за часом t задається рівняннями (3) у термінах координат p_{ij}^t стохастичних векторів \mathbf{p}_i^t . Рис. 1–5 ілюструють залежність граничного стану динамічної системи від способу задання показника атрактора. У більшості випадків незначна зміна початкового вектора \mathcal{T} істотно впливає на граничний стан системи, оскільки змінюється відношення $\frac{\tau_j^t}{W}$ і тим самим змінюються граничні координати p_{ij}^∞ векторів \mathbf{p}_i .

Такі моделі динамічних систем можуть описувати динаміку реальних процесів. Наприклад, показник атрактора може описувати реальний зовнішній вплив на деяку систему (наприклад, інформаційний вплив на суспільство). Задаючи величину показника атрактора, можна контролювати або описувати поведінку системи, яка піддається такому впливу.

5. Висновки. У цій роботі побудовано модель багатокомпонентної динамічної системи, яка визначається показником атрактора \mathcal{T}^t (нестохастичним вектором із додатними координатами), доведено існування граничного стану такої системи та дано його опис у термінах граничного значення показника атрактора. Також розглянуто декілька моделей динамічних систем із різними способами задання координат τ_j^t , які є визначальними для системи. Якщо τ_j^t задано рівностями (7)–(9), (13)–(16), то граничний стан залежить лише від початкових значень $\frac{\tau_j^t}{W}$, $j = \overline{1, n}$. Модель є змістовною, якщо τ_j^t набуває довільного додатного значення, що не залежить від часу t , тобто $\tau_j^t = \text{const} > 0$ для всіх $t = 0, 1, \dots$. В усіх таких випадках граничний стан є нестійким та дорівнює $\{\mathbf{w}, \mathbf{w}, \dots, \mathbf{w}\}$. У випадку (відмінного від нуля) показника атрактора, що не залежить від індексу координат, тобто

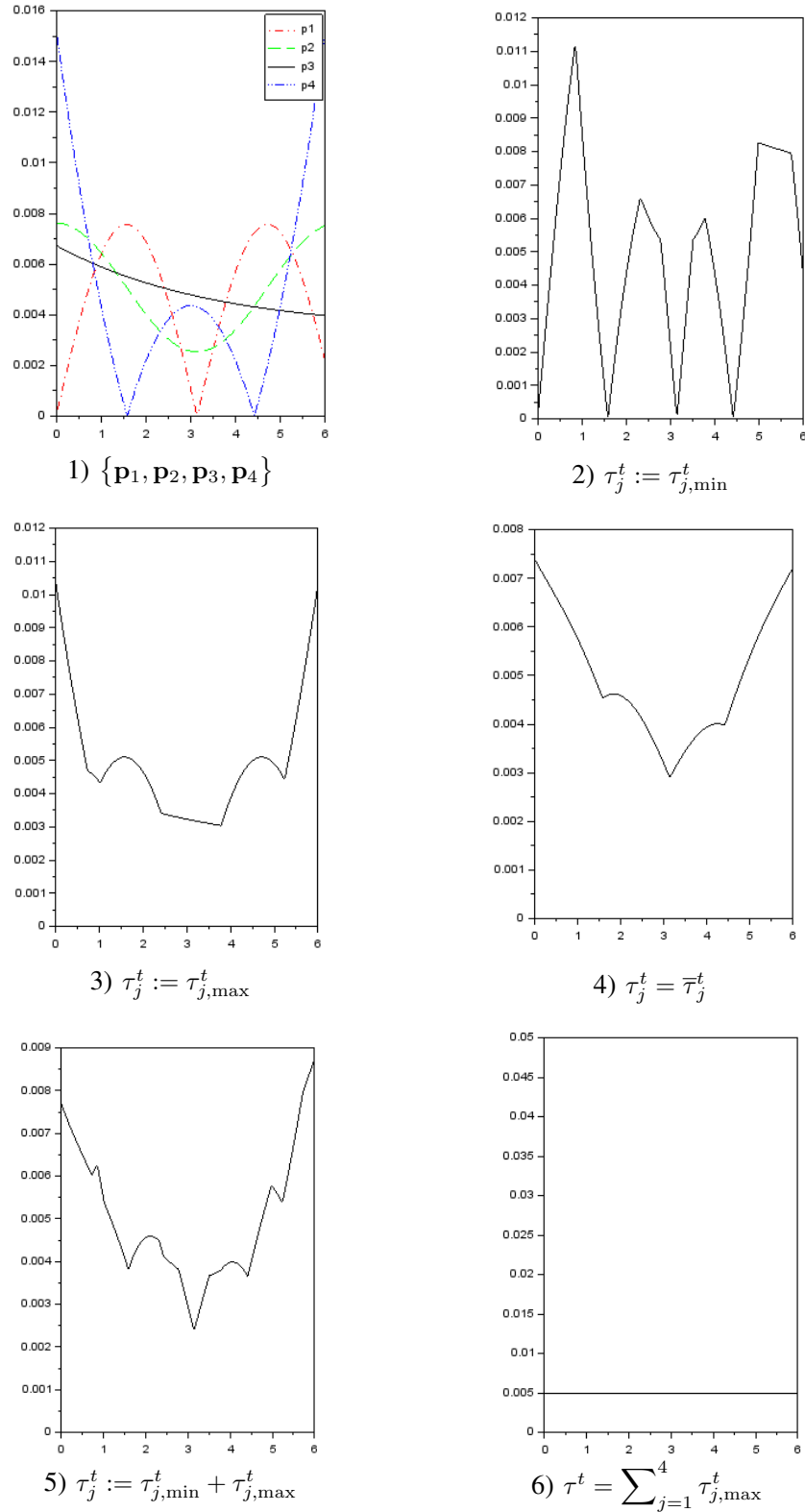
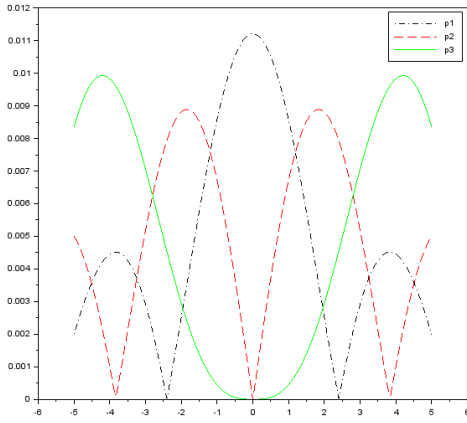
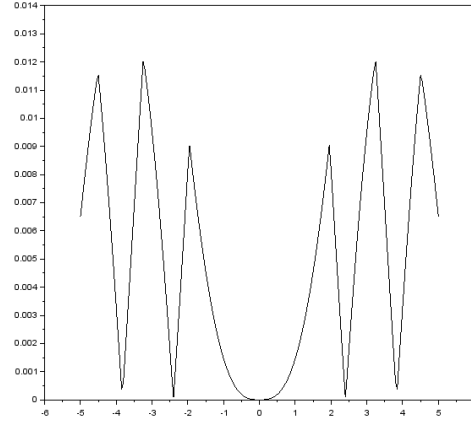


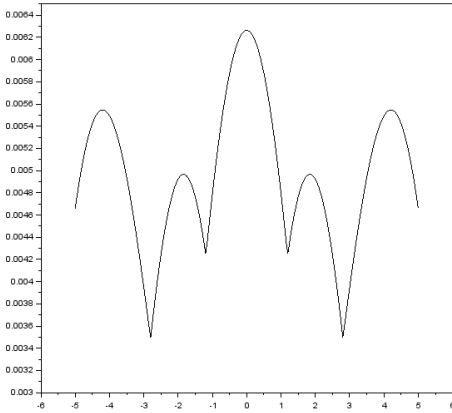
Рис. 1. $m = 4, n = 200$, 1) $f_1(x) = 3|\sin(x)|, f_2(x) = \cos(x) + 2, f_3(x) = (\frac{3}{4})^x + 1, f_4(x) = -(x - 3)^2 + 2$ — функції, що задають початковий стан $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$; 2)–6) граничні стани $\{p_1^\infty, p_2^\infty, p_3^\infty, p_4^\infty\}$ з показниками атратора τ_j^t , заданими формулами (7)–(10) та (15).



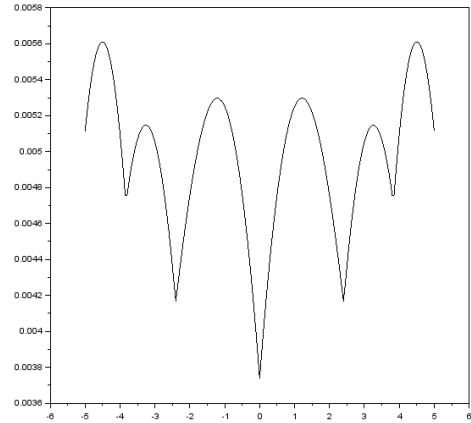
1) $\{p_1, p_2, p_3\}$



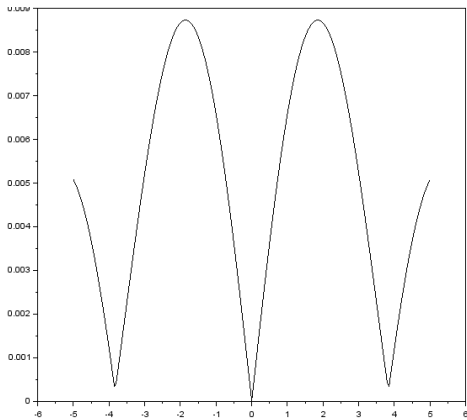
2) $\tau_j^t := \tau_{j,min}^t$



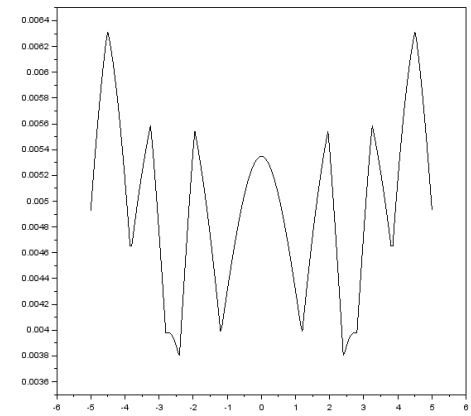
3) $\tau_j^t := \tau_{j,max}^t$



4) $\tau_j^t = \bar{\tau}_j^t$



5) $\tau_j^t := 0.2p_{1n}^t + 500p_{2n}^t + 12p_{3n}^t$



6) $\tau_j^t := \frac{1}{2}(\tau_{j,min}^t + \tau_{j,max}^t)$

Рис. 2. $m = 3, n = 200$, 1) початковий стан $\{p_1, p_2, p_3\}$ заданий модулем функції Бесселя першого роду, тобто $f_i = |J_\alpha(x)|$, де $J_\alpha(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m + \alpha + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m + \alpha}$ для $\alpha = 0, 1, 2$ відповідно, 2)–6) граничні стани $\{p_1^\infty, p_2^\infty, p_3^\infty\}$ з показниками аттрактора τ_j^t , заданими формулами (7)–(9), (13) та (14).

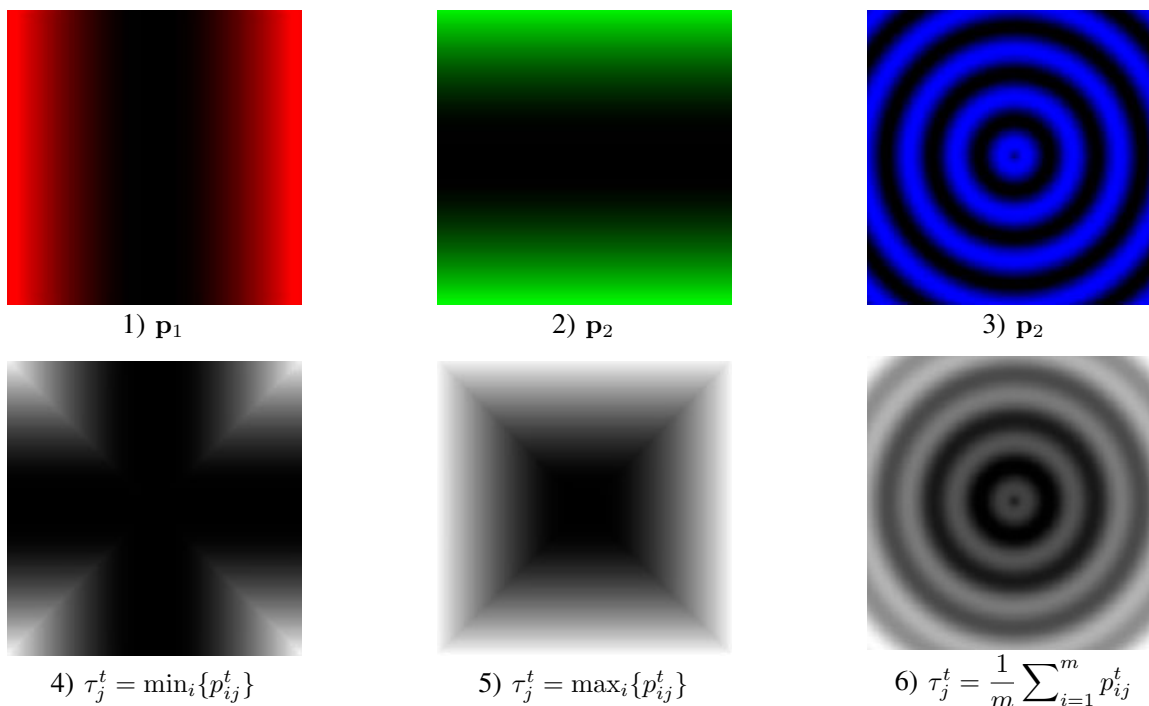


Рис. 3. 1)–3) Проекції початкових векторів \mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_2 , \mathbf{p}_3 на площину $S_1 = [-20; 20] \times [-20; 20]$, утворені за допомогою функцій $f_1(x, y) = y^2$, $f_2(x, y) = x^2$, $f_3(x, y) = 1 + \sin \sqrt{x^2 + y^2}$, де $-20 \leq x \leq 20$, $-20 \leq y \leq 20$; 4)–6) проекція граничних векторів $\mathbf{p}_1^\infty = \mathbf{p}_2^\infty = \mathbf{p}_3^\infty = \mathbf{p}^\infty$ на площину S_1 при мінімальному (7), максимальному (8) та середньому (9) значеннях τ_i^t відповідно.

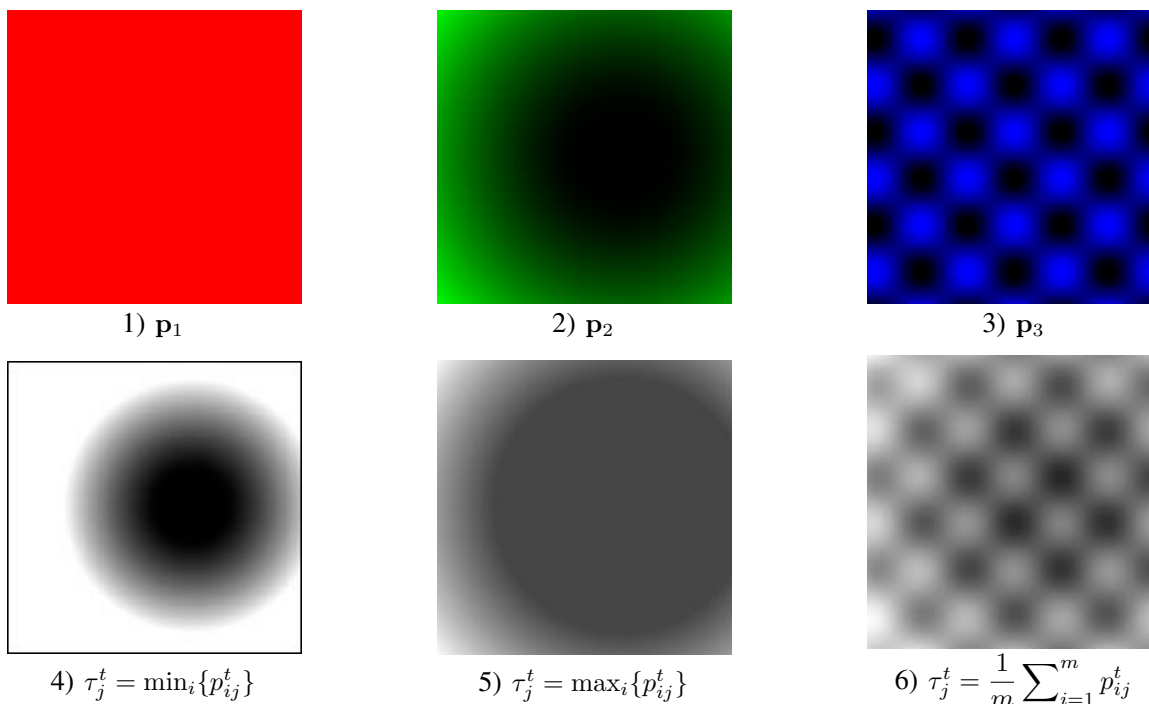


Рис. 4. 1)–3) Проекції початкових векторів \mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_2 , \mathbf{p}_3 на площину $S_1 = [-20; 20] \times [-20; 20]$, утворені за допомогою функцій $f_1(x, y) = 1$, $f_2(x, y) = |5 - (y - 5)^2 - x^2|$, $f_3(x, y) = 1 - \cos \frac{y}{2} \sin \frac{x}{2}$, де $-20 \leq x \leq 20$, $-20 \leq y \leq 20$; 4)–6) проекція граничних векторів $\mathbf{p}_1^\infty = \mathbf{p}_2^\infty = \mathbf{p}_3^\infty = \mathbf{p}^\infty$ на площину S_1 при мінімальному (7), максимальному (8) та середньому (9) значеннях τ_i^t відповідно.

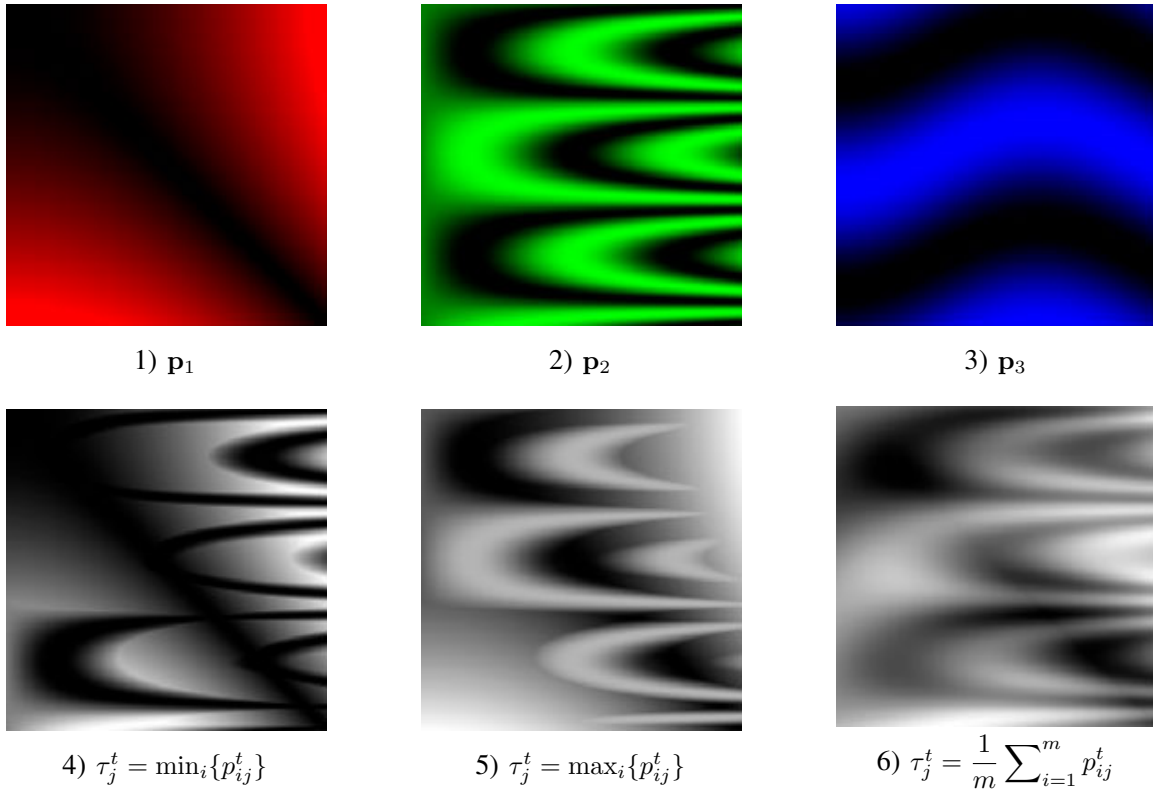


Рис. 5. 1)–3) Проекції початкових векторів \mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_2 , \mathbf{p}_3 на площину $S_2 = [0; 10] \times [0; 10]$, утворені за допомогою функцій $f_1(x, y) = |y^2 - x^2|$, $f_2(x, y) = 1 - \sin(y \sin(x))$, $f_3(x, y) = 1 - \sin\left(x - \cos\left(\frac{y}{2}\right)\right)$, де $0 \leq x \leq 10$, $0 \leq y \leq 10$; 4)–6) проекції граничних векторів $\mathbf{p}_1^\infty = \mathbf{p}_2^\infty = \mathbf{p}_3^\infty = \mathbf{p}^\infty$ на площину S_2 при мінімальному (7), максимальному (8) та середньому (9) значеннях τ_i^t відповідно.

заданого рівністю (10), всі граничні координати співпадають і дорівнюють $\frac{1}{n}$, а граничний стан при такому способі визначення показника атрактора є стійким.

У роботі [4] досліджено модель динамічної системи, яку породжено парою векторів \mathbf{p}^t та \mathbf{r}^t ($m = 2$), координати яких змінюються за законом (1), а τ_j^t визначено як добуток j -х координат цих векторів. Таку динамічну систему легко узагальнити для трьох і більше векторів, визначивши $\tau_j^t = \prod_{i=1}^m p_{ij}^t$, $m > 2$. У такому випадку отримуємо динамічну систему, породжену m векторами з властивостями, аналогічними до випадку $m = 2$. Тоді така задача зводиться до пошуку регіону ω_k , в якому відбувається достовірна подія [20], а саме: значення k -х координат векторів \mathbf{p}_i^t дорівнює одиниці, тобто $p_{ik}^\infty = 1$. Очевидно, що τ_j^t з часом t змінюється за більш складним законом, відмінним від (12). Це означає, що цікавим є питання опису інших способів задання τ_j^t чи закону динаміки τ_j^t з часом t , які приводять до різних граничних станів, відмінних від описаних вище.

Література

1. V. Koshmanenko, N. Kharchenko, *Fixed points of complex system with attractive interaction*, Methods Funct. Anal. Topology, **23**, № 2, 164–176 (2017).
2. Т. В. Каратаєва, В. Д. Кошманенко, С. М. Петренко, *Явно розв'язувані моделі перерозподілу конфліктного простору*, Нелін. коливання, **20**, № 1, 98–112 (2017).

3. В. Д. Кошманенко, С. М. Петренко, *Розклад Гана–Жордана як рівноважний стан системи конфлікту*, Укр. мат. журн., **67**, № 1, 64–77 (2016).
4. В. Д. Кошманенко, *Спектральна теорія динамічних систем конфлікту*, Наук. думка, Київ (2016).
5. О. Р. Сатур, *Граничні стани дискретних динамічних систем з притягальною взаємодією*, Зб. праць Ін-ту математики НАН України, **14**, № 2, (2017), с. 122–132.
6. О. Р. Сатур, *Динамічна система конфлікту з притяганням для трійки взаємодіючих сторін*, Наук. записки НаУКМА. Фіз.-мат. науки, **201**, 34–37 (2017).
7. R. Axelrod, *The dissemination of culture: a model with local convergence and global polarization*, J. Conflict Resolution, **41**, № 2, 203–226 (1997); DOI: 10.1177/0022002797041002001
8. J. M. Epstein, *Nonlinear dynamics, mathematical biology and social science: wise use of alternative therapies*, Santa Fe Inst. ser. (book 4), Perseus (1997).
9. J. M. Epstein, *Why Model?*, J. Artif. Soc. Soc. Simul., **11**, 412 (2008).
10. A. Flachea, M. Mas, T. Feliciania, E. Chattoe-Brownb, G. Deffuantc, S. Huetc, J. Lorenzd, *Models of social influence: towards the next frontiers*, J. Artif. Soc. Soc. Simul., **20**, № 2 (2017); DOI: 10.18564/jasss.3521
11. M. Jalili, *Social power and opinion formation in complex networks*, Phys. A, **392**, 959–966 (2013); DOI: 10.1016/j.physa.2012.10.013
12. M. Kimura, K. Saito, K. Ohara, H. Motoda, *Opinion formation by voter model with temporal decay dynamics*, P. A. Flach, T. De Bie, N. Cristianini (eds), Machine Learning and Knowledge Discovery in Databases. ECML PKDD (2012), Lect. Notes Comput. Sci., vol. 7524, Springer, Berlin, Heidelberg (2012), pp. 565–580; DOI: doi.org/10.1007/978-3-642-33486-3_36
13. V. Koshmanenko, *Theorem of conflicts for a pair of probability measures*, Math. Methods Oper. Res., **59**, № 2, 303–313 (2004).
14. V. D. Koshmanenko, *Existence theorems of the ω -limit states for conflict dynamical systems*, Methods Funct. Anal. Topology, **20**, № 4, 379–390 (2014).
15. T. Karataieva, V. Koshmanenko, M. Krawczyk, K. Kulakowski, *Mean field model of a game for power*, Phys. A., **525**, 535–547 (2019); DOI: doi.org/10.1016/j.physa.2019.03.110
16. S. A. Marvel, H. Hong, A. Papush, S. H. Strogatz, *Encouraging moderation: clues from a simple model of ideological conflict*, Phys. Rev. Lett., **109**, (2012); DOI: doi.org/10.1103/PhysRevLett.109.118702
17. L. Pareschi, G. Toscani, A. Tosin, M. Zanella, *Hydrodynamic models of preference formation in multi-agent societies* (2018); DOI: doi.org/10.13140/RG.2.2.27515.77606
18. Т. В. Каратаєва, В. Д. Кошманенко, *Соціум, математична модель динамічної системи конфлікту*, Нелін. коливання, **22**, № 1, 66–85 (2019).
19. В. Д. Кошманенко, *Теорема про конфлікт для пари стохастических векторов*, Укр. мат. журн., **55**, № 4, 555–560 (2003).
20. В. Д. Кошманенко, О. Р. Сатур, *Проблема достовірної події в багатокомпонентних динамічних системах з притягальною взаємодією*, Нелін. коливання, **22**, № 2, 220–234 (2019).

Одержано 25.07.19,
після доопрацювання — 21.12.19