УДК 517.9

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ НЬЮТОНА – КАНТОРОВИЧА*

А. А. Бойчук

Ин-т математики НАН Украины
ул. Терещенковская, 3, Киев, 01024, Украина
e-mail: boichuk@imath.kiev.ua

С. М. Чуйко

Донбас. гос. пед. ун-т
ул. Генерала Батюка, 19, Славянск, 84116, Украина
e-mail: chujko-slav@ukr.net

We find necessary and sufficient conditions of solvability of the nonlinear boundary-value problem in the critical case and develop a scheme for the construction of solutions of this problem. By using the Newton–Kantorovich method, we propose a new iterative scheme for the determination of solutions of the weakly nonlinear boundary-value problem for a system of ordinary differential equations in the critical case. As examples of application of the constructed iterative scheme, we find approximations of solutions of the periodic boundary-value problem for the Duffing and Lienard equations. To control the accuracy of the found approximations of solutions of the periodic boundary-value problem for the Duffing and Lienard equations, we use discrepancies in the original equations.

Знайдено необхідні та достатні умови розв'язності та розроблено схему побудови розв'язків нелінійної крайової задачі в критичному випадку. Для знаходження розв'язків слабконелінійної крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь у критичному випадку з використанням методу Ньютона – Канторовича побудовано нову ітераційну схему. Як приклади застосування побудованих ітераційних схем одержано наближення до розв'язків періодичної крайової задачі для рівняння Дюффінга та Льєнара. Для контролю точності знайдених наближень до розв'язків періодичної крайової задачі для рівнянь Дюффінга та Льєнара використовуються нев'язки у вихідних рівняннях.

1. Критический случай первого порядка. Исследуем задачу о построении решения

$$z(t,\varepsilon)\colon\, z(\cdot,\varepsilon)\in\mathbb{C}^1[a,b],\quad z(t,\cdot)\in\mathbb{C}[0,\varepsilon_0]$$

краевой задачи [1 – 4]

$$dz/dt = A(t)z + f(t) + \varepsilon Z(z,t,\varepsilon), \tag{1}$$

$$\ell z(\cdot,\varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon). \tag{2}$$

Решение задачи (1), (2) ищем в малой окрестности решения порождающей задачи

$$dz_0/dt = A(t)z_0 + f(t), \qquad \ell z_0(\cdot) = \alpha, \quad \alpha\in\mathbb{R}^m.$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке Рамочной программы Европейского Союза по исследованиям и инновациям «Horizon 2020» в соответствии с грантовым соглашением по программе имени Marie Skłodowska-Curie № 873071, а также Государственного фонда фундаментальных исследований, номер государственной регистрации 0118U003390.

Здесь $A(t)$ — $(n \times n)$-мерная матрица и $f(t)$ — n-мерный вектор-столбец, элементы которых — непрерывные на отрезке $[a, b]$ действительные функции, $\ell z(\cdot)$ — линейный ограниченный векторный функционал $\ell z(\cdot)\colon \mathbb{C}[a,b] \to \mathbb{R}^m$. Нелинейности $Z(z,t,\varepsilon)$, а также $J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ нетеровой $(m \neq n)$ задачи (1), (2) предполагаем дважды непрерывно дифференцируемыми по неизвестной z в малой окрестности порождающего решения и по малому параметру ε в малой положительной окрестности нуля. Кроме того, полагаем вектор-функцию $Z(z,t,\varepsilon)$ непрерывной по независимой переменной t на отрезке $[a,b]$. Исследован критический случай $(P_{Q^*} \neq 0)$, причем предполагается выполненным условие

$$P_{Q_d^*}\Big\{\alpha - \ell K\big[f(s)\big](\cdot)\Big\} = 0; \tag{3}$$

в этом случае порождающая задача имеет $(r = n - n_1)$-параметрическое семейство решений [1, 4 – 7]

$$z_0(t, c_0) = X_r(t)c_0 + G\big[f(s);\alpha\big](t), \quad c_0 \in \mathbb{R}^r.$$

Здесь $X(t)$ — нормальная $(X(a) = I_n)$ фундаментальная матрица однородной части порождающей системы, $Q = \ell X(\cdot)$ — $(m \times n)$-мерная матрица, $\operatorname{rank} Q = n_1$, $X_r(t) = X(t)P_{Q_r}$, P_{Q_r} — $(n \times r)$-мерная матрица, составленная из r линейно независимых столбцов $(n \times n)$-мерной матрицы-ортопроектора $P_Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{N}(Q)$, $P_{Q_d^*}$ — $(r \times n)$-мерная матрица, составленная из r линейно независимых строк $(n \times n)$-мерной матрицы-ортопроектора P_{Q^*} : $\mathbb{R}^m \to \mathbb{N}(Q^*)$,

$$G\big[f(s);\alpha\big](t) = X(t)Q^+\Big\{\alpha - \ell K\big[f(s)\big](\cdot)\Big\} + K\big[f(s)\big](t)$$

— обобщенный оператор Грина порождающей краевой задачи,

$$K\big[f(s)\big](t) = X(t)\int_a^t X^{-1}(s)f(s)\,ds$$

— оператор Грина задачи Коши порождающей системы, Q^+ — псевдообратная матрица по Муру – Пенроузу [1, 2, 4]. Необходимое и достаточное условие разрешимости задачи (1), (2) имеет вид

$$F(c(\varepsilon)) := P_{Q_d^*}\Big\{J(z_0(\cdot,c_0) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \ell K\big[Z(z_0(s,c_0) + x(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\big](\cdot)\Big\} = 0. \tag{4}$$

Переходя в равенстве (4) к пределу при $\varepsilon \to 0$, приходим к необходимому условию существования искомого решения

$$F_0(c_0) := P_{Q_d^*}\Big\{J(z_0(\cdot,c_0),0) - \ell K\big[Z(z_0(s,c_0),s,0)\big](\cdot)\Big\} = 0. \tag{5}$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть краевая задача (1), (2) представляет критический* $(P_{Q^*} \neq 0)$ *случай и выполнено условие разрешимости (3) нетеровой* $(m \neq n)$ *порождающей задачи. Предположим также, что в малой окрестности порождающего решения* $z_0(t, c_0^*) \in \mathbb{C}^1[a,b]$ *слабонелинейная краевая задача (1), (2) имеет решение*

$$z(t,\varepsilon)\colon z(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a,b], \qquad z(t,\cdot) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0], \quad z(t,0) = z_0(t,c_0^*).$$

Тогда имеет место равенство (5).

Уравнение (5) традиционно называют уравнением для порождающих констант исходной задачи (1), (2) в критическом случае [1 – 4, 7, 8]. Корни уравнения для порождающих констант краевой задачи (1), (2) определяют порождающее решение $z_0(t, c_0^*)$, в малой окрестности которого могут существовать искомые решения исходной краевой задачи (1), (2). Если же уравнение для порождающих констант не имеет действительных корней, то исходная краевая задача (1), (2) не имеет искомых решений. Предположим, что уравнение (5) имеет действительные корни и не обращается в тождество [9]. Фиксируя одно из решений $c_0^* \in \mathbb{R}^r$ уравнения (5), приходим к задаче об отыскании решения

$$z(t,\varepsilon) = z_0(t, c_0^*) + x(t,\varepsilon), \qquad x(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a,b], \quad x(\tau,\cdot) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0],$$

краевой задачи

$$dx/dt = A(t)x + \varepsilon\, Z(z_0 + x, t, \varepsilon), \tag{6}$$

$$\ell\, x(\cdot,\varepsilon) = \varepsilon\, J(z_0(\cdot, c_0^*) + x(\cdot,\varepsilon), \varepsilon) \tag{7}$$

в окрестности порождающего решения

$$z_0(t, c_r^*) = X_r(t)\, c_0^* + G[f;\alpha](t), \quad c_0^* \in \mathbb{R}^r.$$

Решение задачи (6), (7) представимо в виде

$$x(t,\varepsilon) = X_r(t)\xi(\varepsilon) + x^{(1)}(t,\varepsilon),$$

где

$$x^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon G\big[Z(z_0(s, c_0^*) + x(s,\varepsilon), s, \varepsilon); J(z_0(\cdot, c_0^*) + x(\cdot,\varepsilon), \varepsilon)\big](t),$$

кроме того

$$c(\varepsilon) := c_0^* + \xi(\varepsilon), \qquad \xi(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0], \quad \xi(0) = 0.$$

Необходимое и достаточное условие (4) разрешимости задачи (1), (2) определяет искомый вектор $c(\varepsilon) \in \mathbb{R}^r$, для нахождения которого ранее использовалась техника линеаризации совместно с методом простых итераций [1, 4, 7, 10]. В этом случае, в частности, при нахождении приближений к периодическому решению уравнения (1), появлялись вековые члены. Для нахождения периодического решения уравнения (1) ранее использовался метод Ляпунова – Пуанкаре [3, 11], в данном случае более предпочтительный, поскольку при этом вековые члены не появляются.

Для нахождения решения $c(\varepsilon) \in \mathbb{R}^r$ уравнения (4) воспользуемся эффективным методом Ньютона – Канторовича [12 – 14]. Согласно принятым соглашениям, функция $F(c(\varepsilon))$ дважды непрерывно дифференцируема по неизвестной $c(\varepsilon)$ в малой окрестности точки c_0^*. Предположим, что для уравнения (4) при

$$0 \le \varepsilon \le \varepsilon_* \le \varepsilon_0$$

имеют место неравенства

$$\big\|\mathcal{J}_j^+(\varepsilon)\big\| \le \sigma_1(j), \quad j = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$\left\|d^2F(\zeta_j(\varepsilon)\,; c(\varepsilon)-c_j(\varepsilon))\right\| \le \sigma_2(j)\cdot\|c(\varepsilon)-c_j(\varepsilon)\|$$

и существует константа

$$\theta := \sup_{j\in N}\left\{\frac{\sigma_1(j)\,\sigma_2(j)}{2}\right\}.$$

Тогда, согласно [12 – 14], при условиях

$$P_{\mathcal{J}_j^*}=0, \quad \theta\cdot\|c(\varepsilon)-c_j(\varepsilon)\|<1 \tag{8}$$

для нахождения решения $c(\varepsilon)$ уравнения (4) применима итерационная схема

$$c_{j+1}(\varepsilon)=c_j(\varepsilon)-\mathcal{J}_j^+\,F(c_j(\varepsilon)), \quad j=0,1,2,\ldots, \tag{9}$$

при этом скорость сходимости последовательности $\{c_j(\varepsilon)\}$ к решению $c(\varepsilon)$ уравнения (4) квадратична. Здесь

$$\mathcal{J}_j(\varepsilon) := F'(c_j(\varepsilon)) \in \mathbb{R}^{d\times r}$$

— якобиан преобразования

$$F(c(\varepsilon))\colon \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^d, \quad j=0,1,2,\ldots$$

в точке $c_j(\varepsilon)$. Кроме того, $P_{\mathcal{J}_j^*}:\mathbb{R}^d\to\mathbb{N}(\mathcal{J}_j^*)$ — ортопроектор матрицы $\mathcal{J}_j^*$. Заметим, что условие (8) равносильно требованию полноты ранга матрицы $\mathcal{J}_j$ и возможно лишь в случае $d\le r$. Искомое решение исходной задачи (1), (2) определяет итерационная схема

$$\begin{gathered} z_{k+1}(t,\varepsilon)=z_0(t,c_0^*)+x_{k+1}(t,\varepsilon), \quad x_{k+1}(t,\varepsilon)=X_r(t)\xi_{k+1}(\varepsilon)+x_{k+1}^{(1)}(t,\varepsilon), \\ x_{k+1}^{(1)}(t,\varepsilon)=\varepsilon G\Big[Z(z_0(s,c_0^*)+x_k(s,\varepsilon),s,\varepsilon); J(z_0(\cdot,c_0^*)+x_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big](t), \\ k=0,1,2,\ldots, c_{k+1}(\varepsilon)=c_0^*+\xi_{k+1}(\varepsilon), \quad F(c_{k+1}(\varepsilon))=0. \end{gathered} \tag{10}$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 1 (достаточное условие)**.** *Пусть краевая задача (1), (2) представляет критический ($P_{Q^*}\neq 0$) случай и выполнено условие разрешимости (3) нетеровой ($m\neq n$) порождающей задачи. Предположим, что уравнение (5) не вырождается в тождество и имеет действительный корень $c_0^*\in\mathbb{R}^r$. Предположим также, что для уравнения (4) выполнены условия (8). Тогда для корня $c_0^*\in\mathbb{R}^r$ уравнения для порождающих констант (5) в окрестности порождающего решения $z_0(t,c_0^*)$ для нахождения по меньшей мере одного решения краевой задачи (1), (2) применима итерационная схема (10).*

Область значений $\varepsilon\in[0,\varepsilon_*],\ 0<\varepsilon_*\le\varepsilon_0$, для которого сохраняется сходимость итерационной схемы (10) к решению задачи (1), (2), может быть найдена из условий (8) и [12, с. 639; 15]:

$$\sup_{\varepsilon\in[0;\varepsilon_0]}\left\|\frac{\varepsilon\,\partial G\big[Z(z_0(s,c_0^*)+x(s,\varepsilon),s,\varepsilon); J(z_0(\cdot,c_0^*)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\big](t)}{\partial x}\right\| \le \lambda < 1. \tag{11}$$

В малой окрестности порождающего решения имеет место разложение

$$Z(z_0(t,c_0^*)+x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)=Z(z_0(t,c_0^*),t,0)+A_1(t)x+\varepsilon A_2(t)+R_0(z(t,\varepsilon),t,\varepsilon); \qquad (12)$$

здесь

$$A_1(t)=\frac{\partial Z(z,t,\varepsilon)}{\partial z}\Big|_{\substack{z=z_0(t,c_0^*),\\ \varepsilon=0,}} \qquad A_2(t)=\frac{\partial Z(z,t,\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\Big|_{\substack{z=z_0(t,c_0^*),\\ \varepsilon=0.}}$$

Остаток $R_0(z_0(t,c_0^*)+x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ разложения функции $Z(z,t,\varepsilon)$ более высокого порядка малости по неизвестной x в малой окрестности нуля и по малому параметру ε в малой положительной окрестности нуля, чем первые три члена разложения (12), поэтому $R_0(z_0(t,c_0^*),t,0)\equiv 0.$ Аналогично в окрестности точек $x=0$ и $\varepsilon=0$ имеет место разложение

$$J(z_0(\cdot,c_0^*)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)=J(z_0(\cdot,c_0^*),0)+\ell_1 x(\cdot,\varepsilon)+\varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_0^*),0)+J_0(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon), \qquad (13)$$

представимое производными (по Фреше)

$$\ell_1 x(\cdot,\varepsilon)=\frac{\partial J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial z}\Big|_{\substack{z=z_0(t,c_0^*),\\ \varepsilon=0,}} \qquad \ell_2(z_0(\cdot,c_0^*),0)=\frac{\partial J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\Big|_{\substack{z=z_0(t,c_0^*),\\ \varepsilon=0.}}$$

Остаток $J_0(z_0(\cdot,c_0^*)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ разложения функционала $J(z,\varepsilon)$ более высокого порядка малости по x и ε в окрестности точек $x=0$ и $\varepsilon=0$, чем первые два члена разложения (13), поэтому $J_0(z_0(\cdot,c_0^*),0)=0.$ Обозначим постоянную $(d\times r)$-мерную матрицу

$$B_0=P_{Q_d^*}\Big\{\ell_1 X_r(\cdot)-\ell K\big[A_1(s)X_r(s)\big](\cdot)\Big\}.$$

Традиционное требование $P_{B_0^*}P_{Q_d^*}=0$ [4] менее жесткое, поскольку при выполнении условия (8), в силу равенства $B_0=\mathcal{J}_0,$ это требование выполняется. С другой стороны, при выполнении условия (8) приближения к решению задачи (1), (2), получаемые с помощью итерационной схемы (10), удовлетворяют соответствующим приближениям к краевым условиям (2).

В частности, при нахождении приближений к периодическому решению уравнения (1), при выполнении условия (8) приближения, получаемые с помощью итерационной схемы (10), не содержат вековых членов. В отличие от [16, 17], для нахождения решения $c(\varepsilon)\in\in\mathbb{R}^r$ уравнения (4) использована модификация [13, 14] традиционного метода Ньютона–Канторовича [12]. При выполнении условия $P_{B_0^*}P_{Q_d^*}=0$ будем говорить, что краевая задача (1), (2) представляет критический случай первого порядка. Здесь $P_{B_0^*}:\mathbb{R}^d\to\mathbb{N}(B_0^*)$ — $(d\times d)$-мерная матрица-ортопроектор. Для ключевой матрицы в традиционной схеме анализа и построения решений имеет место равенство [4, 8]

$$B_0=\frac{\partial F_0(c_0^*)}{\partial c_0}.$$

Заметим также, что к виду (1), (2) приводятся матричные краевые задачи, при этом определение критического случая первого порядка распространяется и на матричные краевые задачи [18, 19].

Пример 1. Продемонстрируем эффективность теоремы 1 для задачи о нахождении 2π-периодических решений $y(t) \in \mathbb{C}^2[0; 2\pi]$ нелинейного уравнения Дюффинга с возмущением

$$y'' + y = f(t) + Y(y), \quad Y(y) := y^3. \tag{14}$$

Неоднородность $f(t)$ считаем непрерывной $f(t) \in \mathbb{C}[0; 2\pi]$ 2π-периодической функцией. Периодические решения нелинейного уравнения Дюффинга (14) будем искать в окрестности решения $y_0(t, c_0) = c_0 \cos t,\ c_0 \in \mathbb{R}^1$ однородной части этого уравнения. Полагаем выполненным условие разрешимости 2π-периодической задачи для линейной части уравнения Дюффинга (14):

$$\int\limits_0^{2\pi} \cos t\, f(t)\, dt = 0, \tag{15}$$

при этом линейная часть данной задачи имеет однопараметрическое семейство решений

$$y_0(t, c_0) = c_0 \cos t + G\big[f(s)\big](t), \quad c_0 \in \mathbb{R}^1,$$

представимое оператором Грина

$$G\big[f(s)\big](t) := \int\limits_0^t \sin(t - s)\, f(s)\, ds$$

2π-периодической задачи для линейной части уравнения $y'' + y = f(t)$. Периодические решения нелинейного уравнения Дюффинга (14)

$$y(t) = y_0(t, c_0) + x(t)$$

будем искать в окрестности решения $y_0(t, c_0)$ линейной части этого уравнения в виде разложения по косинусам независимой переменной [20]. Для нахождения возмущения $x(t) \in \mathbb{C}^1[0; 2\pi]$ приходим к 2π-периодической задаче для уравнения

$$x'' + x = Y(y_0 + x),$$

разрешимой тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_0^{2\pi} Y(y_0(t, c_0) + x(t)) \cos t\, dt = 0. \tag{16}$$

Для нахождения амплитуды $c_0 \in \mathbb{R}^1$ порождающего решения $y_0(t, c_0)$ приходим к уравнению

$$F_0(c_0) := \int\limits_0^{2\pi} Y(y_0(t, c_0)) \cos t\, dt = 0. \tag{17}$$

Уравнение (17) традиционно называют уравнением для порождающих амплитуд 2π-периодической задачи для уравнения Дюффинга (14). Уравнение (17) при $f(t) = \cos 3t$ имеет единственный простой

$$B_0 = \frac{3\pi}{128} \neq 0$$

действительный корень [20]

$$c_0^* = -\frac{1}{8}, \qquad B_0 := F'(c_0^*).$$

Приближения к периодическому решению нелинейного уравнения Дюффинга (14) будем искать в окрестности порождающего решения $y_0(t, c_0^*)$ в виде

$$\begin{gathered} y_{k+1}(t) = c_{k+1}(\varepsilon)\cos t + x_{k+1}(t), \quad c_0(\varepsilon) \equiv c_0^*, \\ x_{k+1}(t) := G\big[Y(y_0(s, c_0^*) + c_k\cos s + x_k(s))\big](t), \quad k = 0, 1, 2, \ldots . \end{gathered} \tag{18}$$

Итерационная схема (18) соответствует методу простых итераций [4]. Условием сходимости итерационной схемы (18) является требование сжимаемости

$$\Big\| G_x'\big[Y(y_0(s, c_0^*) + c_k\cos s + x_k(s))\big]\Big\| < \lambda < 1, \quad k = 0, 1, 2 \ldots .$$

Периодическая задача для уравнения первого приближения

$$x_1''(t) + x_1(t) = Y(y_0(t, c_0^*))$$

разрешима в силу равенства $F_0(c_0^*) = 0,$ при этом

$$x_1(t) = -\frac{31\cos t}{163\,840} + \frac{3\cos 3t}{16\,384} + \frac{\cos 9t}{163\,840}.$$

Условие сходимости итерационной схемы (18) (требование сжимаемости для оператора G для уравнения первого приближения) выполнено:

$$\Big\| G_x'\big[Y(y_0(s, c_0^*))\big](\cdot)\Big\|_{\mathbb{C}[0,2\pi]} \approx 0{,}0455\,389 \ll 1.$$

Условие существования 2π-периодического решения уравнения Дюффинга (14) для первого шага имеет вид

$$\int\limits_0^{2\pi} Y(y_1(t, c_1))\cos t\, dt = 0.$$

Для нахождения решения $c_1 \in \mathbb{R}^1$ последнего уравнения применим итерационную схему (9), при этом

$$c_1 \approx \frac{1\,184\,219}{6\,286\,734\,039}, \qquad F(c_1) \approx 0,$$

условие (8) на первом шаге выполнено:

$$\theta \cdot |c_1 - c_0^*| \approx 0{,}00\,726\,098 \ll 1.$$

Положим для второго шага

$$y_2(t) = c_2 \cos t + x_2(t), \quad c_2 \in \mathbb{R}^1,$$

где

$$x_2(t) = -\frac{2\,679\,191 \cos t}{14\,223\,197\,261} + \frac{11\,140\,594 \cos 3t}{61\,113\,645\,011} + \frac{220\,541 \cos 9t}{36\,303\,344\,650} - \frac{835 \cos 15t}{2\,622\,815\,013\,818}.$$

Требование сжимаемости для оператора G для уравнения второго приближения выполнено:

$$\left\| G'_x\big[Y(y_1(s, c_1))\big](\cdot) \right\|_{\mathbb{C}[0;2\pi]} \approx 0{,}0454\,055 \ll 1.$$

Для нахождения константы $c_2 \in \mathbb{R}^1$ применим итерационную схему (9), при этом

$$c_2 \approx \frac{1\,184\,219}{6\,286\,734\,039}, \qquad F_2(c_2^*) \approx 0,$$

а условие (8) на втором шаге выполнено:

$$\theta \cdot |c_2 - c_0^*| \approx 0{,}0362\,726 \ll 1.$$

Требование сжимаемости для оператора G для уравнения третьего приближения выполнено:

$$\left\| G'_x\big[Y(y_2(s, c_2^*))\big](\cdot) \right\|_{\mathbb{C}[0;2\pi]} \approx 0{,}0454\,064 \ll 1.$$

Для нахождения константы $c_3 \in \mathbb{R}^1$ применим итерационную схему (9), при этом

$$c_3 \approx \frac{2\,395\,933}{12\,719\,180\,575}, \qquad F_3(c_3) \approx 0,$$

условие (8) на третьем шаге выполнено:

$$\theta \cdot |c_3 - c_0^*| \approx 0{,}0362\,733 \ll 1.$$

Заметим, что итерационная схема (9) позволяет найти константы $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}^1$ за одну итерацию. Таким образом, найдено третье приближение к решению нелинейного уравнения Дюффинга (14):

$$y_3(t) = -\frac{345 \cos t}{1\,608\,254\,353\,012} - \frac{19\,084\,003 \cos 3t}{152\,895\,002} + \frac{85\,835 \cos 9t}{14\,129\,039\,197} - \frac{1763 \cos 15t}{5\,564\,301\,169\,003}.$$

Для оценки точности найденных приближений к решению периодической задачи для уравнения Дюффинга (14) определим невязки

$$\Delta_k := \left\| y''_k(t) + y_k(t) - f(t) - y_k^3(t) \right\|_{\mathbb{C}[0;2\pi]}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

В частности,

$$\Delta_0 \approx 0{,}00\ 195\ 313, \qquad \Delta_1 \approx 8{,}87\ 541 \times 10^{-6},$$

$$\Delta_2 \approx 3{,}93\ 095 \times 10^{-8}, \qquad \Delta_3 \approx 1{,}77\ 160 \times 10^{-10}.$$

Сравним найденные нулевое и первые три приближения к периодическому решению уравнения Дюффинга (14) с нулевым $y_{0p}(t, c_0^*) = y_0(t, c_0^*)$ и первыми тремя приближениями к периодическому решению уравнения Дюффинга (14), найденными с помощью метода Пуанкаре:

$$y_{1p}(t,\varepsilon) = y_0(t, c_0^*) + \varepsilon\, u_1(t), \qquad u_1(t) = \frac{1}{163\ 840}\big(30\cos 3t + \cos 9t\big),$$

$$y_{2p}(t,\varepsilon) = y_0(t, c_0^*) + \varepsilon\, u_1(t) + \varepsilon^2\, u_2(t),$$

$$u_2(t) = -\frac{3}{46\ 976\ 204\ 800}(12\ 740\cos 3t + 448\cos 9t + 5\cos 15t),$$

$$y_{3p}(t,\varepsilon) = y_0(t, c_0^*) + \varepsilon\, u_1(t) + \varepsilon^2\, u_2(t) + \varepsilon^3\, u_3(t);$$

здесь

$$u_3(t) = \frac{3}{74\ 079\ 595\ 921\ 408\ 000}\big(119\ 097\ 440\cos 3t +$$
$$+ 4\ 250\ 631\cos 9t + 61\ 270\cos 15t + 406\cos 21t\big).$$

Найденные с помощью метода Пуанкаре нулевое и первые три приближения к периодическому решению уравнения Дюффинга (14) характеризуют невязки

$$\delta_{kp}(\varepsilon) = \left\| y''_{kp}(t) + y_{kp}(t) - f(t) - \varepsilon y^3_{kp}(t) \right\|_{\mathbb{C}[0;2\pi]}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

В частности, при $\varepsilon = 1{,}0$ имеем

$$\delta_{1p}(1{,}0) \approx 8{,}85\ 575 \times 10^{-6}, \qquad \delta_{2p}(1{,}0) \approx 5{,}27\ 928 \times 10^{-8}, \qquad \delta_{3p}(1{,}0) \approx 3{,}59\ 541 \times 10^{-10}.$$

Таким образом, найденные нулевое и первые три приближения к периодическому решению уравнения Дюффинга (14) с помощью итерационной схемы (18) точнее соответствующих невязок первых приближений, найденных с помощью метода Пуанкаре. Отметим, что исследованная нелинейная периодическая задача для уравнения Дюффинга (14) не является слабонелинейной в отличие от наиболее изученных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений [4, 8, 16, 17]. Кроме того, при построении приближений к решению периодической задачи для уравнения Дюффинга (14), в отличие от статьи [21], на каждом шаге обеспечено точное выполнение условий разрешимости, гарантирующее отсутствие вековых членов.

При условия $P_{B_0^*} P_{Q_d^*} = 0$, в критическом случае первого порядка, для решения краевой задачи (1), (2) может быть использована техника наименьших квадратов [22, 23]. С другой стороны, при условия $P_{B_0^*} P_{Q_d^*} \neq 0$, для решения краевой задачи (1), (2) с использованием техники линеаризации может быть использована техника приведения к критическому случаю первого порядка [24] либо уточнение разложений нелинейностей краевой задачи (1), (2), при этом возможны критические случаи второго или более высокого порядка [1, 7, 25 – 27].

2. Критический случай второго порядка. Предположим, что в задаче о построении решения краевой задачи (1), (2) имеет место критический случай и при этом уравнение (5) имеет действительные корни. Фиксируя одно из решений $c_0^* \in \mathbb{R}^r$ уравнения (5), приходим к задаче об отыскании решения [1, 7, 25 – 27]

$$z(t,\varepsilon) = z_0(t,c_0^*) + x(t,\varepsilon), \qquad x(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a,b], \quad x(\tau,\cdot) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0],$$

краевой задачи (6), (7) в окрестности порождающего решения

$$z_0(t,c_r^*) = X_r(t)\, c_0^* + G[f;\alpha](t), \quad c_0^* \in \mathbb{R}^r.$$

Предположим также, что имеет место неравенство $P_{B_0^*} P_{Q_d^*} \neq 0$. В малой окрестности точек $x(t,\varepsilon) = 0$ и $\varepsilon = 0$ имеют место разложения (12) и (13), где

$$R_0(z_0(t,c_0^*) + x(t,\varepsilon),t,\varepsilon) = \frac{1}{2}\, d^2 Z(z_0(t,c_0^*),x(t,\varepsilon)) + R_1(z_0(t,c_0^*) + x(t,\varepsilon),t,\varepsilon);$$

здесь

$$d^2(z_0(t,c_0^*),x(t,\varepsilon)) = A_3(z_0(t,c_0^*),x(t,\varepsilon))x(t,\varepsilon) + 2\,\varepsilon A_4(z_0(t,c_0^*))x(t,\varepsilon) + \varepsilon^2 A_5(z_0(t,c_0^*)),$$

кроме того,

$$A_3(z_0(t,c_0^*),x(t,\varepsilon)) := \frac{\partial}{\partial x}\big\{ Z'_x(z,t,\varepsilon)\, x\big\}\Big|_{\substack{z=z_0(t,c_0^*),\\ \varepsilon=0,}}$$

$$A_4(z_0(t,c_0^*)) := \frac{\partial}{\partial z}\big\{ Z'_\varepsilon(z,t,\varepsilon)\big\}\Big|_{\substack{z=z_0(t,c_0^*),\\ \varepsilon=0,}}$$

$$A_5(z_0(t,c_0^*)) := \frac{\partial^2 Z(z,t,\varepsilon)}{\partial \varepsilon^2}\Big|_{\substack{z=z_0(t,c_0^*),\\ \varepsilon=0.}}$$

Аналогично,

$$J_0(z_0(\cdot,c_0^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) = \frac{1}{2}\, d^2 J_0\big(z_0(\cdot,c_0^*),x(\cdot,\varepsilon)\big) + J_1(z_0(\cdot,c_0^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon);$$

здесь

$$d^2 J_0\big(z_0(\cdot,c_0^*),x(\cdot,\varepsilon)\big) = \ell_3\big(z_0(\cdot,c_0^*),x(\cdot,\varepsilon)\big)x(\cdot,\varepsilon) + 2\,\varepsilon\, \ell_4(z_0(\cdot,c_0^*))x(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon^2 \ell_5(z_0(\cdot,c_0^*)),$$

а также

$$\ell_3\big(z_0(\cdot,c_0^*),x(\cdot,\varepsilon)\big)x(\cdot,\varepsilon) := \frac{\partial}{\partial x}\big\{ J'_x(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\, x\big\}\Big|_{\substack{z=z_0(t,c_0^*),\\ \varepsilon=0,}}$$

$$\ell_4(z_0(\cdot,c_0^*))x(\cdot,\varepsilon) = \frac{\partial}{\partial z}\big\{ J'_\varepsilon(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\big\}\Big|_{\substack{z=z_0(t,c_0^*),\\ \varepsilon=0,}}$$

$$\ell_5(z_0(\cdot,c_0^*)) = \frac{\partial^2 J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial \varepsilon^2}\Big|_{\substack{z=z_0(t,c_0^*),\\ \varepsilon=0.}}$$

Решение краевой задачи (6), (7) естественно искать в окрестности решения задачи

$$dx/dt = A(t)x + \varepsilon\, Z\big(z_0(t,c_0^*),t,\varepsilon\big), \qquad \ell x(\cdot,\varepsilon) = \varepsilon\, J(z_0(\cdot,c_0^*),\varepsilon)$$

в виде

$$x(t,\varepsilon) = X_r(t)c(\varepsilon) + \varepsilon\, G_1(t), G_1(t) := G\big[Z(z_0(s,c_0^*)s,\varepsilon); J(z_0(\cdot,c_0^*),\varepsilon)\big](t).$$

Обозначим постоянную $(d \times r)$-мерную матрицу

$$B_1 = P_{Q_d^*}\Big\{\big[\ell_3(z_0(\cdot,c_0^*),G_1(\cdot)) + \ell_4(z_0(\cdot,c_0^*))\big]X_r(\cdot)$$
$$- \ell K\big[\big[A_3(z_0(s,c_0^*),G_1(s)) + A_4(z_0(s,c_0^*))\big]X_r(s)\big](\cdot)\Big\}.$$

С учетом вторых дифференциалов нелинейностей

$$Z(z_0(t,c_0^*) + x(t,\varepsilon),t,\varepsilon), \qquad J(z_0(\cdot,c_0^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon),$$

а также равенства (5) уравнение (4) принимает вид

$$(B_0 + \varepsilon B_1)\, c(\varepsilon) = P_{Q_d^*}\Big\{\varepsilon\ell_1 G_1(\cdot) + \varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_0^*)) +$$
$$+ \frac{1}{2}\,\ell_3(z_0(\cdot,c_0^*),X_r(\cdot)c(\varepsilon))X_r(\cdot)c(\varepsilon) + \frac{\varepsilon^2}{2}\,\ell_3(z_0(\cdot,c_0^*),G_1(\cdot))G_1(\cdot) +$$
$$+ \varepsilon^2\,\ell_4(z_0(\cdot,c_0^*))G_1(\cdot) + \frac{\varepsilon^2}{2}\,\ell_5(z_0(\cdot,c_0^*)) + J_1(z_0(\cdot,c_0^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) -$$
$$- \ell K\big[\varepsilon\, A_1(s)G_1(s) + \varepsilon\, A_2(s) + \frac{\varepsilon^2}{2}\, A_3(z_0(s,c_0^*),G_1(s))G_1(s) +$$
$$+ \frac{1}{2}\, A_3(z_0(t,c_0^*),X_r(s)c(\varepsilon))X_r(s)c(\varepsilon) + \varepsilon^2\, A_4(z_0(s,c_0^*))G_1(s) +$$
$$+ \frac{\varepsilon^2}{2}\, A_5(z_0(s,c_0^*)) + R_1(z_0(t,c_0^*) + x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\big](\cdot)\Big\}.$$

Последнее уравнение разрешимо при условии

$$P_{(B_0+\varepsilon B_1)^*}P_{Q_d^*} = 0; \qquad (19)$$

здесь $P_{(B_0+\varepsilon B_1)^*}$ — матрица-ортопроектор:

$$P_{(B_0+\varepsilon B_1)^*}\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{N}\big((B_0 + \varepsilon B_1)^*\big).$$

При условии (19) по меньшей мере одно решение краевой задачи (6), (7) определяется операторной системой

$$x(t,\varepsilon) = X_r(t)c(\varepsilon) + \varepsilon\, G_1(t), \qquad (20)$$

$$c(\varepsilon) = (B_0 + \varepsilon B_1)^+ P_{Q_d^*}\Big\{\varepsilon \ell_1 G_1(\cdot) + \varepsilon \ell_2(z_0(\cdot, c_0^*)) +$$

$$+ \frac{1}{2}\,\ell_3(z_0(\cdot, c_0^*), X_r(\cdot)c(\varepsilon))X_r(\cdot)c(\varepsilon) + \frac{\varepsilon^2}{2}\,\ell_3(z_0(\cdot, c_0^*), G_1(\cdot))G_1(\cdot) +$$

$$+ \varepsilon^2\,\ell_4(z_0(\cdot, c_0^*))G_1(\cdot) + \frac{\varepsilon^2}{2}\,\ell_5(z_0(\cdot, c_0^*)) + J_1(z_0(\cdot, c_0^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) -$$

$$- \ell K\Big[\varepsilon\, A_1(s)G_1(s) + \varepsilon\, A_2(s) + \frac{\varepsilon^2}{2}\, A_3(z_0(s, c_0^*), G_1(s))G_1(s) +$$

$$+ \frac{1}{2}\, A_3(z_0(t, c_0^*), X_r(s)c(\varepsilon))X_r(s)c(\varepsilon) + \varepsilon^2\, A_4(z_0(s, c_0^*))G_1(s) +$$

$$+ \frac{\varepsilon^2}{2}\, A_5(z_0(s, c_0^*)) + R_1(z_0(t, c_0^*) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon)\Big](\cdot)\Big\}.$$

Для построения приближенного решения операторной системы (20) при условии (19) применим метод простых итераций [4]. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 2 (достаточное условие). *Пусть выполнено условие разрешимости (3) нетеровой* $(m \neq n)$ *порождающей задачи и краевая задача (1), (2) представляет критический случай. Предположим, что уравнение (5) не вырождается в тождество и имеет действительный корень* $c_0^* \in \mathbb{R}^r$. *Предположим также, что выполнено условие (19). Тогда для корня* $c_0^* \in \mathbb{R}^r$ *уравнения для порождающих констант (5) в окрестности порождающего решения* $z_0(t, c_0^*)$ *для нахождения по меньшей мере одного решения задачи (1), (2) применима операторная система (20).*

При выполнении условия $P_{B_0^*} P_{Q_d^*} \neq 0$ в случае (19) будем говорить, что краевая задача (1), (2) представляет собой критический случай второго порядка. В частном случае, когда $P_{(B_0+\varepsilon B_1)} = 0,$ решение задачи (1), (2) единственно. Здесь

$$P_{(B_0+\varepsilon B_1)} \colon \mathbb{R}^r \to \mathbb{N}(B_0 + \varepsilon B_1)$$

— $(r \times r)$-мерная матрица-ортопроектор. Критический случай второго порядка впервые описан в [26] для нелинейных периодических краевых задач. Наличие производных

$$A_2(z(t, c_0^*)) \neq 0, \quad A_3(z(t, c_0^*), x(t, \varepsilon)) \neq 0, \qquad \ell_2(z_0(\cdot, c_0^*)) \neq 0, \quad \ell_3\big(z_0(\cdot, c_0^*), x(\cdot, \varepsilon)\big) \neq 0$$

отличает доказанную теорему от соответствующих теорем [7, с. 42; 1, с. 193]. Кроме того, в отличие от [28], нами рассмотрен наиболее общий случай нелинейностей краевой задачи (1), (2), для которых

$$A_3(z(t, c_0^*), x(t, \varepsilon)) \cdot x(t, \varepsilon) \neq 0, \qquad \ell_3\big(z_0(\cdot, c_0^*), x(\cdot, \varepsilon)\big)x(\cdot, \varepsilon) \neq 0.$$

Матрица B_1 аналогична, но существенно отличается от использованной одноименной матрицы [1, 4, 7, 8, 10, 26, 27, 27, 28]. Длина отрезка $[0, \varepsilon_*],$ на котором применим метод простых итераций, может быть оценена как посредством мажорирующих уравнений Ляпунова [1, 7, 8], так и непосредственно из условия сжимаемости оператора, определяемого операторной системой (20), аналогично [15].

Необходимое и достаточное условие (4) разрешимости задачи (1), (2) определяет вектор $c(\varepsilon) \in \mathbb{R}^r,$ для нахождения которого в теореме 2 использована техника линеаризации совместно с методом простых итераций. В этом случае, в частности, при нахождении приближений к периодическому решению уравнения (1) появлялись вековые члены. Во избежание этого, для решения уравнения (4) воспользуемся более эффективным методом Ньютона – Канторовича [12 – 14]. Согласно принятым соглашениям, функция $F(c(\varepsilon)) : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^d$ дважды непрерывно дифференцируема по неизвестной $c(\varepsilon)$ в малой окрестности точки c_0^*. Предположим, что для уравнения (4) при $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_* \le \varepsilon_0$ выполнено условие (8). Тогда, согласно [12], для нахождения решения $c(\varepsilon)$ уравнения (4) применима итерационная схема

$$c_{j+1}(\varepsilon) = c_j(\varepsilon) - \mathcal{J}_j^+ F(c_j(\varepsilon)), \quad j = 0, 1, 2, \ldots,$$

при этом скорость сходимости последовательности $\{c_j(\varepsilon)\}$ к решению $c(\varepsilon)$ уравнения (4) квадратична. Искомое решение исходной задачи (1), (2) определяется итерационной схемой (10). Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 3 (достаточное условие)**.** *Пусть выполнено условие разрешимости (3) нетеровой $(m \neq n)$ порождающей задачи и краевая задача (1), (2) представляет критический случай. Предположим, что уравнение (5) не вырождается в тождество и имеет действительный корень $c_0^* \in \mathbb{R}^r$. Предположим также, что выполнено условие (19) и для уравнения (4) при*

$$0 \le \varepsilon \le \varepsilon_* \le \varepsilon_0$$

выполнено условие (8). Тогда для корня $c_0^* \in \mathbb{R}^r$ уравнения для порождающих констант (5) в окрестности порождающего решения $z_0(t, c_0^*)$ для нахождения по меньшей мере одного решения краевой задачи (1), (2) применима итерационная схема (10).

Область $\varepsilon \in [0, \varepsilon_*], \ 0 \le \varepsilon_* \le \varepsilon_0$ сходимости итерационной схемы (10) к решению задачи (1), (2) может быть найдена из условия (8) и (11). При выполнении этих условий приближения к решению краевой задачи (1), (2), получаемые с помощью итерационной схемы (10), удовлетворяют соответствующим приближениям к краевым условиям (2). В частности, при нахождении приближений к периодическому решению уравнения (1) и выполнении условий (8) и (11), приближения, получаемые с помощью итерационной схемы (10), не содержат вековых членов.

3. Приложение к теории уравнения Льенарда. Продемонстрируем эффективность теоремы 3 для задачи о нахождении 2π-периодических решений

$$y(t, \varepsilon) : y(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^2[0; 2\pi], \qquad y(t, \cdot) \in \mathbb{C}^2[0; \varepsilon_0]$$

нелинейного уравнения Льенарда [29, с. 174]

$$y'' + y = \varepsilon\, Y(y, t, \varepsilon). \tag{21}$$

Нелинейность $Y(y, t, \varepsilon)$ уравнения Льенарда (21) предполагаем дважды непрерывно дифференцируемой по неизвестной y в малой окрестности порождающего решения и по малому параметру ε в малой положительной окрестности нуля. Кроме того, считаем вектор-функцию $Y(y, t, \varepsilon)$ непрерывной по независимой переменной t на отрезке $[0, 2\pi]$. Периодические решения нелинейного уравнения Льенарда (21) будем искать в окрестности решения

$$y_0(t, c_0) = c_{0a} \cos t + c_{0b} \sin t, \quad c_{0a}, c_{0b} \in \mathbb{R}^1,$$

однородной части этого уравнения. Предположим выполненным условие разрешимости

$$\int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} f(t)\, dt = 0$$

2π-периодической задачи для уравнения $y'' + y = f(t)$, при этом данная задача имеет однопараметрическое семейство решений

$$y_0(t, c_0) = c_{0a} \cos t + c_{0b} \sin t + G\big[f(s)\big](t), \quad c_{0a}, c_{0b} \in \mathbb{R}^1,$$

представимое оператором Грина

$$G\big[f(s)\big](t) := \int_0^t \sin(t-s)\, f(s)\, ds.$$

Необходимое и достаточное условие существования решения

$$y(t, \varepsilon) = y_0(t, c_0) + x(t, \varepsilon), \quad c_0 := \begin{pmatrix} c_{0a} \\ c_{0b} \end{pmatrix},$$

исходной 2π-периодической задачи для уравнения Льенарда имеет вид

$$F(c(\varepsilon)) := \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} Y(y(t, \varepsilon), t, \varepsilon)\, dt = 0. \tag{22}$$

Переходя в равенстве (22) к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем необходимое условие существования

$$F_0(c_0) := \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} Y(y_0(t, c_0), t, 0)\, dt = 0 \tag{23}$$

искомого решения

$$y(t, \varepsilon) = y_0(t, c_0) + x(t, \varepsilon),$$

$$x(t, \varepsilon) = c_a(\varepsilon) \cos t + c_b(\varepsilon) \sin t + x^{(1)}(t, \varepsilon),$$

$$x^{(1)}(t, \varepsilon) := \varepsilon\, G\big[Y(y(s, \varepsilon), s, \varepsilon)\big](t), \quad c_{0a}, c_{0b} \in \mathbb{R}^1.$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Лемма 2. *Предположим, что в малой окрестности порождающего решения $y_0(t, c_0^*) \in \in \mathbb{C}^2[a, b]$ 2π-периодическая слабонелинейная краевая задача для уравнения Льенарда (21) имеет решение*

$$y(t, \varepsilon) : y(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^2[0; 2\pi], \qquad y(t, \cdot) \in \mathbb{C}^2[0; \varepsilon_0],$$

при $\varepsilon = 0$ обращающееся в порождающее: $y(t, 0) = y_0(t, c_0^*)$. Тогда имеет место равенство (23).

Уравнение (23) традиционно называют уравнением для порождающих амплитуд 2π-периодической задачи для уравнения Льенарда (21). Предположим, что уравнение (23) имеет действительные корни. Фиксируя одно из решений $c_0^* \in \mathbb{R}^2$ уравнения (23), приходим к задаче об отыскании решения

$$y(t,\varepsilon) = y_0(t, c_0^*) + x(t,\varepsilon), \quad c_0^* := \begin{pmatrix} c_{0a}^* \\ c_{0b}^* \end{pmatrix}$$

краевой задачи (6), (7) в окрестности порождающего решения $y_0(t, c_0^*)$. В малой окрестности порождающего решения $y_0(t, c_0^*)$ имеет место разложение

$$Y(y_0(t, c_0^*) + x(t,\varepsilon), t, \varepsilon) = Y\big(y_0(t, c_0^*), t, 0\big) + A_1(t)x + \\ + \varepsilon A_2(t) + R_0(y_0(t, c_0^*) + x(t,\varepsilon), t, \varepsilon); \qquad (24)$$

здесь

$$A_1(t) = \frac{\partial Y(y,t,\varepsilon)}{\partial y}\bigg|_{\substack{y=y_0(t,c_0^*),\\ \varepsilon=0,}} \qquad A_2(t) = \frac{\partial Y(y,t,\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\bigg|_{\substack{y=y_0(t,c_0^*),\\ \varepsilon=0.}}$$

Остаток $R_0(y_0(t, c_0^*) + x(t,\varepsilon), t, \varepsilon)$ разложения функции $Y(y,t,\varepsilon)$ более высокого порядка малости по неизвестной x в малой окрестности нуля и по малому параметру ε в малой положительной окрестности нуля, чем первые три члена разложения (24), поэтому $R_0\big(y_0(t, c_0^*), t, 0\big) \equiv 0$. Обозначим постоянную (2×2)-мерную матрицу

$$B_0 = \int\limits_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} A_1(t) \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \end{pmatrix} dt.$$

В случае невырожденности матрицы B_0 для решения 2π-периодической задачи для уравнения Льенарда (21) применима теорема 1. Исследуем менее изученный случай вырожденности матрицы B_0. В малой окрестности порождающего решения $y_0(t, c_0^*)$ и точки $\varepsilon = 0$ имеет место разложение (24), где

$$R_0(y_0(t, c_0^*) + x(t,\varepsilon), t, \varepsilon) = \frac{1}{2}\, d^2Y\big(y_0(t, c_0^*), x(t,\varepsilon)\big)x(t,\varepsilon) + R_1\big(y_0(t, c_0^*) + x(t,\varepsilon), t, \varepsilon\big);$$

здесь

$$d^2Y(y_0(t, c_0^*), x(t,\varepsilon)) = A_3\big(y_0(t, c_0^*), x(t,\varepsilon)\big) + 2\,\varepsilon A_4(y_0(t, c_0^*))x(t,\varepsilon) + \varepsilon^2 A_5(y_0(t, c_0^*)),$$

кроме того,

$$A_3(y_0(t, c_0^*), x(t,\varepsilon)) := \frac{\partial}{\partial x}\big\{Y_x'(y,t,\varepsilon)\,x\big\}\bigg|_{\substack{y=y_0(t,c_0^*),\\ \varepsilon=0,}}$$

$$A_4(y_0(t, c_0^*)) := \frac{\partial}{\partial y}\big\{Y_\varepsilon'(y,t,\varepsilon)\big\}\bigg|_{\substack{y=y_0(t,c_0^*),\\ \varepsilon=0,}}$$

$$A_5(y_0(t,c_0^*)) := \frac{\partial^2 Y(y,t,\varepsilon)}{\partial \varepsilon^2}\Big|_{\substack{y=y_0(t,c_0^*),\\ \varepsilon=0.}}$$

Решение 2π-периодической задачи для уравнения Льенарда

$$y(t,\varepsilon) = y_0(t,c_0^*) + x(t,\varepsilon)$$

естественно искать в окрестности решения 2π-периодической задачи

$$dx/dt = A(t)x + \varepsilon\, Y\big(y_0(t,c_0^*),t,\varepsilon\big)$$

в виде

$$x(t,\varepsilon) = c_a(\varepsilon)\cos t + c_b(\varepsilon)\sin t + \varepsilon\, G_1(t), \qquad G_1(t) := G\big[Y(y_0(s,c_0^*)s,\varepsilon)\big](t).$$

Обозначим постоянную (2×2)-мерную матрицу

$$B_1 := \int\limits_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} \big[A_3(y_0(t,c_0^*),G_1(t)) + A_4(y_0(t,c_0^*))\big] X_2(t)\, dt;$$

здесь

$$X_2(t) := \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \end{pmatrix}.$$

С учетом второго дифференциала нелинейности

$$Y(y_0(t,c_0^*) + x(t,\varepsilon),t,\varepsilon),$$

а также равенства (23), уравнение (22) принимает вид

$$(B_0+\varepsilon B_1)\, c(\varepsilon) = \int\limits_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} \Big[\varepsilon\, A_1(s)G_1(s) + \varepsilon\, A_2(t) + \frac{\varepsilon^2}{2}\, A_3(y_0(t,c_0^*),G_1(t))G_1(t) +$$
$$+ \frac{1}{2}\, A_3(y_0(t,c_0^*),X_2(t)c(\varepsilon))X_2(t)c(\varepsilon) + \varepsilon^2\, A_4(y_0(t,c_0^*))G_1(t) +$$
$$+ \frac{\varepsilon^2}{2}\, A_5(y_0(t,c_0^*)) + R_1(z_0(t,c_0^*) + x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\Big] X_2(t)\, dt.$$

Последнее уравнение разрешимо при условии

$$\det(B_0+\varepsilon B_1) \neq 0. \tag{25}$$

При условии (25) единственное решение 2π-периодической задачи для уравнения Льенарда определяется операторной системой

$$y(t,\varepsilon) = y_0(t,c_0^*) + x(t,\varepsilon), x(t,\varepsilon) = X_r(t)c(\varepsilon) + \varepsilon\, G_1(t), \tag{26}$$

$$c(\varepsilon)=(B_0+\varepsilon B_1)^{-1}\int\limits_0^{2\pi}\begin{pmatrix}\cos t\\ -\sin t\end{pmatrix}\Big[\varepsilon\, A_1(s)G_1(s)+\varepsilon\, A_2(t)+$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\,A_3(y_0(t,c_0^*),G_1(t))G_1(t)+\frac{1}{2}\,A_3(y_0(t,c_0^*),X_2(t)c(\varepsilon))X_2(t)c(\varepsilon)+$$

$$+\,\varepsilon^2\,A_4(y_0(t,c_0^*))G_1(t)+\frac{\varepsilon^2}{2}\,A_5(y_0(t,c_0^*))+R_1(y_0(t,c_0^*)+x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\Big]X_2(t)\,dt.$$

Для построения приближенного решения операторной системы (26) при условии (25) применим метод простых итераций [4]. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Следствие 1. *Предположим, что уравнение (23) не вырождается в тождество и имеет действительный корень $c_0^*\in\mathbb{R}^2$. Предположим также, что выполнено условие (25). Тогда для корня $c_0^*\in\mathbb{R}^2$ уравнения для порождающих констант (23) в окрестности порождающего решения $y_0(t,c_0^*)$ для нахождения решения 2π-периодической задачи для уравнения Льенарда (21) при условии (8) применима операторная система (26).*

При выполнении условия (25) 2π-периодическая задача для уравнения Льенарда (21) представляет критический случай второго порядка. Матрица B_1 аналогична, но существенно отличается от ранее использованной нами одноименной матрицы [1, 2, 4, 28]. Необходимое и достаточное условие разрешимости 2π-периодической задачи для уравнения Льенарда (21) определяет вектор $c(\varepsilon)\in\mathbb{R}^2$, для нахождения которого в теореме 2 использована техника линеаризации совместно с методом простых итераций [28]. В этом случае, в частности, при нахождении приближений к периодическому решению уравнения Льенарда (21), появляются вековые члены. Во избежание этого, для решения 2π-периодической задачи для уравнения Льенарда (21), воспользуемся более эффективным методом Ньютона – Канторовича [12 – 14]. Согласно принятым соглашениям, функция $F(c(\varepsilon))\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ дважды непрерывно дифференцируема по неизвестной $c(\varepsilon)$ в малой окрестности точки c_0^*. Предположим, что для уравнения (4) при $0\le\varepsilon\le\varepsilon_*\le\varepsilon_0$ выполнено условие (8). Тогда, согласно [12], для нахождения решения $c(\varepsilon)$ уравнения (4) применима итерационная схема

$$c_{j+1}(\varepsilon)=c_j(\varepsilon)-\mathcal{J}_j^{-1}\,F(c_j(\varepsilon)),\quad j=0,1,2,\ldots,$$

при этом скорость сходимости последовательности $\{c_j(\varepsilon)\}$ к решению $c(\varepsilon)$ уравнения (4) квадратична. Искомое решение исходной 2π-периодической задачи для уравнения Льенарда (21) определяется итерационной схемой

$$y_{k+1}(t,\varepsilon)=y_0(t,c_0^*)+x_{k+1}(t,\varepsilon),\quad k=0,1,2,\ldots,$$

$$x_{k+1}(t,\varepsilon)=X_2(t)\xi_{k+1}(\varepsilon)+x_{k+1}^{(1)}(t,\varepsilon),\tag{27}$$

$$x_{k+1}^{(1)}(t,\varepsilon)=\varepsilon G\big[Y(y_0(s,c_0^*)+x_k(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\big](t),c_{k+1}(\varepsilon)=c_0^*+\xi_{k+1}(\varepsilon),F(c_{k+1}(\varepsilon))=0.$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Следствие 2. *Предположим, что уравнение (23) не вырождается в тождество и имеет действительный корень $c_0^*\in\mathbb{R}^r$. Предположим также, что 2π-периодическая задача для уравнения Льенарда (21) представляет критический случай второго порядка. Тогда для корня $c_0^*\in\mathbb{R}^r$ уравнения для порождающих констант (23) в окрестности порождающего решения*

$y_0(t,c_0^*)$ для нахождения решения 2π-периодической задачи для уравнения Льенарда (21) применима итерационная схема (27).

Область $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0],\ 0 \le \varepsilon_* \le \varepsilon_0$ сходимости итерационной схемы (27) к решению 2π-периодической задачи для уравнения Льенарда (21) может быть найдена аналогично [15] из условия (8) и соотношения (11) с учетом требования сжимаемости соответствующего оператора.

Пример 2. Требованиям следствия 2 удовлетворяет задача о построении 2π-периодических решений уравнения Льенарда

$$y'' + y = \varepsilon \cdot \left(\frac{y^3}{3} - y\right) + \varepsilon^2 \sin t. \tag{28}$$

Периодические решения нелинейного уравнения Льенарда (28) будем искать в окрестности решения

$$y_0(t,c_0) = c_{0a}\cos t + c_{0b}\sin t, \quad c_{0a}, c_{0b} \in \mathbb{R}^1,$$

линейной части этого уравнения. Уравнение для порождающих амплитуд 2π-периодической задачи для уравнения Льенарда [29, с. 174]

$$F(c_0) = \frac{\pi}{4}\begin{bmatrix} c_{0a}\big(c_{0a}^2 + c_{0b}^2 - 4\big) \\ -c_{0b}\big(c_{0a}^2 + c_{0b}^2 - 4\big)\end{bmatrix} = 0$$

имеет бесконечное множество решений; положим [28] $c_{0a}^* := 0,\ c_{0b}^* = 2,$ при этом

$$B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2\pi \end{pmatrix}.$$

В силу вырожденности матрицы B_0 вычисляем функцию

$$G_1(t) = \frac{1}{12}\,(\sin 3t - 3\sin t)$$

и находим производные

$$A_3(y_0(t,c_0^*), \qquad G_1(t)) = 2y_0(t,c_0^*)\,G_1(t), \qquad A_4(y_0(t,c_0^*)) = A_5(y_0(t,c_0^*)) \equiv 0,$$

при этом

$$B_1 = \frac{\pi}{3}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

В силу невырожденности

$$\det(B_0 + \varepsilon\, B_1) = \frac{\pi^2\,(6 - 5\,\varepsilon)}{9}, \quad 0 \le \varepsilon < \frac{6}{5},$$

матрицы $B_0 + \varepsilon\, B_1$ 2π-периодическая задача для уравнения Льенарда (28) представляет критический случай второго порядка. Периодическая задача для уравнения первого приближения

$$x_1''(t) + x_1(t) = \varepsilon\, Y\big(y_0(t,c_0^*), t, 0\big)$$

разрешима в силу равенства $F_0(c_0^*)=0,$ при этом

$$y_1(t,\varepsilon)=y_0(t,c_0^*)+x_1(t,\varepsilon),\qquad x_1(t,\varepsilon)=c_{a1}(\varepsilon)\cos t+c_{b1}(\varepsilon)\sin t+\varepsilon\, G_1(t),$$

где

$$c_{a1}(\varepsilon)=0,\qquad c_{b1}(\varepsilon)=\frac{\varepsilon\,(323\,\varepsilon-168)}{96\,(5\,\varepsilon-6)}.$$

Последующие приближения не приводим, поскольку при нахождении уже второго приближения к периодическому решению уравнения Льенарда (28) появляются вековые члены:

$$y_1(0,\varepsilon)-y_1(2\pi,\varepsilon)=\frac{19\,\pi\,\varepsilon^2}{12}-\frac{65\,\pi\,\varepsilon^3}{128}-\frac{3721\,\pi\,\varepsilon^4}{4608}-\frac{115\ 351\pi\,\varepsilon^5}{221\ 184}-$$
$$-\frac{204\ 655\,\pi\,\varepsilon^6}{663\ 552}-\frac{1\ 209\ 325\,\pi\,\varepsilon^7}{7\ 962\ 624}-\frac{465\ 125\,\pi\,\varepsilon^8}{11\ 943\ 936}.$$

Точность найденных приближений к решению периодической задачи для уравнения Льенарда (28) характеризуют невязки

$$\Delta_k(\varepsilon):=\left\|d^2y_k(t,\varepsilon)/dt^2+y_k(t,\varepsilon)-\varepsilon Y(y_k(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\right\|_{\mathbb{C}[0;2\pi]}.$$

В частности,

$$\Delta_0(0,1)\approx 0{,}0766\ 667,\qquad \Delta_1(0,1)\approx 0{,}00\ 878\ 317;$$

$$\Delta_0(0{,}01)\approx 0{,}00\ 676\ 667,\qquad \Delta_1(0{,}01)\approx 0{,}0000\ 937\ 332.$$

Задача о построении 2π-периодических решений нелинейного уравнения Льенарда (28) также удовлетворяет требованиям следствия 2. Периодические решения уравнения Льенарда будем искать в окрестности найденного выше порождающего решения $y_0(t,c_0^*)=2\sin t.$ В силу невырожденности матрицы $B_0+\varepsilon\, B_1$ 2π-периодическая задача для уравнения Льенарда (28) представляет критический случай второго порядка. Периодическая задача для уравнения первого приближения

$$x_1''(t,\varepsilon)+x_1(t,\varepsilon)=\varepsilon\, Y(y_0(t,c_0^*),t,\varepsilon)$$

разрешима при условии

$$F_0(c_0(\varepsilon)):=\int\limits_0^{2\pi}\begin{pmatrix}\cos t\\ -\sin t\end{pmatrix}Y(y_0(t,c_0(\varepsilon)),t,\varepsilon)\,dt=0,$$

при этом

$$c_{a0}(0,1)\approx 0,\qquad c_{b0}(0,1)\approx\frac{20\ 470\ 144}{204\ 187\ 105};$$

кроме того,

$$\det\mathcal{J}_1(0,1)\approx -9{,}77\ 060,$$

следовательно, для нахождения решения 2π-периодической задачи для уравнения Льенарда (28) применима итерационная схема (27), причем

$$y_1(t,\varepsilon) = y_0(t,c_0) + x_1(t,\varepsilon), \qquad x_1(t,\varepsilon) = c_{a1}(\varepsilon)\cos t + c_{b1}(\varepsilon)\sin t + x_1^{(1)}(t,\varepsilon),$$

где

$$x_1^{(1)}(t,0,1) \approx -\frac{861\,764\sin t}{27\,369\,103\,227} + \frac{54\,712\sin 3t}{5\,212\,860\,049}, \quad c_{a1}(0,1) \approx 0,$$
$$c_{b1}(0,1) \approx \frac{222\,072}{70\,588\,291\,615}.$$

Периодическая задача для уравнения второго приближения

$$x_2''(t,\varepsilon) + x_2(t,\varepsilon) = \varepsilon\, Y(y_0(t,c_0^*) + x_1(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$$

разрешима в силу равенства $F(c_1) = 0$, при этом

$$\det \mathcal{J}_2(0,1) \approx -9{,}77\,060,$$

следовательно, для нахождения решения 2π-периодической задачи для уравнения Льенарда (28) применима итерационная схема (27), причем

$$y_2(t,\varepsilon) = y_0(t,c_0) + x_2(t,\varepsilon), \qquad x_2(t,\varepsilon) = c_{a2}(\varepsilon)\cos t + c_{b2}(\varepsilon)\sin t + x_2^{(1)}(t,\varepsilon),$$

где

$$y_2(t,0,1) \approx \frac{50\,034\,590\sin t}{499\,088\,739} + \frac{41\,096\sin 3t}{38\,674\,523\,721} + \frac{119\sin 5t}{3\,610\,021\,696\,231},$$
$$c_{a2}(0,1) \approx 0, \qquad c_{b2}(0,1) \approx \frac{71\,410}{22\,419\,315\,869}.$$

Точность найденных приближений к решению периодической задачи для уравнения Льенарда (28), найденных с помощью итерационной схемы (27), характеризуют невязки $\Delta_k(\varepsilon)$. В частности,

$$\Delta_0(0,1) \approx 8{,}39\,647 \times 10^{-6}, \qquad \Delta_1(0,1) \approx 1{,}04\,560 \times 10^{-7}, \qquad \Delta_2(0,1) \approx 1{,}81\,966 \times 10^{-9}.$$

Таким образом, точность приближений к решению периодической задачи для уравнения Льенарда (28), найденных с помощью итерационной схемы (27), значительно выше точности приближений к решению периодической задачи для уравнения Льенарда (28), найденных с помощью операторной системы (26). Сравним найденные нулевое и первые два приближения к периодическому решению уравнения Льенарда (28) с нулевым $y_{0p}(t,c_0^*) = y_0(t,c_0^*)$ и первыми пятью приближениями к периодическому решению уравнения Льенарда (28), найденными с помощью метода Пуанкаре:

$$y_{1p}(t,\varepsilon) = y_0(t,c_0^*) - \frac{11\,\varepsilon\sin t}{24} + \frac{\varepsilon^2\sin 3t}{12},$$

$$y_{2p}(t,\varepsilon) = y_{1p}(t,\varepsilon) + \frac{493\,\varepsilon^2\sin t}{2\,304} - \frac{13\,\varepsilon^2\sin 3t}{192} + \frac{\varepsilon^2\sin 5t}{128},$$

$$y_{3p}(t,\varepsilon) = y_{2p}(t,\varepsilon) + \frac{12\,971\,\varepsilon^3 \sin t}{110\,592} + \frac{89\,\varepsilon^3 \sin 3t}{18\,432} - \frac{65\,\varepsilon^3 \sin 5t}{13\,824} + \frac{\varepsilon^3 \sin 7t}{6\,912};$$

$$y_{4p}(t,\varepsilon) = y_{3p}(t,\varepsilon) + \frac{2\,233\,693\,\varepsilon^4 \sin t}{21\,233\,664} - \frac{24\,535\,\varepsilon^4 \sin 3t}{2\,654\,208} +$$

$$+ \frac{2\,039\,\varepsilon^4 \sin 5t}{1\,327\,104} - \frac{91\,\varepsilon^4 \sin 7t}{331\,776} + \frac{\varepsilon^4 \sin 9t}{165\,888};$$

$$y_{4p}(t,\varepsilon) = y_{3p}(t,\varepsilon) - \frac{31\,256\,459\,\varepsilon^5 \sin t}{339\,738\,624} - \frac{688\,271\,\varepsilon^5 \sin 3t}{169\,869\,312} -$$

$$- \frac{13\,199\,\varepsilon^5 \sin 5t}{21\,233\,664} + \frac{193\,\varepsilon^5 \sin 7t}{1\,179\,648} - \frac{13\,\varepsilon^5 \sin 9t}{884\,736} + \frac{\varepsilon^5 \sin 11t}{3\,981\,312}.$$

Найденные с помощью метода Пуанкаре нулевое и первые пять приближений к периодическому решению уравнения Льенарда (28) характеризуют невязки

$$\delta_{kp}(\varepsilon) = \left\| y''_{kp}(t) + y_{kp}(t) - \varepsilon\, Y(y_{kp}(t), t, \varepsilon) \right\|_{\mathbb{C}[0;2\pi]}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

В частности, при $\varepsilon = 0{,}1$ имеем

$$\delta_{1p}(0{,}1) \approx 0{,}00\,566\,849, \qquad \delta_{2p}(0{,}1) \approx 0{,}000\,184\,039,$$

$$\delta_{3p}(0{,}1) \approx 9{,}68\,229 \times 10^{-6}, \qquad \delta_{4p}(0{,}1) \approx 4{,}59\,922 \times 10^{-7}, \qquad \delta_{5p}(0{,}1) \approx 3{,}52\,039 \times 10^{-8}.$$

Таким образом, найденные нулевое и первые три приближения к периодическому решению уравнения Льенарда (28) с помощью итерационной схемы (27) точнее соответствующих невязок нулевого и первых пяти приближений, найденных с помощью метода Пуанкаре.

Если в критическом случае условие (19) не выполнено, то для краевой задачи может иметь место критический случай третьего или более высокого порядка. Критический случай третьего порядка впервые описан в [25] для нелинейных периодических краевых задач. Для нахождения решения $c(\varepsilon) \in \mathbb{R}^r$ уравнения (4) с использованием метода Ньютона – Канторовича [12 – 14] в случае, когда условие (19) не выполнено, при условии полноты ранга $\mathcal{J}_j(\varepsilon)$ можно также воспользоваться обобщением метода Ньютона – Канторовича [30].

Литература

1. А. А. Бойчук, В. Ф. Журавлев, А. М. Самойленко, *Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи*, Ин-т математики НАН України, Киев (1995).
2. А. А. Бойчук, В. Ф. Журавлев, А. М. Самойленко, *Нормально-разрешимые краевые задачи*, Наукова думка, Киев (2019).
3. И. Г. Малкин, *Некоторые задачи теории нелинейных колебаний*, Гостехиздат, Москва (1956).
4. A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko, *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems*, 2nd ed., De Gruyter, Berlin; Boston (2016).
5. А. А. Бойчук, *Функция Грина линейной однородной краевой задачи*, Докл. АН УССР. Сер. А, № 7, 2 – 6 (1988).
6. А. А. Бойчук, *Краевые задачи для слабовозмущенных линейных и нелинейных систем в критических случаях*, Препринт АН УССР, Ин-т математики НАН України, Киев (1988).
7. А. А. Бойчук, *Конструктивные методы анализа краевых задач*, Наукова думка, Киев (1990).
8. Е. А. Гребеников, Ю. А. Рябов, *Конструктивные методы анализа нелинейных систем*, Наука, Москва (1979).

9. А. А. Бойчук, С. М. Чуйко, А. С. Чуйко, *Неавтономные периодические краевые задачи в особом критическом случае*, Нелін. коливання, **7**, № 1, 53 – 66 (2004).
10. A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko, *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems*, VSP, Utrecht; Boston (2004).
11. И. Г. Малкин, *Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний*, Гостехиздат, Ленинград; Москва (1949).
12. Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ*, Наука, Москва (1977).
13. С. М. Чуйко, *Про узагальнення теореми Ньютона-Канторовича у банаховому просторі*, Допов. НАН України, № 6, 22 – 31 (2018).
14. S. M. Chuiko, *To the generalization of the Newton – Kantorovich theorem*, Visn. V. N. Karazin Kharkiv Nat. Univ. Ser. Math., Appl. Math. Mech., **85**, № 1, 62 – 68 (2017).
15. А. С. Чуйко, *Область сходимости итерационной процедуры для слабонелинейной краевой задачи*, Нелін. коливання, **8**, № 2, 278 – 288 (2005).
16. С. М. Чуйко, О. Е. Пирус, *О приближенном решении автономных нетеровых краевых задач методом Ньютона*, Нелін. коливання, **15**, № 3, 407 – 421 (2012).
17. S. M. Chuiko, O. E. Pirus, *On the approximate solution of autonomous boundary-value problems by the Newton method*, J. Mat. Sci., **191**, № 3, 449 – 464 (2013).
18. S. Chuiko, *Weakly nonlinear boundary value problem for a matrix differential equation*, Miskolc Math. Notes, **17**, № 1, 139 – 150 (2016).
19. S. M. Chuiko, *Nonlinear matrix differential-algebraic boundary value problem*, Lobachevskii J. Math., **38**, № 2, 236 – 244 (2017).
20. С. М. Чуйко, О. В. Несмелова, Д. В. Сысоев, *Нелинейная периодическая задача для уравнения Дюффинга в критическом случае*, Пр. Ін-ту прикл. математики і механіки, **31**, 140 – 150 (2017).
21. А. А. Бойчук, *Нелинейные краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений*, Укр. мат. журн., **50**, № 2, 162 – 171 (1998).
22. С. М. Чуйко, *О приближенном решении краевых задач методом наименьших квадратов*, Нелін. коливання., **11**, № 4, 554 – 573 (2008).
23. С. М. Чуйко, О. В. Старкова, *О приближенном решении автономных краевых задач методом наименьших квадратов*, Нелін. коливання., **12**, № 4, 556 – 573 (2009).
24. S. M. Chuiko, E. V. Chuiko, I. A. Boichuk, *On the reduction of a Noetherian boundary-value problem to a first-order critical case*, J. Mat. Sci., **208**, № 5, 607 – 619 (2015).
25. А. А. Бойчук, *Построение периодических решений нелинейных систем в критических случаях*, Асимптотические методы, Киев (1985), сс. 24 – 30.
26. О. Б. Лыкова, А. А. Бойчук, *Построение периодических решений нелинейных систем в критических случаях*, Укр. мат. журн., **40**, № 1, 62 – 69 (1988).
27. С. М. Чуйко, Ан. А. Бойчук, И. А. Бойчук, *Нелинейные нетеровы краевые задачи в критическом случае второго порядка*, Нелін. коливання, **16**, № 2, 261 – 269 (2013).
28. С. М. Чуйко, *Нелинейные нетеровы краевые задачи в критическом случае*, Нелін. коливання, **13**, № 1, 115 – 132 (2010).
29. В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин, *Справочник по нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям*, Факториал, Москва (1997).
30. С. М. Чуйко, *Обобщение метода Ньютона – Канторовича для систем нелинейных вещественных уравнений*, Допов. НАН України, № 3, 3 – 9 (2020).

Получено 20.03.20