УДК 517.983

СЛАБКО ЗБУРЕНІ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ВИРОДЖЕНИМ ЯДРОМ У БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ

В. П. Журавльов, М. П. Фомін

Поліс. нац. ун-т
б-р Старий, 7, Житомир, 10008, Україна
e-mail: vfz2008@ukr.net
npfomin109@gmail.com

We consider weakly perturbed integro-differential equations with degenerate kernel in a Banach space. We obtain conditions of bifurcation of solutions of weakly perturbed integro-differential equations in Banach spaces from the point $\varepsilon = 0$. We propose a convergent iterative procedure for determination of solutions in the form of the series $\sum_{i=-1}^{+\infty} \varepsilon^i z_i(t)$ in powers of ε.

Розглянуто слабко збурені інтегро-диференціальні рівняння з виродженим ядром у банаховому просторі. Отримано умови біфуркації з точки $\varepsilon = 0$ розв'язків слабко збурених інтегро-диференціальних рівнянь у банахових просторах. Запропоновано збіжну ітераційну процедуру знаходження розв'язків у вигляді ряду $\sum_{i=-1}^{+\infty} \varepsilon^i z_i(t)$ за степенями ε.

При дослідженні умов виникнення та побудови загальних розв'язків слабко збурених інтегро-диференціальних рівнянь з виродженим ядром у банахових просторах суттєво використовуються методи теорії збурень, зокрема, методи малого параметра Ляпунова – Пуанкаре [1] та Вішіка – Люстерніка [2].

Дослідження слабкозбурених не всюди розв'язних сингулярних диференціальних і інтегро-диференціальних рівнянь у скінченновимірних просторах проводили О. А. Бойчук, Л. М. Шегда та І. А. Головацька [3, 4].

О. А. Бойчук і Є. В. Панасенко [5] з використанням підходу до дослідження диференціальних систем у банахових просторах, запропонованого в [6], дослідили умови виникнення розв'язків слабко збурених крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь у банахових просторах.

Розроблений у [7] загальний підхід до дослідження слабко збурених операторних рівнянь з узагальнено оборотними операторами в лінійній частині в банахових просторах широко застосовується при аналізі різних типів слабко збурених рівнянь. Так, у [8] досліджено слабко збурені інтегральні рівняння Фредгольма з виродженим ядром у банахових просторах.

Ця робота є продовженням досліджень умов виникнення та побудови розв'язків слабко збурених операторних рівнянь із узагальнено оборотними операторами в лінійній частині з урахуванням специфіки, притаманної інтегро-диференціальним рівнянням із виродженим ядром у банахових просторах.

Постановка задачі. Нехай $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$ — банахові простори, $\mathcal{I} = [a, b]$ — скінченний проміжок.

Розглянемо слабко збурене інтегро-диференціальне рівняння

$$(Lz)(t) \equiv \dot{z}(t) - M(t) \int\limits_a^b \big[W(s)z(s) + V(s)\dot{z}(s)\big] ds =$$

$$= f(t) + \varepsilon \int\limits_a^b \big[K(t,s)z(s) + K_1(t,s)\dot{z}(s)\big] ds, \tag{1}$$

де оператор-функція $M(t)$ діє з $\mathbf{B}_1$ у $\mathbf{B}_2$, сильно неперервна з нормою $|||M||| = \sup_{t\in\mathcal{I}}\|M(t)\|_{\mathbf{B}_1} = M_0 < \infty$, а оператор-функції $W(t)$ та $V(t)$ діють з $\mathbf{B}_2$ у $\mathbf{B}_1$, сильно неперервні з нормами $|||W||| = \sup_{t\in\mathcal{I}}\|W(t)\|_{\mathbf{B}_2} = W_0 < \infty$ і $|||V||| = \sup_{t\in\mathcal{I}}\|V(t)\|_{\mathbf{B}_2} = V_0 < \infty$, вектор-функція $f(t)$ діє з відрізка $\mathcal{I}$ у $\mathbf{B}_2$: $f(t) \in \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2) := \big\{ f(\cdot) : \mathcal{I} \to \mathbf{B}_2,\ |||f||| = \sup_{t\in\mathcal{I}} \|f(t)\| \big\}$, $\mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ — банахів простір неперервних на $\mathcal{I}$ вектор-функцій зі значеннями у $\mathbf{B}_2$, оператор-функції $K(t,s)$ та $K_1(t,s)$ визначені у квадраті $\mathcal{I}\times\mathcal{I}$ та діють із банахового простору $\mathbf{B}_2$ у $\mathbf{B}_2$ по кожній змінній, сильно неперервні по сукупності змінних $t,\ s$ з нормами

$$|||K||| = \sup_{t,s\in\mathcal{I}} \|K(t,s)\|_{\mathbf{B}_2} = K < \infty \qquad \text{та} \qquad |||K_1||| = \sup_{t,s\in\mathcal{I}} \|K(t,s)\|_{\mathbf{B}_2} = K_1 < \infty,$$

$\varepsilon << 1$ — малий параметр.

Розв'язком рівняння (1) будемо називати вектор-функцію $z(t)$, яка задовольняє це рівняння. При цьому $z(t) \in \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$, $\dot{z}(t) \in \mathbf{C}^1(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$, де $\mathbf{C}^1(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ — банахів простір неперервно диференційовних вектор-функцій з нормою

$$|||z||| = \sum_{k=0}^{1} \sup_{t\in\mathcal{I}} \|z^{(k)}(t)\|_{\mathbf{B}_2},$$

де $z^{(k)}(t)$ — k-та похідна від $z(t)$. Похідна $\dot{z}(t)$ розуміється в сенсі [6, с. 140].

Припустимо, що породжуюче інтегро-диференціальне рівняння

$$\dot{z}(t) - M(t) \int\limits_a^b \big[W(s)z(s) + V(s)\dot{z}(s)\big] ds = f(t), \tag{2}$$

одержане з (1), при $\varepsilon = 0$ не має розв'язків при довільних неоднорідностях $f(t) \in \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$.

Ставимо задачу: чи можна за допомогою лінійного збурення звести систему (2) до розв'язної? А якщо можна, то якими повинні бути складові збурених оператор-функцій $K(t,s)$, $K_1(t,s)$ в інтегро-диференціальній системі (1), щоб вона стала розв'язною при будь-яких неоднорідностях $f(t) \in \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$?

Ця задача буде розв'язуватися з використанням теорії узагальненого обернення операторів [9] і, зокрема, узагальненого обернення інтегральних операторів Фредгольма з виродженим ядром у банахових просторах [10], а також теореми про умови існування та побудови розв'язків операторних рівнянь з узагальнено оборотними операторами у банахових просторах [9, с. 115].

Попередні відомості. Для вирішення поставленої задачі необхідно отримати умови розв'язності та загальний вигляд розв'язків лінійного рівняння (2).

Як показано в [11], використовуючи заміну $\dot{z}(t) = y(t)$ або

$$z(t) = \int_a^t y(s)\,ds + c_0, \quad c_0 \in \mathbf{B}_2, \tag{3}$$

рівняння (2) зводимо до інтегрального рівняння

$$y(t) - M(t) \int_a^b N(s) y(s)\,ds = g(t), \tag{4}$$

де

$$N(s) = \int_s^b W(\tau) d\tau + V(s), \qquad g(t) = f(t) + M(t) W c_0,$$

$$W = \int_a^b W(s)\,ds, \quad W : \mathbf{B}_2 \to \mathbf{B}_1.$$

Позначимо

$$D = I_{\mathbf{B}_1} - \int_a^b N(s) M(s)\,ds, \quad D \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_1),$$

— обмежений узагальнено оборотний оператор [9]. Це означає, що існують обмежені проектори $\mathcal{P}_{N(D)}$, $\mathcal{P}_{Y_D}$ на нуль-простір $N(D)$ та підпростір $Y_D = \mathbf{B}_1 \ominus R(D)$ оператора D відповідно [12], D^- — обмежений узагальнено обернений оператор до оператора D [9, с. 76].

Відомо [10], що при виконанні умови

$$\mathcal{P}_{Y_D} \int_a^b N(s) g(s)\,ds = \mathcal{P}_{Y_D} \int_a^b N(s) \big[f(s) + M(s) W c_0 \big] ds = 0 \tag{5}$$

і лише при ній інтегральне рівняння (4) має сім'ю розв'язків

$$y(t) = M(t) \mathcal{P}_{N(D)} c + g(t) + M(t) D^- \int_a^b N(s) g(s)\,ds, \tag{6}$$

де c — довільний елемент банахового простору $\mathbf{B}_1$.

З умови (5), яка набуде вигляду

$$S c_0 = b_0, \tag{7}$$

знайдемо значення $c_0 \in \mathbf{B}_2$, при якому вона буде виконуватись. Тут

$$S = \mathcal{P}_{Y_D} \int_a^b N(s) M(s) W ds = \mathcal{P}_{Y_D} A W = \mathcal{P}_{Y_D} W, \quad S : \mathbf{B}_2 \to \mathbf{B}_1,$$

$$A = \int_a^b N(s)M(s)\,ds, \qquad b_0 = -\mathcal{P}_{Y_D} \int_a^b N(s)f(s)\,ds.$$

Нехай оператор $S \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_2, \mathbf{B}_1)$ узагальнено оборотний, а отже, нормально розв'язний. Операторне рівняння (7) розв'язне тоді і лише тоді, коли виконується умова [9]

$$\mathcal{P}_{Y_S} b_0 = \mathcal{P}_{Y_S}\mathcal{P}_{Y_D} \int_a^b N(s)f(s)\,ds = 0,$$

при виконанні якої і лише при ній рівняння (7) має сім'ю розв'язків

$$c_0 = \mathcal{P}_{N(S)}d + S^- b_0, \tag{8}$$

де $\mathcal{P}_{N(S)} : \mathbf{B}_2 \to N(S)$ та $\mathcal{P}_{Y_S} : \mathbf{B}_1 \to Y_S = \mathbf{B}_1 \ominus R(S)$ — обмежені проектори, $S^- : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_2$ — узагальнено обернений оператор до оператора S, d — довільний елемент банахового простору $\mathbf{B}_2$.

З урахуванням (8) після підстановки вектор-функції $g(s) = f(s) + M(s)W\big[\mathcal{P}_{N(S)}d + S^- b_0\big]$ у розв'язок (6) інтегрального рівняння (4) отримаємо його загальний розв'язок

$$y(t) = M(t)\big[\mathcal{P}_{N(D)}, \widetilde{D}\mathcal{P}_{N(S)}\big]\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} + f(t) + M(t)\big[D^- - \widetilde{D}S^-\mathcal{P}_{Y_D}\big] \int_a^b N(s)f(s)\,ds,$$

де $\widetilde{D} = (I_{\mathbf{B}_1} + D^- A)W,\ c \in \mathbf{B}_1,\ d \in \mathbf{B}_2$ — довільні сталі.

Тоді з (3) одержимо загальний розв'язок інтегро-диференціального рівняння (2):

$$z(t) = \int_a^t y(s)\,ds + c_0 =$$

$$= \Big[\widetilde{M}(t)\mathcal{P}_{N(D)},\ \big(\widetilde{M}(t)\widetilde{D}\mathcal{P}_{N(S)} + \mathcal{P}_{N(S)}\big)\Big]\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} + \tilde{f}(t) + F(t) =$$

$$= \Big[\widetilde{M}(t)\mathcal{P}_{N(D)},\ \big(\widetilde{M}(t)\widetilde{D}\mathcal{P}_{N(S)} + \mathcal{P}_{N(S)}\big)\Big]\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} + (L^- f)(t),$$

де

$$\widetilde{M}(t) = \int_a^t M(s)\,ds, \qquad \tilde{f}(t) = \int_a^t f(s)\,ds,$$

$$F(t) = \Big\{\widetilde{M}(t)\overline{D} - S^-\mathcal{P}_{Y_D}\Big\} \int_a^b N(s)f(s)\,ds, \qquad \overline{D} = D^- - \widetilde{D}S^-\mathcal{P}_{Y_D},$$

$$(L^- f)(t) = \tilde{f}(t) + \widetilde{M}(t)\overline{D} \int_a^b N(s)f(s)\,ds - S^-\mathcal{P}_{Y_D} \int_a^b N(s)f(s)\,ds$$

— обмежений узагальнено обернений оператор до оператора L [13].

Надалі для скорочення записів позначимо

$$X_1(t) = \widetilde{M}(t)\mathcal{P}_{N(D)}, \qquad X_2(t) = \widetilde{M}(t)\widetilde{D}\mathcal{P}_{N(S)} + \mathcal{P}_{N(S)}.$$

Таким чином, для інтегро-диференціального рівняння (2) справедлива така теорема [11].

Теорема 1. *Нехай оператор* D *належить* $\mathbf{GI}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_1)$ *та оператор* S *належить* $\mathbf{GI}(\mathbf{B}_2, \mathbf{B}_1)$. *Тоді однорідне* $(f(t) = 0)$ *інтегро-диференціальне рівняння має сім'ю розв'язків*

$$z(t) = \big[X_1(t),\ X_2(t)\big]\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix},$$

де $c \in \mathbf{B}_1,\ d \in \mathbf{B}_2$ *— довільні сталі.*

Неоднорідне інтегро-диференціальне рівняння (2) розв'язне для тих і лише тих $f(t) \in \mathbf{C}([a,b], \mathbf{B}_2)$, *які задовольняють умову*

$$\mathcal{P}_{Y_S}\mathcal{P}_{Y_D}\int\limits_a^b N(s)f(s)\,ds = 0,$$

і при цьому має сім'ю розв'язків

$$z(t) = \big[X_1(t),\ X_2(t)\big]\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} + (L^- f)(t).$$

Основний результат. Знайдемо умови виникнення розв'язків інтегро-диференціального рівняння (1).

Розв'язки рівняння (1) будемо шукати у вигляді ряду за степенями малого параметра ε, який містить від'ємну степінь ε:

$$z(t,\varepsilon) = \sum_{i=-1}^{+\infty} \varepsilon^i z_i(t). \tag{9}$$

Підставимо ряд (9) в інтегро-диференціальне рівняння (1) і прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях ε.

При ε^{-1} отримаємо однорідне інтегро-диференціальне рівняння

$$\dot{z}_{-1}(t) - M(t)\int\limits_a^b \big[W(s)z_{-1}(s) + V(s)\dot{z}_{-1}(s)\big]ds = 0 \tag{10}$$

для знаходження коефіцієнта $z_{-1}(t)$ ряду (9).

За теоремою 1 однорідне рівняння (10) має розв'язок

$$z_{-1}(t) = \big[X_1(t),\ X_2(t)\big]\begin{bmatrix} c_{-1} \\ d_{-1} \end{bmatrix}, \tag{11}$$

де $c_{-1} \in \mathbf{B}_1,\ d_{-1} \in \mathbf{B}_2$ — довільні елементи, які будуть визначені далі.

Прирівнюючи коефіцієнти при ε^0, отримуємо неоднорідне інтегро-диференціальне рівняння

$$\dot{z}_0(t) - M(t)\int\limits_a^b \big[W(s)z_0(s) + V(s)\dot{z}_0(s)\big]ds =$$

$$= f(t) + \int\limits_a^b \big[K(t,s)z_{-1}(s) + K_1(t,s)\dot{z}_{-1}(s)\big]ds \tag{12}$$

для визначення коефіцієнта $z_0(t)$ ряду (9).

За теоремою 1 лінійне неоднорідне інтегро-диференціальне рівняння (12) має розв'язки тоді та лише тоді, коли

$$\mathcal{P}_{Y_S}\mathcal{P}_{Y_D}\int\limits_a^b N(s)\left[f(s) + \int\limits_a^b K(s,\tau)z_{-1}(\tau) + K_1(s,\tau)\dot{z}_{-1}(s)\,d\tau\right]ds = 0.$$

Підставивши $z_{-1}(t)$ з (11), отримаємо рівняння

$$\mathcal{P}_{Y_S}\mathcal{P}_{Y_D}\int\limits_a^b N(s)\left\{f(s) + \int\limits_a^b \left[K(s,\tau)\big[X_1(\tau),\ X_2(\tau)\big]\begin{bmatrix} c_{-1} \\ d_{-1} \end{bmatrix} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + K_1(s,\tau)\big[\dot{X}_1(\tau),\ \dot{X}_2(\tau)\big]\begin{bmatrix} c_{-1} \\ d_{-1} \end{bmatrix}\right] d\tau\right\} ds = 0. \tag{13}$$

Позначивши

$$B_1 = \mathcal{P}_{Y_S}\mathcal{P}_{Y_D}\int\limits_a^b N(s)\int\limits_a^b \big[K(s,\tau)X_1(\tau) + K_1(s,\tau)\dot{X}_1(\tau)\big]d\tau\, ds, \quad B_1 \colon \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_1, \tag{14}$$

$$B_2 = \mathcal{P}_{Y_S}\mathcal{P}_{Y_D}\int\limits_a^b N(s)\int\limits_a^b \big[K(s,\tau)X_2(\tau) + K_1(s,\tau)\dot{X}_2(\tau)\big]d\tau\, ds, \quad B_2 \colon \mathbf{B}_2 \to \mathbf{B}_1, \tag{15}$$

з (13) отримаємо операторне рівняння для визначення елементів $c_{-1} \in \mathbf{B}_1$ та $d_{-1} \in \mathbf{B}_2$:

$$B_0\begin{bmatrix} c_{-1} \\ d_{-1} \end{bmatrix} = -\mathcal{P}_{Y_S}\mathcal{P}_{Y_D}\int\limits_a^b N(s)f(s)\,ds, \tag{16}$$

де $B_0 = \big[B_1,\ B_2\big]$ — операторна матриця.

Для розв'язання рівняння (16) скористаємося теорією узагальненого обернення операторних матриць [14].

Нехай оператор $B_1 \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_1)$ — узагальнено оборотний. Це означає, що існують обмежені проектори $\mathcal{P}_{N(B_1)} \colon \mathbf{B}_1 \to N(B_1)$ і $\mathcal{P}_{Y_{B_1}} \colon \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_1 \ominus R(B_1)$ та обмежений узагальнено обернений оператор B_1^-.

Операторна матриця $B_0 = \begin{bmatrix} B_1, & B_2 \end{bmatrix}$ має обмежену узагальнено обернену тоді і лише тоді, коли узагальнено оборотні оператори B_1 та $\widehat{B}_2 = \mathcal{P}_{Y_{B_1}} B_2 \colon \mathbf{B}_2 \to \mathbf{B}_1$ [14]. Нехай оператор $\widehat{B}_2 \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_2, \mathbf{B}_1)$ узагальнено оборотний. Тоді для нього існують обмежені проектори $\mathcal{P}_{N(\widehat{B}_2)} \colon \mathbf{B}_2 \to N(\widehat{B}_2)$ і $\mathcal{P}_{Y_{\widehat{B}_2}} \colon \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_1 \ominus R(\widehat{B}_1)$ та обмежений узагальнено обернений оператор $\widehat{B}_1^-$.

Наслідком узагальненої оборотності операторної матриці B_0 є нормальна розв'язність операторного рівняння (16). Тоді існують обмежені проектори $\mathcal{P}_{N(B_0)} \colon \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_2 \to N(B_0)$, $\mathcal{P}_{Y_{B_0}} \colon \mathbf{B}_1 \to Y_{B_0}$ [12] та обмежений узагальнено обернений оператор $B_0^- \colon \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_2$ до оператора B_0.

Рівняння (16) може бути [15] *однозначно розв'язним* $(\mathcal{P}_{N(B_0)} \equiv 0)$, *всюди розв'язним* $(\mathcal{P}_{Y_{B_0}} \equiv 0)$, *неоднозначно і не всюди розв'язним* $(\mathcal{P}_{N(B_0)} \neq 0,\ \mathcal{P}_{Y_{B_0}} \neq 0)$.

Розглянемо найбільш загальний випадок, коли рівняння (16) неоднозначно і не всюди розв'язне. Оскільки оператор B_0 нормально розв'язний, то, використовуючи теорему 3 з [14, с. 545] про розв'язність рівняння з операторною матрицею, маємо, що рівняння (16) розв'язне тоді та лише тоді, коли виконується умова [9, 16]

$$\mathcal{P}_{Y_{B_0}} \mathcal{P}_{Y_S} \mathcal{P}_{Y_D} \int\limits_a^b N(s) f(s)\, ds = 0, \tag{17}$$

при виконанні якої рівняння (16) має сім'ю розв'язків

$$\begin{bmatrix} c_{-1} \\ d_{-1} \end{bmatrix} = \mathcal{P}_{N(B_0)} \begin{bmatrix} \hat{c} \\ \hat{d} \end{bmatrix} - B_0^- \mathcal{P}_{Y_S} \mathcal{P}_{Y_D} \int\limits_a^b N(s) f(s)\, ds, \tag{18}$$

де

$$\mathcal{P}_{Y_{B_0}} = \mathcal{P}_{Y_{\widehat{B}_2}} \mathcal{P}_{Y_{B_1}}, \qquad \mathcal{P}_{N(B_0)} = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{N(B_1)} & -B_1^- B_2 \mathcal{P}_{N(\widehat{B}_2)} \\ 0 & \mathcal{P}_{N(\widehat{B}_2)} \end{bmatrix},$$

$$B_0^- = \begin{bmatrix} B_1^- - B_1^- B_2 \widehat{B}_2^- \mathcal{P}_{Y_{B_1}} \\ \widehat{B}_2^- \mathcal{P}_{Y_{B_1}} \end{bmatrix} \tag{19}$$

— узагальнено обернений оператор до оператора B_0, $\hat{c} \in \mathbf{B}_1$, $\hat{d} \in \mathbf{B}_2$ — довільні сталі вектори [14, с. 545].

Для скорочення записів позначимо

$$\widetilde{B}_1^- = B_1^- - B_1^- B_2 \widehat{B}_2^- \mathcal{P}_{Y_{B_1}}, \qquad \widetilde{B}_2^- = \widehat{B}_2^- \mathcal{P}_{Y_{B_1}}.$$

Тоді розв'язок (18) набуде вигляду

$$\begin{bmatrix} c_{-1} \\ d_{-1} \end{bmatrix} = \mathcal{P}_{N(B_0)} \begin{bmatrix} \hat{c} \\ \hat{d} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \widetilde{B}_1^- \\ \widetilde{B}_2^- \end{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_S} \mathcal{P}_{Y_D} \int\limits_a^b N(s) f(s)\, ds.$$

Підставивши $\operatorname{col}(c_{-1}, d_{-1})$ в (11), отримаємо загальний розв'язок однорідного інтегро-диференціального рівняння (10)

$$z_{-1}(t) = \big[X_1(t),\ X_2(t)\big]\mathcal{P}_{N(B_0)}\begin{bmatrix}\hat{c}\\ \hat{d}\end{bmatrix} -$$

$$- \big[X_1(t),\ X_2(t)\big]\begin{bmatrix}\widetilde{B}_1^-\\ \widetilde{B}_2^-\end{bmatrix}\mathcal{P}_{Y_S}\mathcal{P}_{Y_D}\int\limits_a^b N(s)f(s)\,ds.$$

Позначивши

$$\overline{B}_1^- = -\widetilde{B}_1^-\mathcal{P}_{Y_S}\mathcal{P}_{Y_D}, \qquad \overline{B}_2^- = -\widetilde{B}_2^-\mathcal{P}_{Y_S}\mathcal{P}_{Y_D}, \tag{20}$$

остаточно отримаємо

$$z_{-1}(t) = \big[X_1(t),\ X_2(t)\big]\mathcal{P}_{N(B_0)}\begin{bmatrix}\hat{c}\\ \hat{d}\end{bmatrix} + \bar{z}_{-1}(t),$$

де

$$\bar{z}_{-1}(t) = \big[X_1(t),\ X_2(t)\big]\begin{bmatrix}\overline{B}_1^-\\ \overline{B}_2^-\end{bmatrix}\int\limits_a^b N(s)f(s)\,ds.$$

Умова (17) буде завжди виконуватись, якщо виконується умова

$$\mathcal{P}_{Y_{B_0}}\mathcal{P}_{Y_S}\mathcal{P}_{Y_D} = 0. \tag{21}$$

При виконанні умови (21) і, як наслідок, умов (17) та (13) за теоремою 1 неоднорідне інтегро-диференціальне рівняння (12) має сім'ю розв'язків

$$z_0(t, c_0) = \big[X_1(t),\ X_2(t)\big]\begin{bmatrix}c_0\\ d_0\end{bmatrix} + \bar{z}_0(t), \tag{22}$$

де вектор $\operatorname{col}(c_0, d_0) \in \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_2$ буде визначений на наступному кроці,

$$\bar{z}_0(t) = L^-\left(f(\cdot) + \int\limits_a^b \big[K(\cdot, s)z_{-1}(s) + K_1(\cdot, s)\dot{z}_{-1}(s)\big]ds\right)(t) =$$

$$= \big(L^- f(\cdot)\big)(t) + L^-\left(\int\limits_a^b K(\cdot, s)\big[X_1(s),\ X_2(s)\big]\mathcal{P}_{N(B_0)}\begin{bmatrix}\hat{c}\\ \hat{d}\end{bmatrix}ds + \right.$$

$$\left. + \int\limits_a^b K_1(\cdot, s)\big[\dot{X}_1(s),\ \dot{X}_2(s)\big]\mathcal{P}_{N(B_0)}\begin{bmatrix}\hat{c}\\ \hat{d}\end{bmatrix}ds\right)(t) +$$

$$+ L^{-}\left(\int_a^b K(\cdot,s)\big[X_1(t),\ X_2(t)\big]\begin{bmatrix}\overline{B}_1^{-}\\ \overline{B}_2^{-}\end{bmatrix}\int_a^b N(s)f(s)\,ds +\right.$$

$$\left.+\int_a^b K_1(\cdot,s)\big[\dot{X}_1(t),\ \dot{X}_2(t)\big]\begin{bmatrix}\overline{B}_1^{-}\\ \overline{B}_2^{-}\end{bmatrix}\int_a^b N(s)f(s)\,ds\right)(t).$$

Таким чином,

$$\bar{z}_0(t) = H_{-1}(t)\mathcal{P}_{N(B_0)}\begin{bmatrix}\hat{c}\\ \hat{d}\end{bmatrix} + \widetilde{F}_{-1}(t), \tag{23}$$

де

$$H_{-1}(t) = \Big[\big(L^{-}\widetilde{K}X_1(\cdot)\big)(t),\ \big(L^{-}\widetilde{K}X_2(\cdot)\big)(t)\Big],$$

$$\widetilde{F}_{-1}(t) = \big(L^{-}f(\cdot)\big)(t) + \Big[\big(L^{-}\widetilde{K}X_1(\cdot)\big)(t),\ \big(L^{-}\widetilde{K}X_2(\cdot)\big)(t)\Big]\begin{bmatrix}\overline{B}_1^{-}\\ \overline{B}_2^{-}\end{bmatrix}\int_a^b N(\tau)f(\tau)\,d\tau,$$

а оператор $\widetilde{K}$ діє на операторну матрицю $\big[X_1(t),\ X_2(t)\big]$ за правилом

$$\Big(\widetilde{K}\big[X_1(*),\ X_2(*)\big]\Big)(t) = \Big(\big[\widetilde{K}X_1(*),\ \widetilde{K}X_2(*)\big]\Big)(t) =$$

$$= \left[\int_a^b \big(K(t,s)X_1(s) + K_1(t,s)\dot{X}_1(s)\big)\,ds,\right.$$

$$\left.\int_a^b \big(K(t,s)X_2(s) + K_1(t,s)\dot{X}_2(s)\big)\,ds\right]. \tag{24}$$

При ε^1 для визначення коефіцієнта $z_1(t)$ отримуємо інтегро-диференціальне рівняння

$$\dot{z}_1(t) - M(t)\int_a^b \big[W(s)z_1(s) + V(s)\dot{z}_1(s)\big]ds =$$

$$= \int_a^b \big[K(t,s)z_0(s) + K_1(t,s)\dot{z}_0(s)\big]ds. \tag{25}$$

З критерію розв’язності рівняння (25)

$$\mathcal{P}_{Y_S}\mathcal{P}_{Y_D}\int_a^b N(s)\int_a^b \big[K(s,\tau)z_0(\tau) + K_1(s,\tau)\dot{z}_0(s)\big]\,d\tau\,ds = 0$$

з урахуванням (22) одержуємо

$$\mathcal{P}_{Y_S}\mathcal{P}_{Y_D}\int_a^b N(s)\left\{\int_a^b \left[K(s,\tau)\left(\big[X_1(\tau),\ X_2(\tau)\big]\begin{bmatrix} c_0 \\ d_0 \end{bmatrix} + \bar{z}_0(\tau)\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + K_1(s,\tau)\left(\big[\dot{X}_1(\tau),\ \dot{X}_2(\tau)\big]\begin{bmatrix} c_0 \\ d_0 \end{bmatrix} + \dot{\bar{z}}_0(\tau)\right)\right] d\tau\right\} ds = 0.$$

Використовуючи позначення (14), (15), (24), з останньої рівності маємо операторне рівняння відносно $\mathrm{col}(c_0, d_0) \in \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_2$:

$$B_0\begin{bmatrix} c_0 \\ d_0 \end{bmatrix} = -\mathcal{P}_{Y_S}\mathcal{P}_{Y_D}\int_a^b N(s)(\widetilde{K}\bar{z}_0)(s)\,ds, \tag{26}$$

де $B_0 = \big[B_1,\ B_2\big]$ — операторна матриця, а оператор $\widetilde{K}$ діє на елемент $\bar{z}_0(t)$ за правилом

$$(\widetilde{K}\bar{z}_0)(t) = \int_a^b \Big(K(t,s)\bar{z}_0(s) + K_1(t,s)\dot{\bar{z}}_0(s)\Big)\,ds.$$

Операторне рівняння (26) за виконання умови (21) має сім'ю розв'язків

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ d_0 \end{bmatrix} = \mathcal{P}_{N(B_0)}\begin{bmatrix} \hat{c} \\ \hat{d} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{B}_1^{\,-} \\ \overline{B}_2^{\,-} \end{bmatrix}\int_a^b N(s)(\widetilde{K}\bar{z}_0)(s)\,ds =$$

$$= \mathcal{P}_{N(B_0)}\begin{bmatrix} \hat{c} \\ \hat{d} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{B}_1^{\,-} \\ \overline{B}_2^{\,-} \end{bmatrix}\int_a^b N(s)\widetilde{K}\left[H_{-1}(\cdot)\mathcal{P}_{N(B_0)}\begin{bmatrix} \hat{c} \\ \hat{d} \end{bmatrix} + \widetilde{F}_{-1}(\cdot)\right](s)\,ds =$$

$$= D_0\mathcal{P}_{N(B_0)}\begin{bmatrix} \hat{c} \\ \hat{d} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{c}_{-1} \\ \bar{d}_{-1} \end{bmatrix}, \tag{27}$$

де

$$D_0 = I + \begin{bmatrix} \overline{B}_1^{\,-} \\ \overline{B}_2^{\,-} \end{bmatrix}\int_a^b N(s)\Big(\widetilde{K}H_{-1}(\cdot)\Big)(s)\,ds,$$

$$\begin{bmatrix} \bar{c}_{-1} \\ \bar{d}_{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{B}_1^{\,-} \\ \overline{B}_2^{\,-} \end{bmatrix}\int_a^b N(s)\Big(\widetilde{K}\widetilde{F}_{-1}(\cdot)\Big)(s)\,ds,$$

I — тотожний оператор.

Підставивши (27) у (22), з використанням (20) та (23), отримаємо

$$z_0(t) = \big[X_1(t),\ X_2(t)\big]\left\{D_0\mathcal{P}_{N(B_0)}\begin{bmatrix}\hat{c}\\ \hat{d}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\bar{c}_{-1}\\ \bar{d}_{-1}\end{bmatrix}\right\} + H_{-1}(t)\mathcal{P}_{N(B_0)}\begin{bmatrix}\hat{c}\\ \hat{d}\end{bmatrix} + \widetilde{F}_{-1}(t) =$$

$$= \big[X_1(t),\ X_2(t)\big]D_0\mathcal{P}_{N(B_0)}\begin{bmatrix}\hat{c}\\ \hat{d}\end{bmatrix} + \big[X_1(t),\ X_2(t)\big]\begin{bmatrix}\bar{c}_{-1}\\ \bar{d}_{-1}\end{bmatrix} +$$

$$+ H_{-1}(t)\mathcal{P}_{N(B_0)}\begin{bmatrix}\hat{c}\\ \hat{d}\end{bmatrix} + \widetilde{F}_{-1}(t) =$$

$$= Y_0(t)\mathcal{P}_{N(B_0)}\begin{bmatrix}\hat{c}\\ \hat{d}\end{bmatrix} + \bar{z}_0(t),$$

де

$$Y_0(t) = H_{-1}(t) + \big[X_1(t),\ X_2(t)\big]D_0 =$$

$$= H_{-1}(t) + \big[X_1(t),\ X_2(t)\big]\left\{I + \begin{bmatrix}\overline{B}_1^-\\ \overline{B}_2^-\end{bmatrix}\int\limits_a^b N(s)\Big(\widetilde{K}H_{-1}(\cdot)\Big)(s)ds\right\} =$$

$$= \big[X_1(t),\ X_2(t)\big] + \left\{I * + \big[X_1(t),\ X_2(t)\big]\begin{bmatrix}\overline{B}_1^-\\ \overline{B}_2^-\end{bmatrix}\int\limits_a^b N(s)\big(\widetilde{K} *\big)\,ds\right\}H_{-1}(t) =$$

$$= \big[X_1(t),\ X_2(t)\big] + \widetilde{Y}_0(t),$$

$$\bar{z}_0(t) = \big[X_1(t),\ X_2(t)\big]\begin{bmatrix}\bar{c}_{-1}\\ \bar{d}_{-1}\end{bmatrix} + \widetilde{F}_{-1}(t) =$$

$$= \left\{I * + \big[X_1(t),\ X_2(t)\big]\begin{bmatrix}\overline{B}_1^-\\ \overline{B}_2^-\end{bmatrix}\int\limits_a^b N(s)\big(\widetilde{K} *\big)(s)ds\right\}\widetilde{F}_{-1}(t),$$

I — тотожний оператор.

При виконанні умови (21) інтегро-диференціальне рівняння (25) має сім'ю розв'язків

$$z_1(t, c_1) = \big[X_1(t),\ X_2(t)\big]\begin{bmatrix}c_1\\ d_1\end{bmatrix} + \bar{z}_1(t),$$

де вектор $\operatorname{col}[c_1, d_1] \in \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_2$ знайдемо на наступному кроці ітераційного процесу,

$$\bar{z}_1(t) = L^-\left(\int\limits_a^b \big[K(\cdot, s)z_0(s) + K_1(\cdot, s)\dot{z}_0(s)\big]ds\right)(t) =$$

$$= \left(L^-\widetilde{K}\left[Y_0(\cdot)\mathcal{P}_{N(B_0)}\begin{bmatrix}\hat{c}\\ \hat{d}\end{bmatrix} + \bar{z}_0(\cdot)\right]\right)(t) =$$

$$= \left(L^{-} \widetilde{K} \left[Y_0(\cdot) \mathcal{P}_{N(B_0)} \begin{bmatrix} \hat{c} \\ \hat{d} \end{bmatrix} (\cdot) \right] \right)(t) +$$

$$+ \left(L^{-} \left[I * + \big[X_1(\cdot),\ X_2(\cdot) \big] \begin{bmatrix} \overline{B}_1^{-} \\ \overline{B}_2^{-} \end{bmatrix} \int\limits_a^b N(s)(\widetilde{K}*)(s) ds \right] \widetilde{F}_{-1}(\cdot) \right)(t) =$$

$$= H_0(t) \mathcal{P}_{N(B_0)} \begin{bmatrix} \hat{c} \\ \hat{d} \end{bmatrix} + \widetilde{F}_0(t).$$

Тут

$$H_0(t) = \Big(L^{-} \big(\widetilde{K} Y_0 \big)(\cdot) \Big)(t),$$

$$\widetilde{F}_0(t) = \left(L^{-} \widetilde{K} \left[I * + \big[X_1(\cdot),\ X_2(\cdot) \big] \begin{bmatrix} \overline{B}_1^{-} \\ \overline{B}_2^{-} \end{bmatrix} \int\limits_a^b N(s) \big(\widetilde{K} * \big)\, ds \right] \widetilde{F}_{-1}(\cdot) \right)(t).$$

Діючи за індукцією, для визначення коефіцієнтів $z_i(t)$ при ε^i ряду (9) отримуємо інтегро-диференціальні рівняння

$$\dot{z}_i(t) - M(t) \int\limits_a^b \big[W(s) z_i(s) + V(s) \dot{z}_i(s) \big] ds =$$

$$= \int\limits_a^b \big[K(t,s) z_{i-1}(s) + K_1(t,s) \dot{z}_{i-1}(s) \big] ds, \quad i = 2, 3, \ldots . \tag{28}$$

З критеріїв розв'язності інтегро-диференціальних рівнянь (28)

$$\mathcal{P}_{Y_S} \mathcal{P}_{Y_D} \int\limits_a^b N(s) \int\limits_a^b \big[K(s,\tau) z_{i-1}(\tau) + K_1(s,\tau) \dot{z}_{i-1}(s) \big]\, d\tau\, ds = 0$$

одержуємо операторні рівняння

$$B_0 \begin{bmatrix} c_{i-1} \\ d_{i-1} \end{bmatrix} = -\mathcal{P}_{Y_S} \mathcal{P}_{Y_D} \int\limits_a^b N(s) \Big(\widetilde{K} \bar{z}_{i-1} \Big)(s)\, ds \tag{29}$$

для визначення сталих $\begin{bmatrix} c_{i-1} \\ d_{i-1} \end{bmatrix}$.

Операторні рівняння (29) за виконання умови (21) мають сім'ї розв'язків

$$\begin{bmatrix} c_{i-1} \\ d_{i-1} \end{bmatrix} = \mathcal{P}_{N(B_0)} \begin{bmatrix} \hat{c} \\ \hat{d} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{B}_1^{-} \\ \overline{B}_2^{-} \end{bmatrix} \int\limits_a^b N(s) \Big(\widetilde{K} \bar{z}_{i-1} \Big)(s)\, ds =$$

$$= \mathcal{P}_{N(B_0)} \begin{bmatrix} \hat{c} \\ \hat{d} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{B}_1^- \\ \overline{B}_2^- \end{bmatrix} \int\limits_a^b N(s) \widetilde{K} \left[H_{i-2}(\cdot) \mathcal{P}_{N(B_0)} \begin{bmatrix} \hat{c} \\ \hat{d} \end{bmatrix} + \widetilde{F}_{i-2}(\cdot) \right](s)\, ds =$$

$$= D_{i-1} \mathcal{P}_{N(B_0)} \begin{bmatrix} \hat{c} \\ \hat{d} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{c}_{i-1} \\ \bar{d}_{i-1} \end{bmatrix},$$

де

$$H_{i-2}(t) = \Big(L^- \big(\widetilde{K} Y_{i-1} \big)(\cdot) \Big)(t),$$

$$\widetilde{F}_{i-2}(t) = \left(L^- \widetilde{K} \left[I * + \big[X_1(\cdot), \;\; X_2(\cdot) \big] \begin{bmatrix} \overline{B}_1^- \\ \overline{B}_2^- \end{bmatrix} \int\limits_a^b N(s) \widetilde{K}(*) ds \right] \widetilde{F}_{i-1}(\cdot) \right)(t),$$

$$D_{i-1} = I + \begin{bmatrix} \overline{B}_1^- \\ \overline{B}_2^- \end{bmatrix} \int\limits_a^b N(s) \big(\widetilde{K} H_{i-2}(\cdot) \big)(s)\, ds,$$

$$\begin{bmatrix} \bar{c}_{i-1} \\ \bar{d}_{i-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{B}_1^- \\ \overline{B}_2^- \end{bmatrix} \int\limits_a^b N(s) \big(\widetilde{K} \widetilde{F}_{i-2}(\cdot) \big)(s)\, ds.$$

При виконанні умови (21) і, як наслідок, умови (29) інтегро-диференціальні рівняння (28) мають сім'ї розв'язків

$$z_i(t) = \big[X_1(t), \; X_2(t) \big] \begin{bmatrix} c_i \\ d_i \end{bmatrix} + \bar{z}_i(t) =$$

$$= \big[X_1(t), \; X_2(t) \big] \left\{ D_i \mathcal{P}_{N(B_0)} \begin{bmatrix} \hat{c} \\ \hat{d} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{c}_{i-1} \\ \bar{d}_{i-1} \end{bmatrix} \right\} + H_{i-1}(t) \mathcal{P}_{N(B_0)} \begin{bmatrix} \hat{c} \\ \hat{d} \end{bmatrix} + \widetilde{F}_{i-1}(t) =$$

$$= Y_i(t) \mathcal{P}_{N(B_0)} \begin{bmatrix} \hat{c} \\ \hat{d} \end{bmatrix} + \bar{z}_i(t),$$

де

$$Y_i(t) = H_{i-1}(t) + \big[X_1(t), \; X_2(t) \big] D_i =$$

$$= \big[X_1(t), \; X_2(t) \big] + \left[I * + \big[X_1(t), \; X_2(t) \big] \begin{bmatrix} \overline{B}_1^- \\ \overline{B}_2^- \end{bmatrix} \int\limits_a^b N(s) (\widetilde{K} *)\, ds \right] H_{i-1}(t) =$$

$$= \big[X_1(t), \; X_2(t) \big] + \widetilde{Y}_i(t),$$

$$\bar{z}_i(t) = \big[X_1(t),\ X_2(t)\big]\begin{bmatrix}\bar{c}_{i-1}\\ \bar{d}_{i-1}\end{bmatrix} + \widetilde{F}_{i-1}(t) =$$

$$= \left[I * + \big[X_1(t),\ X_2(t)\big]\begin{bmatrix}\overline{B}_1^-\\ \overline{B}_2^-\end{bmatrix}\int\limits_a^b N(s)(\widetilde{K}*)\,ds\right]\widetilde{F}_{i-1}(t),$$

$$\widetilde{F}_{i-1}(t) = \left(L^-\widetilde{K}\left[I * + \big[X_1(\cdot),\ X_2(\cdot)\big]\begin{bmatrix}\overline{B}_1^-\\ \overline{B}_2^-\end{bmatrix}\int\limits_a^b N(s)\big(\widetilde{K} *\big)ds\right]\widetilde{F}_{i-2}(\cdot)\right)(t).$$

Таким чином, маємо ітераційний алгоритм побудови коефіцієнтів ряду (9):

$$z_i(t) = \big[X_1(t),\ X_2(t)\big]\mathcal{P}_{N(B_0)}\begin{bmatrix}\hat{c}\\ \hat{d}\end{bmatrix} + \widetilde{Y}_i(t)\mathcal{P}_{N(B_0)}\begin{bmatrix}\hat{c}\\ \hat{d}\end{bmatrix} + \bar{z}_i(t),$$

$$\widetilde{Y}_i(t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad i = -1,\\ \left[I * + \big[X_1(t),\ X_2(t)\big]\begin{bmatrix}\overline{B}_1^-\\ \overline{B}_2^-\end{bmatrix}\int\limits_a^b N(s)(\widetilde{K}*)\,ds\right]H_{i-1}(t), & \text{якщо} \quad i = \overline{0,\infty};\end{cases}$$

$$H_{i-1}(t) = \begin{cases} \Big[\big(L^-\widetilde{K}X_1(\cdot)\big)(t),\ \big(L^-\widetilde{K}X_2(\cdot)\big)(t)\Big], & \text{якщо} \quad i = 0,\\ \Big(L^-\big(\widetilde{K}Y_i\big)(\cdot)\Big)(t), & \text{якщо} \quad i = \overline{1,\infty};\end{cases} \tag{30}$$

$$\bar{z}_i(t) = \begin{cases} \big[X_1(t),\ X_2(t)\big]\begin{bmatrix}\overline{B}_1^-\\ \overline{B}_2^-\end{bmatrix}\int\limits_a^b N(s)f(s)\,ds, & \text{якщо} \quad i = -1,\\ \left[I * + \big[X_1(t),\ X_2(t)\big]\begin{bmatrix}\overline{B}_1^-\\ \overline{B}_2^-\end{bmatrix}\int\limits_a^b N(s)(\widetilde{K}*)\,ds\right]\widetilde{F}_{i-1}(t), & \text{якщо} \quad i = \overline{0,\infty};\end{cases}$$

$$\widetilde{F}_{i-1}(t) = \begin{cases} \big(L^-f(\cdot)\big)(t) + \Big[\big(L^-\widetilde{K}X_1(\cdot)\big)(t),\ \big(L^-\widetilde{K}X_2(\cdot)\big)(t)\Big]\times & \\ \qquad \times\begin{bmatrix}\overline{B}_1^-\\ \overline{B}_2^-\end{bmatrix}\int\limits_a^b N(\tau)f(\tau)\,d\tau, & \text{якщо} \quad i = 0,\\ \Bigg(L^-\widetilde{K}\Bigg[I * + \big[X_1(\cdot),\ X_2(\cdot)\big]\times & \\ \qquad \times\begin{bmatrix}\overline{B}_1^-\\ \overline{B}_2^-\end{bmatrix}\int\limits_a^b N(s)\big(\widetilde{K} *\big)ds\Bigg]\widetilde{F}_{i-2}(\cdot)\Bigg)(t), & \text{якщо} \quad i = \overline{1,\infty}.\end{cases}$$

Таким чином, при виконанні умови (21) слабко збурене інтегро-диференціальне рівняння (1) має сім'ю розв'язків у вигляді ряду

$$
\begin{aligned}
z(t,\varepsilon) = \sum_{i=-1}^{+\infty} \varepsilon^i z_i(t) = \\
= \sum_{i=-1}^{+\infty} \varepsilon^i \big[X_1(t),\ X_2(t)\big] \mathcal{P}_{N(B_0)} \begin{bmatrix} \hat{c} \\ \hat{d} \end{bmatrix} + \\
+ \sum_{i=0}^{+\infty} \varepsilon^i \widetilde{Y}_i(t) \mathcal{P}_{N(B_0)} \begin{bmatrix} \hat{c} \\ \hat{d} \end{bmatrix} + \sum_{i=-1}^{+\infty} \varepsilon^i \bar{z}_i(t).
\end{aligned} \tag{31}
$$

Враховуючи той факт, що всі оператори, за допомогою яких визначаються коефіцієнти ряду (31), обмежені, можна показати, що існує ε_* таке, що для фіксованого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$ ряд (31) рівномірно збіжний.

Доведення рівномірної збіжності ряду (31) проводиться аналогічно наведеному в [7, 8].

Теорема 2. *Нехай оператор D належить $\mathbf{GI}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_1)$, оператор S належить $\mathbf{GI}(\mathbf{B}_2, \mathbf{B}_1)$ і породжуюче інтегро-диференціальне рівняння (2) при довільній неоднорідності $f(t) \in \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ не має розв'язків.*

Тоді, якщо оператор B_1 належить $\mathbf{GI}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_1)$, оператор $\widehat{B}_2$ належить $\mathbf{GI}(\mathbf{B}_2, \mathbf{B}_1)$ і

$$
\mathcal{P}_{Y_{B_0}} \mathcal{P}_{Y_S} \mathcal{P}_{Y_D} = 0,
$$

то слабко збурене інтегро-диференціальне рівняння (1) при довільній неоднорідності $f(t) \in \in \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ має сім'ю розв'язків у вигляді абсолютно збіжного при довільних фіксованих $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$ ряду (31), коефіцієнти якого визначаються за допомогою ітераційного алгоритму (30).

Зауваження 1. Якщо $\mathcal{P}_{N(B_0)} = 0$, то операторні рівняння (16), (26), (29) на кожному кроці ітераційного процесу будуть n-нормальними і однозначно розв'язними [17].

Тоді за виконання умови

$$
\mathcal{P}_{Y_{B_0}} \mathcal{P}_{Y_S} \mathcal{P}_{Y_D} = 0
$$

рівняння (1) буде мати єдиний розв'язок у вигляді ряду $z(t,\varepsilon) = \sum_{i=-1}^{+\infty} \varepsilon^i \bar{z}_i(t)$. Коефіцієнти цього ряду визначаються за допомогою ітераційного алгоритму (30), в якому оператор B_0^- (19) буде лівим оберненим оператором $(B_0)_l^{-1}$.

Зауваження 2. Якщо $\mathcal{P}_{Y_{B_0}} = 0$, то операторні рівняння (16), (26), (29) на кожному кроці ітераційного процесу будуть d-нормальними і скрізь розв'язними [17]. Такий випадок може статися, якщо один з операторів B_1 або B_2 оборотний [14, с. 550].

Тоді умова (17) буде завжди виконана і рівняння (1) при довільній $f(t)$ буде мати сім'ю розв'язків у вигляді ряду (31), коефіцієнти якого визначаються за допомогою ітераційного алгоритму (30), в якому оператор B_0^- (19) буде правим оберненим оператором $(B_0)_r^{-1}$.

Література

1. А. М. Ляпунов, *Общая задача об устойчивости движения*, Гостехиздат, Москва (1950).
2. М. И. Вишик, Л. А. Люстерник, *Решение некоторых задач о возмущениях в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений*, Успехи мат. наук, **15**, вып. 3, 3 – 80 (1960).
3. A. A. Boichuk, L. M. Shegda, *Bifurcation of solutions of singular Fredholm boundary value problems*, Differ. Equ., **47**, № 4, 453 – 461 (2011).

4. І. А. Головацька, *Слабкозбурені системи інтегро-диференціальних рівнянь*, Нелін. коливання, **15**, № 2, 151 – 164 (2012).
5. А. А. Бойчук, Є. В. Панасенко, *Слабкозбурені крайові задачі для диференціальних рівнянь у банаховому просторі*, Нелін. коливання, **13**, № 3, 291 – 304 (2010).
6. Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн, *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве*, Наука, Москва (1970).
7. В. Ф. Журавлев, *Слабовозмущенные операторные уравнения в банаховых пространствах*, Укр. мат. журн., 2017, **69**, № 6, 751 – 764.
8. V. F. Zhuravlev, N. P. Fomin, *Weakly perturbed Fredholm integral equations with degenerate kernels in Banach spaces*, J. Math. Sci., **229**, № 4, 85 – 97 (2018).
9. А. А. Бойчук, В. Ф. Журавлев, А. М. Самойленко, *Нормально разрешимые краевые задачи*, Наук. думка, Киев (2019).
10. V. P. Zhuravl'ov, *Generalized inversion of Fredholm integral operators with degenerate kernels in Banach spaces*, J. Math. Sci., **212**, № 3, 275 – 289 (2016).
11. A. A. Boichuk, V. F. Zhuravlev, *Solvability criterion of integro-differential equations with degenerate kernel in Banach spaces*, Nonlinear Dyn. Syst. Theory, **18**, № 4, 331 – 341 (2018).
12. М. М. Попов, *Доповнювальні простори і деякі задачі сучасної геометрії просторів Банаха*, Математика сьогодні'07, вип. 13, 78 – 116 (2007).
13. В. Ф. Журавлев, *Обобщенно обратный оператор к интегро-дифференциальному в банаховом пространстве*, Нелін. коливання, **22**, № 2, 202 – 219 (2019).
14. В. Ф. Журавлев, Н. П. Фомин, П. Н. Забродский, *Условия разрешимости и представление решений уравнений с операторными матрицами*, Укр. мат. журн., **71**, № 4, 537 – 552 (2019).
15. С. Г. Крейн, *Линейные уравнения в банаховом пространстве*, Наука, Москва (1971).
16. A. M. Samoilenko, A. A. Boichuk, V. F. Zhuravlev, *Linear boundary value problems for normally solvable operator equations in a Banach space*, Differ. Equ., **50**, № 3, 1 – 11 (2014).
17. В. Ф. Журавлев, *Критерий разрешимости и представление решений линейных $n(d)$-нормальных операторных уравнений в банаховом пространстве*, Укр. мат. журн., **62**, № 2, 186 – 202 (2010).

Одержано 24.03.20