УДК 517.968.7

ПРИМЕНЕНИЕ МОДИФИКАЦИИ ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОГО МЕТОДА К МНОГОТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ВОЛЬТЕРРА

О. Д. Нуржанов

Каракалпак. гос. ун-т им. Бердаха, Нукус
ул. Академика Ч. Абдирова, 1, Нукус, 742000, Узбекистан
e-mail: orinbay-nurjanov@mail.ru

We substantiate the application of a modification of the numerical-analytical method of successive approximations to the solution of multipoint boundary-value problems for Volterra-type integro-differential equations.

Обґрунтовується застосування модифікації чисельно-аналітичного методу послідовних наближень до розв'язання багатоточкових крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь типу Вольтерра.

1. Введение. Многие задачи физики и техники приводят к исследованию краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений [1]. Поэтому важное значение имеет распространение эффективных методов исследования решений обыкновенных дифференциальных уравнений на интегро-дифференциальные уравнения [2–4].

В данной работе к исследованию решений многоточечной краевой задачи для систем интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра применяется модификация численно-аналитического метода последовательных приближений [3, 5–7].

2. Постановка задачи. Рассмотрим нелинейную систему интегро-дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f\left(t, x, \int\limits_0^t \varphi(t,s,x(s))\,ds\right) \tag{1}$$

при линейных многоточечных краевых условиях вида

$$\sum_{i=0}^{p} A_i x(t_i) = d, \quad 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{p-1} < t_p = T, \tag{2}$$

где $x,\ f,\ \varphi,\ d$ — точки n-мерного евклидова пространства $E_n;\ A_i$ — постоянные $(n \times n)$-мерные матрицы такие, что

$$\det\left[\sum_{i=0}^{p} t_i A_i\right] \neq 0, \qquad \det\left[\sum_{i=0}^{p} A_i\right] \neq 0. \tag{3}$$

Пусть выполняются следующие условия:

1) функции $f(t,x,y)$ и $\varphi(t,s,x)$ определены и непрерывны в области

$$t \in [0,T], \quad 0 \le s \le t \le T, \quad x \in D, \quad y \in D_1, \tag{4}$$

где D — замкнутая ограниченная область евклидова пространства $E_n,\ D_1:\|y\|\le Th_\varphi$ — шар евклидова пространства $E_n,\ h_\varphi=\max\limits_{\substack{t,s\in[0,T]\\ x\in D}}\|\varphi(t,s,x)\|$.

2) для всех $(t,x,y),\ (t,x',y'),\ (t,s,x)$ и (t,s,x') из области (4) выполняются неравенства

$$\begin{gathered}\big|f(t,x,y)-f(t,x',y')\big|\le K_1|x-x'|+K_2|y-y'|,\\ \big|\varphi(t,s,x)-\varphi(t,s,x')\big|\le K_3|x-x'|,\end{gathered}\tag{5}$$

где $K_l=\{k_{ij}^l\},\ k_{ij}^l\ge 0,\ i,j=\overline{1,n},\ l=1,2,3;\ |f|=\big(|f_1|,|f_2|,\ldots,|f_n|\big)$ и неравенство между векторами понимается покомпонентно;

3) множество D_β точек $x_0\in E_n$, содержащихся в области D вместе со своей β-окрестностью, не пусто:

$$D_\beta\ne\varnothing,\tag{6}$$

где

$$\begin{gathered}\beta=\frac{T}{2}M+\beta_1(x_0),\\ M=\left(\max_{\substack{t\in[0,T]\\ x\in D,y\in D_1}}|f_1(t,x,y)|,\ldots,\max_{\substack{t\in[0,T]\\ x\in D,y\in D_1}}|f_n(t,x,y)|\right),\\ \beta_1(x_0)=\left|H\left(d-\sum_{i=0}^{p}A_ix_0\right)\right|+\frac{T}{2}GM,\\ H=\left[\sum_{i=1}^{p}\frac{t_i}{T}A_i\right]^{-1},\quad G=|H|\sum_{i=1}^{p-1}|A_i|;\end{gathered}\tag{7}$$

4) наибольшее собственное значение $\lambda(Q)$ матрицы $Q=\dfrac{T}{2}(Q_1+Q_2)$ меньше единицы:

$$\lambda(Q)<1,\tag{8}$$

где $Q_1=K_1+TK_2K_3,\ Q_2=GQ_1$.

При этих условиях сначала приведем алгоритм численно-аналитического метода для краевой задачи (1), (2), а затем изучим обоснование применимости модификации этого метода к приближенному решению рассматриваемой краевой задачи.

3. Формулировка результатов и их доказательства. Согласно схеме численно-аналитического метода [5, 8] последовательные приближения к решению краевой задачи (1), (2) строятся по итерационной формуле

$$\begin{aligned}x_m(t,x_0)=x_0+\int_0^t\Bigg[f\left(\tau,x_{m-1}(\tau,x_0),\int_0^\tau\varphi(\tau,s,x_{m-1}(s,x_0))\,ds\right)-\\ -\frac{1}{T}\int_0^T f\left(\tau,x_{m-1}(\tau,x_0),\int_0^\tau\varphi(\tau,s,x_{m-1}(s,x_0))\,ds\right)d\tau\Bigg]d\tau+\end{aligned}$$

$$+\frac{t}{T}H\left\{d-\sum_{i=0}^{p}A_ix_0-\sum_{i=1}^{p-1}A_i\int\limits_0^{t_i}\left[f\left(\tau,x_{m-1}(\tau,x_0),\int\limits_0^{\tau}\varphi(\tau,s,x_{m-1}(s,x_0))\,ds\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{T}\int\limits_0^{T}f\left(\tau,x_{m-1}(\tau,x_0),\int\limits_0^{\tau}\varphi(\tau,s,x_{m-1}(s,x_0))\,ds\right)d\tau\right]d\tau\right\},\quad m=1,2,\ldots,\tag{9}$$

начиная с нулевого приближения $x_0(t,x_0)=x_0$.

При выполнении условий 1 – 4 можно доказать сходимость последовательности функций вида (9) к функции $x^*(t,x_0)$, которая является решением интегрального уравнения

$$x(t,x_0)=x_0+\int\limits_0^{t}\left[f\left(\tau,x(\tau,x_0),\int\limits_0^{\tau}\varphi(\tau,s,x(s,x_0))\,ds\right)+\Delta(x_0)\right]d\tau,\tag{10}$$

где

$$\Delta(x_0)=\frac{1}{T}H\left\{d-\sum_{i=0}^{p}A_ix_0-\sum_{i=1}^{p-1}A_i\int\limits_0^{t_i}\left[f\left(\tau,x(\tau,x_0),\int\limits_0^{\tau}\varphi(\tau,s,x(s,x_0))\,ds\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{T}\int\limits_0^{T}f\left(\tau,x(\tau,x_0),\int\limits_0^{\tau}\varphi(\tau,s,x(s,x_0))\,ds\right)d\tau\right]d\tau\right\}-$$

$$-\frac{1}{T}\int\limits_0^{T}f\left(\tau,x(\tau,x_0),\int\limits_0^{\tau}\varphi(\tau,s,x(s,x_0))\,ds\right)d\tau,\tag{11}$$

и, кроме того, $x^*(t,x_0)$ удовлетворяет краевым условиям (2).

С другой стороны, заданное интегро-дифференциальное уравнение (1) эквивалентно уравнению

$$x(t)=x_0+\int\limits_0^{t}f\left(\tau,x(\tau),\int\limits_0^{\tau}\varphi(\tau,s,x(s))\,ds\right)d\tau.$$

Поэтому вопрос решения краевой задачи (1), (2) сводится к нахождению такого начального значения x_0, при котором вектор-функция $\Delta(x_0)$ вида (11), где $x(t,x_0)=x^*(t,x_0)$, обращается в нуль.

При этом для отклонения предельной функции $x^*(t,x_0)$ последовательности (9) от $x_m(t,x_0)$ имеет место оценка

$$\left|x^*(t,x_0)-x_m(t,x_0)\right|\le Q^m(E-Q)^{-1}\beta(x_0).\tag{12}$$

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть функции $f(t,x,y)$ и $\varphi(t,s,x)$, характеризующие систему интегро-дифференциальных уравнений (1), определены, непрерывны в области (4) и выполняются условия (5), (6), (8).*

Тогда последовательность функций вида (9), удовлетворяющих краевым условиям (2), равномерно сходится при $m \to \infty$ относительно области $(t,x_0) \in [0,T] \times D_\beta$ к предельной функции $x^*(t,x_0)$. При этом функция $x^*(t,x_0)$, проходящая при $t=0$ через точку $x^*(0,x_0)=x_0$, является решением интегрального уравнения (10) и удовлетворяет краевым условиям (2). Кроме того, для отклонения $x^*(t,x_0)$ от $x_m(t,x_0)$ для всех $m \geq 1$ верна оценка (12).

Теорема 2. *Если выполняются условия теоремы 1, то для того чтобы решение $x=x^*(t)$ интегро-дифференциального уравнения (1), проходящее при $t=0$ через точку $x^*(0)=x_0$, являлось и решением краевой задачи (1), (2), необходимо и достаточно, чтобы определяющая функция $\Delta(x_0)$ вида (11) в точке x_0 обращалась в нуль: $\Delta(x_0)=0$, где $x=x^*(t,x_0)$ — предельная функция последовательности (9). В этом случае $x^*(t)=x^*(t,x_0)$ и для отклонения $x^*(t)$ от приближенного решения $x_m(t,x_0)$ вида (9) справедлива оценка (12).*

Справедливость этих теорем можно установить таким же образом, как и в случае двухточечной краевой задачи для интегро-дифференциальных уравнений вида (1) [9].

Для многоточечной краевой задачи (1), (2) оценку (12) удается улучшить модифицированием итерационного процесса (9). Одним из возможных подходов подобной модификации является комбинирование различных численно-аналитических методов, в частности, метода последовательных приближений и коллокации. Такое комбинирование основано на использовании приближенного решения, найденного методом коллокации, в качестве начального приближения в численно-аналитическом методе последовательных приближений [6]. С этой целью мы применим метод алгебраической коллокации к приближенному решению краевой задачи (1), (2). Согласно этому методу [5, 6, 10] приближенное решение $x_k(t)$ краевой задачи (1), (2) ищется в виде

$$x_k(t) = d + R^{-1}\sum_{j=1}^{k+1} H_j W_j + \sum_{j=1}^{k+1} W_j t^j, \tag{13}$$

где $R=\sum_{i=0}^{p} A_i,\ H_j = -\sum_{i=0}^{p} t_i^j A_i$.

При этом неизвестные векторные коэффициенты $W_j = (W_{j1}, W_{j2}, \ldots, W_{jn}),\ j=1,2,\ldots$ $\ldots, k+1$, находятся из $n(k+1)$ определяющих уравнений

$$\frac{dx_k(t_i)}{dt} = f\left(t_i, x_k(t_i), \int\limits_0^{t_i} \varphi(t_i,s,x_k(s))\,ds\right), \quad i=1,2,\ldots,k+1, \tag{14}$$

где $t_1, t_2, \ldots, t_{k+1}$ — специальным образом выбранные точки на интервале $(0,T)$.

При условии существования решения $x^\circ(t)$ краевой задачи (1), (2) можно установить, что приближенное решение $x_k(t)$, найденное согласно (13), (14), равномерно сходится к решению $x^\circ(t)$, а $\dot{x}_k(t)$ — среднеквадратически к $\dot{x}^\circ(t)$.

Для улучшения оценки сходимости (12), полученной численно-аналитическим методом, модифицируем итерационный процесс (9). В качестве нулевого приближения будем выбирать k-е приближение $x_k(t)$, полученное методом алгебраической коллокации. Итак, вместо итерационного процесса (9) рассматриваем последовательные приближения, определенные по следующей итерационной формуле:

$$\begin{aligned}\tilde{x}_m(t,x_0) = x_0 + x_k(0) + \int\limits_0^t \Bigg[f\left(\tau, \tilde{x}_{m-1}(\tau,x_0), \int\limits_0^\tau \varphi(\tau,s,\tilde{x}_{m-1}(s,x_0))\,ds\right) - \\ - \frac{1}{T}\int\limits_0^T f\left(\tau, \tilde{x}_{m-1}(\tau,x_0), \int\limits_0^\tau \varphi(\tau,s,\tilde{x}_{m-1}(s,x_0))\,ds\right)d\tau\Bigg]d\tau + \\ + \frac{t}{T}H\Bigg\{ d - \sum_{i=0}^{p} A_i(x_0 + x_k(0)) - \\ - \sum_{i=1}^{p-1} A_i \int\limits_0^{t_i} \Bigg[f\left(\tau, \tilde{x}_{m-1}(\tau,x_0), \int\limits_0^\tau \varphi(\tau,s,\tilde{x}_{m-1}(s,x_0))\,ds\right) - \\ - \frac{1}{T}\int\limits_0^T f\left(\tau, \tilde{x}_{m-1}(\tau,x_0), \int\limits_0^\tau \varphi(\tau,s,\tilde{x}_{m-1}(s,x_0))\,ds\right)d\tau\Bigg]d\tau\Bigg\}, \quad m = 1,2,\ldots,\end{aligned} \tag{15}$$

где $\tilde{x}_0(t,x_0) = x_k(t)$. Здесь нулевое приближение выбрано на основании k-го приближения $x_k(t)$, полученного методом алгебраической коллокации, а x_0 — это параметр-поправка к начальному значению, найденному из приближенного решения $x_k(t)$. При этом все функции последовательности (15) удовлетворяют краевым условиям (2) и при $t = 0$ проходят через точку $x_0 + x_k(0)$, т. е.

$$\tilde{x}_m(0,x_0) = x_0 + x_k(0) = z_0(x_0), \quad m = 1,2,\ldots. \tag{16}$$

Из соотношения (15) на основании леммы 2.1 [5] имеем

$$\begin{aligned}\left|\tilde{x}_m(t,x_0) - z_0(x_0)\right| \le \Bigg| \int\limits_0^t \Bigg[f\left(\tau, \tilde{x}_{m-1}(\tau,x_0), \int\limits_0^\tau \varphi(\tau,s,\tilde{x}_{m-1}(s,x_0))\,ds\right) - \\ - \frac{1}{T}\int\limits_0^T f\left(\tau, \tilde{x}_{m-1}(\tau,x_0), \int\limits_0^\tau \varphi(\tau,s,\tilde{x}_{m-1}(s,x_0))\,ds\right)d\tau\Bigg]d\tau\Bigg| + \\ + \left| H\left(d - \sum_{i=0}^{p} A_i(x_0 + x_k(0))\right)\right| + \\ + |H|\sum_{i=1}^{p-1}|A_i| \Bigg| \int\limits_0^{t_i} \Bigg[f\left(\tau, \tilde{x}_{m-1}(\tau,x_0), \int\limits_0^\tau \varphi(\tau,s,\tilde{x}_{m-1}(s,x_0))\,ds\right) -\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{T}\int\limits_0^T f\left(\tau, \tilde{x}_{m-1}(\tau,x_0), \int\limits_0^\tau \varphi(\tau,s,\tilde{x}_{m-1}(s,x_0))\,ds\right)d\tau\Bigg]d\tau\Bigg| \le$$

$$\le \frac{T}{2}M + \left|H\left(d - \sum_{i=0}^p A_i(x_0 + x_k(0))\right)\right| + \frac{T}{2}GM = \tilde{\beta}(x_0), \quad m = 1,2,\ldots,$$

т. е.

$$\left|\tilde{x}_m(t,x_0) - z_0(x_0)\right| \le \tilde{\beta}(x_0), \tag{17}$$

где

$$\tilde{\beta}(x_0) = \frac{T}{2}M + \tilde{\beta}_1(x_0), \qquad \tilde{\beta}_1(x_0) = \left|H\left(d - \sum_{i=0}^p A_i(x_0 + x_k(0))\right)\right| + \frac{T}{2}GM. \tag{18}$$

Если множество $\tilde{D}_\beta$ точек $x_0 \in E_n$, для которых точки $x_0 + x_k(0) = z_0$ содержатся в области D вместе со своей $\tilde{\beta}$-окрестностью, не пусто, то из неравенства (17) следует, что для всех $m = 1,2,\ldots,$ $t \in [0,T]$, и каждого $x_0 \in \tilde{D}_\beta$ все функции $\tilde{x}_m(t,x_0)$ вида (15) не выходят из области D.

Для доказательства равномерной сходимости функций $\tilde{x}_m(t,x_0)$ оценим разность $\tilde{x}_{m+j}(t,x_0) - \tilde{x}_m(t,x_0)$ при любом $j \ge 1$.

На основании соотношения (15) имеем

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1(t,x_0) - \tilde{x}_0(t,x_0) &= \tilde{x}_1(t,x_0) - x_k(t) = \\ &= x_0 + x_k(0) + \int\limits_0^t \left[f(\tau,x_k(\tau),y_k(\tau)) - \frac{1}{T}\int\limits_0^T f(\tau,x_k(\tau),y_k(\tau))d\tau\right]d\tau + \\ &\quad + \frac{t}{T}H\left\{d - \sum_{i=0}^p A_i(x_0 + x_k(0)) - \sum_{i=1}^{p-1} A_i\int\limits_0^{t_i}[f(\tau,x_k(\tau),y_k(\tau)) - \right. \\ &\quad \left. -\frac{1}{T}\int\limits_0^T f(\tau,x_k(\tau),y_k(\tau))d\tau\Bigg]d\tau\right\} - x_k(t) = \\ &= x_0 + \gamma_k(t),\end{aligned} \tag{19}$$

где

$$y_k(\tau) = \int\limits_0^\tau \varphi(\tau,s,x_k(s))\,ds,$$

$$\gamma_k(t) = x_k(0) + \int\limits_0^t \left[f(\tau, x_k(\tau), y_k(\tau)) - \frac{1}{T} \int\limits_0^T f(\tau, x_k(\tau), y_k(\tau)) d\tau \right] d\tau +$$

$$+ \frac{t}{T} H \left\{ d - \sum_{i=0}^{p} A_i (x_0 + x_k(0)) - \sum_{i=1}^{p-1} A_i \int\limits_0^{t_i} \left[f(\tau, x_k(\tau), y_k(\tau)) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{T} \int\limits_0^T f(\tau, x_k(\tau), y_k(\tau)) d\tau \right] d\tau \right\} - x_k(t).$$

Оценивая разность (19), получаем

$$\left| \tilde{x}_1(t, x_0) - \tilde{x}_0(t, x_0) \right| \le |x_0| + \gamma_k = \mu_k(x_0), \tag{20}$$

где $\gamma_k = \max_{t \in [0,T]} |\gamma_k(t)|$.

Теперь на основании (15) составим разность $\tilde{x}_2(t, x_0) - \tilde{x}_1(t, x_0)$ и оценим ее с помощью неравенств (5), (20) и леммы 2.1 [5]:

$$\left| \tilde{x}_2(t, x_0) - \tilde{x}_1(t, x_0) \right| \le$$

$$\le \left(1 - \frac{t}{T}\right) \int\limits_0^t \left[K_1 |\tilde{x}_1(\tau, x_0) - \tilde{x}_0(\tau, x_0)| + K_2 K_3 \int\limits_0^\tau |\tilde{x}_1(s, x_0) - \tilde{x}_0(s, x_0)| ds \right] d\tau +$$

$$+ \frac{t}{T} \int\limits_t^T \left[K_1 |\tilde{x}_1(\tau, x_0) - \tilde{x}_0(\tau, x_0)| + K_2 K_3 \int\limits_0^\tau |\tilde{x}_1(s, x_0) - \tilde{x}_0(s, x_0)| ds \right] d\tau +$$

$$+ |H| \sum_{i=1}^{p-1} |A_i| \left\{ \left(1 - \frac{t_i}{T}\right) \int\limits_0^{t_i} \left[K_1 |\tilde{x}_1(\tau, x_0) - \tilde{x}_0(\tau, x_0)| + \right.\right.$$

$$\left. + K_2 K_3 \int\limits_0^\tau |\tilde{x}_1(s, x_0) - \tilde{x}_0(s, x_0)| ds \right] d\tau +$$

$$\left. + \frac{t_i}{T} \int\limits_{t_i}^T \left[K_1 |\tilde{x}_1(\tau, x_0) - \tilde{x}_0(\tau, x_0)| + K_2 K_3 \int\limits_0^\tau |\tilde{x}_1(s, x_0) - \tilde{x}_0(s, x_0)| ds \right] d\tau \right\} \le$$

$$\le \alpha_1(t)(K_1 + T K_2 K_3) \mu_k + |H| \sum_{i=1}^{p-1} |A_i| \alpha_1(t_i)(K_1 + T K_2 K_3) \mu_k \le$$

$$\le \frac{T}{2} \left(Q_1 + |H| \sum_{i=1}^{p-1} |A_i| Q_1 \right) \mu_k(x_0) = Q \mu_k(x_0),$$

где

$$\alpha_1(t) = 2t\left(1 - \frac{t}{T}\right) \le \frac{T}{2}, \quad t \in [0,T], \qquad \alpha_1(t_i) \le \frac{T}{2}, \quad t_i \in [0,T],$$

$$Q = \frac{T}{2}\left(Q_1 + |H|\sum_{i=1}^{p-1}|A_i|Q_1\right) = \frac{T}{2}(Q_1 + Q_2),$$

$$Q_1 = K_1 + TK_2K_3, \qquad Q_2 = GQ_1, \qquad G = |H|\sum_{i=1}^{p-1}|A_i|.$$

Методом математической индукции можно показать, что

$$\left|\tilde{x}_{m+1}(t,x_0) - \tilde{x}_m(t,x_0)\right| \le Q^m \mu_k(x_0) \tag{21}$$

для всех $m = 1, 2, \ldots,\ t \in [0,T]$ и $x_0 \in \tilde{D}_\beta$.

Из неравенства (21) с учетом условия (8) следует

$$\left|\tilde{x}_{m+j}(t,x_0) - \tilde{x}_m(t,x_0)\right| \le \sum_{i=1}^{j} Q^{m+i}\mu_k(x_0) \le Q^m \sum_{i=1}^{\infty} Q^i \mu_k(x_0) = Q^m(E-Q)^{-1}\mu_k(x_0). \tag{22}$$

Последнее неравенство с учетом условия (8) доказывает равномерную относительно $(t,x_0) \in [0,T] \times \tilde{D}_\beta$ сходимость при $m \to \infty$ последовательности (15):

$$\lim_{m\to\infty} \tilde{x}_m(t,x_0) = \tilde{x}^*(t,x_0). \tag{23}$$

Поскольку все функции последовательности (15) удовлетворяют краевым условиям (2), то предельная функция $\tilde{x}^*(t,x_0)$ также удовлетворяет этим условиям. При этом из соотношения (22) при $j \to \infty$ следует оценка

$$\left|\tilde{x}^*(t,x_0) - \tilde{x}_m(t,x_0)\right| \le Q^m(E-Q)^{-1}\mu_k(x_0). \tag{24}$$

Если в (15) перейти к пределу при $m \to \infty$ и учесть (23), то видно, что предельная функция $\tilde{x}^*(t,x_0)$ является решением интегрального уравнения

$$x(t) = x_0 + x_k(0) + \int\limits_0^t \Bigg\{ f\left(\tau, x(\tau), \int\limits_0^\tau \varphi(\tau,s,x(s))\,ds\right) -$$

$$- \frac{1}{T}\int\limits_0^T f\left(\tau, x(\tau), \int\limits_0^\tau \varphi(\tau,s,x(s))\,ds\right) d\tau +$$

$$+ \frac{1}{T}H\Bigg[d - \sum_{i=0}^{p} A_i(x_0 + x_k(0)) -$$

$$- \sum_{i=1}^{p-1} A_i \int\limits_0^{t_i}\Bigg[f\left(\tau, x(\tau), \int\limits_0^\tau \varphi(\tau,s,x(s))\,ds\right) -$$

$$-\frac{1}{T}\int_0^T f\left(\tau, x(\tau), \int_0^\tau \varphi(\tau, s, x(s))\,ds\right)d\tau\Bigg]d\tau\Bigg]\Bigg\}\,d\tau, \tag{25}$$

удовлетворяющим при $t = 0$ начальному условию $x(0) = x_0 + x_k(0)$. Поэтому функция $\tilde{x}^*(t, x_0)$ вида (23) является и решением краевой задачи (1), (2), как только вектор-функция

$$\Delta(x_0) = \frac{1}{T}H\Bigg\{d - \sum_{i=0}^{p} A_i(x_0 + x_k(0)) -$$
$$-\sum_{i=1}^{p-1} A_i \int_0^{t_i}\Bigg[f\left(\tau, \tilde{x}^*(\tau, x_0), \int_0^\tau \varphi(\tau, s, \tilde{x}^*(s, x_0))\,ds\right) -$$
$$-\frac{1}{T}\int_0^T f\left(\tau, \tilde{x}^*(\tau, x_0), \int_0^\tau \varphi(\tau, s, \tilde{x}^*(s, x_0))\,ds\right)d\tau\Bigg]d\tau\Bigg\} -$$
$$-\frac{1}{T}\int_0^T f\left(\tau, \tilde{x}^*(\tau, x_0), \int_0^\tau \varphi(\tau, s, \tilde{x}^*(s, x_0))\,ds\right)d\tau \tag{26}$$

в точке x_0 обращается в нуль: $\Delta(x_0) = 0$.

Итак, справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть правая часть системы интегро-дифференциальных уравнений (1) удовлетворяет условиям 1 – 4. Предположим также, что функция $x_k(t)$, полученная с помощью метода алгебраической коллокации (13), (14), не выходит из области D и множество $\tilde{D}_\beta$ точек $x_0 \in E_n$, для которых точки $x_0 + x_k(0) = z_0$ содержатся в области D вместе со своей β-окрестностью, не пусто, где $\beta = \tilde{\beta}(x_0)$ определено в (18). Тогда:*

1) последовательность функций $\tilde{x}_m(t, x_0)$ вида (15), удовлетворяющих краевым условиям (2) для всех $m = 1, 2, \ldots$ и произвольных $x_0 \in \tilde{D}_\beta$, равномерно сходится при $m \to \infty$ относительно $(t, x_0) \in [0, T] \times \tilde{D}_\beta$ к предельной функции $\tilde{x}^*(t, x_0)$, которая проходит при $t = 0$ через точку $x_0 + x_k(0)$, удовлетворяет краевым условиям (2) и интегральному уравнению (25).

2) для того чтобы решение $x = x^*(t)$ системы интегро-дифференциальных уравнений (1), удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = x_0 + x_k(0)$, совпадало с точным решением исходной краевой задачи (1), (2), необходимо и достаточно, чтобы определяющая функция $\Delta(x_0)$ вида (26) в точке x_0 обращалась в нуль: $\Delta(x_0) = 0$, где $\tilde{x}^*(t, x_0)$ — предельная функция последовательности (15). Более того, при этих условиях $x^*(t) = \tilde{x}^*(t, x_0)$ и для отклонения приближенных решений $\tilde{x}_m(t, x_0)$ вида (15) от точного решения $x^*(t)$ справедлива оценка (24).

При достаточно большом $k \geq k_0$ за счет выбора нулевого приближения $\tilde{x}_0(t, x_0) = x_k(t)$ всегда можно добиться, чтобы $\mu_k(x_0) < M$. Поэтому, сопоставляя оценки (12) и (24), можно заключить, что итерационный процесс (15) по сравнению с (9) имеет более быструю сходимость.

Вопрос существования решений краевой задачи (1), (2) связан с вопросом существования нулей точной определяющей функции $\Delta(x_0)$ вида (26). Найти $\Delta(x_0)$ можно лишь приближенно, вычисляя, например, приближенную определяющую функцию

$$\Delta_m(x_0) = \frac{1}{T} H \left\{ d - \sum_{i=0}^{p} A_i (x_0 + x_k(0)) - \right.$$
$$- \sum_{i=1}^{p-1} A_i \int_0^{t_i} \left[f\left(\tau, \tilde{x}_m(\tau, x_0), \int_0^{\tau} \varphi(\tau, s, \tilde{x}_m(s, x_0))\, ds\right) - \right.$$
$$\left.\left. - \frac{1}{T} \int_0^{T} f\left(\tau, \tilde{x}_m(\tau, x_0), \int_0^{\tau} \varphi(\tau, s, \tilde{x}_m(s, x_0))\, ds\right) d\tau \right] d\tau \right\} -$$
$$- \frac{1}{T} \int_0^{T} f\left(\tau, \tilde{x}_m(\tau, x_0), \int_0^{\tau} \varphi(\tau, s, \tilde{x}_m(s, x_0))\, ds\right) d\tau. \tag{27}$$

На основании (27) введем в рассмотрение приближенное определяющее уравнение

$$\Delta_m(x_0) = \frac{1}{T} H \left\{ d - \sum_{i=0}^{p} A_i (x_0 + x_k(0)) - \right.$$
$$- \sum_{i=1}^{p-1} A_i \int_0^{t_i} \left[f\left(\tau, \tilde{x}_m(\tau, x_0), \int_0^{\tau} \varphi(\tau, s, \tilde{x}_m(s, x_0))\, ds\right) - \right.$$
$$\left.\left. - \frac{1}{T} \int_0^{T} f\left(\tau, \tilde{x}_m(\tau, x_0), \int_0^{\tau} \varphi(\tau, s, \tilde{x}_m(s, x_0))\, ds\right) d\tau \right] d\tau \right\} -$$
$$- \frac{1}{T} \int_0^{T} f\left(\tau, \tilde{x}_m(\tau, x_0), \int_0^{\tau} \varphi(\tau, s, \tilde{x}_m(s, x_0))\, ds\right) d\tau = 0. \tag{28}$$

Тогда возникает задача: как, исходя из функций (27), сделать вывод о нулях функции (26), а следовательно, о существовании решений исходной краевой задачи (1), (2).

Для решения этой задачи оценим разность $\Delta(x_0) - \Delta_m(x_0)$. При $m \geq 1$ из (26), (27) с учетом условия Липшица (5) и оценки (24) получаем следующее неравенство:

$$\big|\Delta(x_0) - \Delta_m(x_0)\big| \leq \frac{1}{T} |H| \sum_{i=1}^{p-1} |A_i| \left\{ \int_0^{t_i} \left[f\left(\tau, \tilde{x}^*(\tau, x_0), \int_0^{\tau} \varphi(\tau, s, \tilde{x}^*(s, x_0))\, ds\right) - \right.\right.$$
$$- f\left(\tau, x_m(\tau, x_0), \int_0^{\tau} \varphi(\tau, s, x_m(s, x_0))\, ds\right) -$$
$$- \frac{1}{T} \int_0^{T} \left[f\left(\tau, \tilde{x}^*(\tau, x_0), \int_0^{\tau} \varphi(\tau, s, \tilde{x}^*(s, x_0))\, ds\right) - \right.$$

$$-f\left(\tau, x_m(\tau, x_0), \int_0^\tau \varphi(\tau, s, x_m(s, x_0))\, ds\right)\Bigg]\, d\tau\Bigg]\, d\tau\Bigg\} +$$

$$+\frac{1}{T}\int_0^T \left| f\left(\tau, \tilde{x}^*(\tau, x_0), \int_0^\tau \varphi(\tau, s, \tilde{x}^*(s, x_0))\, ds\right) - \right.$$

$$\left. -f\left(\tau, x_m(\tau, x_0), \int_0^\tau \varphi(\tau, s, x_m(s, x_0))\, ds\right)\right| d\tau \le$$

$$\le \frac{1}{T} G \Bigg\{ \left(1 - \frac{t_i}{T}\right) \int_0^{t_i} \Bigg[K_1 |\tilde{x}^*(\tau, x_0) - x_m(\tau, x_0)| +$$

$$+ K_2 K_3 \int_0^\tau |\tilde{x}^*(s, x_0) - x_m(s, x_0)| ds \Bigg] d\tau +$$

$$+ \frac{t_i}{T} \int_{t_i}^T \Bigg[K_1 |\tilde{x}^*(\tau, x_0) - x_m(\tau, x_0)| +$$

$$+ K_2 K_3 \int_0^\tau |\tilde{x}^*(s, x_0) - x_m(s, x_0)| ds \Bigg] d\tau +$$

$$+ \frac{1}{T} \int_0^T \Bigg[K_1 |\tilde{x}^*(\tau, x_0) - x_m(\tau, x_0)| +$$

$$+ K_2 K_3 \int_0^\tau |\tilde{x}^*(s, x_0) - x_m(s, x_0)| ds \Bigg] \Bigg\} d\tau \le$$

$$\le \left[\frac{1}{T}\alpha_1(t_i) G Q_1 + Q_1\right] Q^m (E - Q)^{-1} \mu_k(x_0) \le$$

$$\le \left[Q_1 + \frac{1}{2} Q_2\right] Q^m (E - Q)^{-1} \mu_k(x_0),$$

т. е.

$$\left|\Delta(x_0) - \Delta_m(x_0)\right| \le \left[Q_1 + \frac{1}{2} Q_2\right] Q^m (E - Q)^{-1} \mu_k(x_0). \tag{29}$$

С помощью оценки (29) можно доказать следующее утверждение, определяющее достаточные условия существования решения краевой задачи (1), (2).

Теорема 4. *Пусть выполняются все условия теоремы 3 и, кроме того, выполняются следующие условия:*

а) существует выпуклая, замкнутая область $D^1 \subset \tilde{D}_\beta$ такая, что для определенного порядка m приближения $\tilde{x}_m(t, x_0)$ вида (15) приближенное определяющее уравнение $\Delta_m(x_0) = 0$ имеет в области D^1 единственное решение $x_0 = x_{0m}$ ненулевого индекса;

б) на границе Γ_{D^1} области D^1 выполнено неравенство

$$\inf_{x_0 \in \Gamma_{D^1}} |\Delta_m(x_0)| > \left[Q_1 + \frac{1}{2} Q_2\right] Q^m (E - Q)^{-1} \mu_k(x_0). \tag{30}$$

Тогда краевая задача (1), (2) имеет решение $x = x^*(t)$, причем такое, что его начальное значение при $t = 0$ определяется некоторой точкой $x_0 = x_0^* \in D^1$, т. е.

$$x^*(0) = x_0^* + x_k(0), \quad x_0^* \in D^1,$$

где $x_k(0)$ — начальное значение приближенного решения $x_k(t)$, полученного с помощью метода алгебраической коллокации (13), (14).

Доказательство может быть проведено по аналогии с теоремой 13.1 из [5]. При этом гомотопность векторных полей Δ_m и Δ обеспечивается неравенством (29) и условием (30). Следовательно, в области D^1 существует точка x_0^*, являющаяся особой для поля Δ, т. е. $\Delta(x_0^*) = 0$. Тогда в силу теоремы 3 решение $x^*(t)$ интегро-дифференциального уравнения (1), проходящее при $t = 0$ через точку $x_0^* \in D^1$, действительно является решением исходной краевой задачи (1), (2).

4. Пример. Проиллюстрируем схему модифицированного численно-аналитического метода на конкретном примере.

Пусть на отрезке $[0, 1]$ требуется проинтегрировать систему интегро-дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} \dot{x}_1 = -0{,}05 x_2 + 0{,}0025 t^2 + 0{,}05, \\ \dot{x}_2 = 0{,}05 x_2 + \int\limits_0^t 0{,}1 x_1(s)\, ds + 0{,}1 t, \end{gathered} \tag{31}$$

определенную в области

$$\begin{gathered} (t, s, x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \times D \times D_1, \\ D\colon \big\{x = (x_1, x_2) \in E_2,\ |x_1| \le 0{,}5,\ |x_2| \le 0{,}5\big\}, \\ D_1 : |y| \le 0{,}1, \end{gathered} \tag{32}$$

при краевых условиях

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(0) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(0{,}5) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(1) = \begin{bmatrix} 0{,}05 \\ 0{,}075 \end{bmatrix}. \tag{33}$$

Легко видеть, что

$$\det(t_1 A_1 + t_2 A_2) \ne 0, \qquad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -0{,}5 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \beta_1(x_0) = \begin{bmatrix} 0{,}05 - 2x_{01} \\ 0{,}08875 - 2x_{02} \end{bmatrix}.$$

В данном случае

$$M = \begin{bmatrix} 0{,}0775 \\ 0{,}175 \end{bmatrix}, \qquad K_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}05 \\ 0 & 0{,}05 \end{bmatrix}, \qquad K_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}025 \\ 0{,}05 & 0{,}05 \end{bmatrix},$$

$$\beta(x_0) = \frac{T}{2} M + \beta_1(x_0) = \begin{bmatrix} 0{,}08875 - 2x_{01} \\ 0{,}17625 - 2x_{02} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta^{(1)}(x_0) \\ \beta^{(2)}(x_0) \end{bmatrix},$$

$$D_\beta\colon\ |x_1| \le 0{,}5 - \beta^{(1)}(x_0), \qquad |x_2| \le 0{,}5 - \beta^{(2)}(x_0)$$

и множество D_β не пусто для тех точек x_0, для которых $\beta^{(1)}(x_0) \le 0{,}5$, $\beta^{(2)}(x_0) \le 0{,}5$. Кроме того, наибольшее собственное число матрицы Q меньше единицы: $\lambda_{\max}(Q) = 0{,}025 + \sqrt{0{,}001875} < 1$. Следовательно, к рассматриваемой области (32) краевой задачи (31), (33) можно было бы применить схему численно-аналитического метода последовательных приближений, основанную на итерационной формуле (9).

Для нахождения приближенного решения краевой задачи (31), (33) используем алгоритм модифицированного метода последовательных приближений вида (15).

С этой целью вычислим приближенное решение $x_k(t)$ по методу алгебраической коллокации (13), (14). Пусть $k = 1$. Тогда после соответствующих вычислений получим первое приближение $x_1(t) = (x_{11}(t), x_{12}(t))$ в виде

$$\begin{aligned} x_{11}(t) &= 0{,}026246 + 0{,}047596t - 0{,}000087t^2, \\ x_{12}(t) &= 0{,}048771 + 0{,}004813t + 0{,}047622t^2. \end{aligned} \tag{34}$$

Приближенное решение (34) задает при $t = 0$ начальные значения $x_k(0) = x_1(0) = (0{,}026246; 0{,}048771)$. Поэтому легко видеть, что $\tilde{D}_\beta \ne \varnothing$.

Таким образом, все условия теоремы 3 выполнены и на ее основании для краевой задачи (31), (33) последовательные приближения (15) равномерно сходятся. По формуле (15) для этой задачи (31), (33) получаем первое приближение $\tilde{x}_1(t, x_0) = \big(\tilde{x}_{11}(t, x_0), \tilde{x}_{12}(t, x_0)\big)$ вида

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{11}(t, x_0) &= x_{01} + 0{,}026246 - 0{,}002412t - 0{,}00012t^2 + 0{,}00004t^3 - 2x_{01}t, \\ \tilde{x}_{12}(t, x_0) &= x_{02} + 0{,}048771 - 0{,}096375t + \\ &\quad + 0{,}048808t^2 + 0{,}0000004t^3 + 0{,}0000007t^4 - 2x_{02}t. \end{aligned} \tag{35}$$

Приближенное начальное значение $x_0 = (x_{01}, x_{02})$ решения найдем из определяющего уравнения нулевого приближения, получаемого из (28) при $m = 0$:

$$\Delta_0(x_0) = 0.$$

Корнем этого уравнения является вектор

$$x_0 = x_0^{(0)} = (-0{,}024986; -0{,}0494025).$$

Подставляя это приближенное начальное значение в формулу (35), находим первое приближение $\tilde{x}_1(t, x_0)$ к точному решению исходной краевой задачи (31), (33):

$$\tilde{x}_{11}(t, x_0) = 0{,}00126 + 0{,}04756t - 0{,}00012t^2 - 0{,}00004t^3,$$

$$\tilde{x}_{12}(t, x_0) = -0{,}000632 + 0{,}00243t + 0{,}048808t^2 + 0{,}0000004t^3 - 0{,}0000007t^4.$$

Непосредственная проверка показывает, что функция $x = x^*(t) = (0{,}05t; 0{,}05t^2)$ — это точное решение исходной краевой задачи (31), (33).

Расчеты показывают, что приближения низкого порядка обеспечивают достаточно высокую точность приближенного решения.

Литература

1. Я. В. Быков, *О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений*, Киргиз. гос. ун-т, Фрунзе (1957).
2. A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko, *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems*, WSP, Utrecht; Boston (2004).
3. M. Ronto, A. M. Samoilenko, *Numerical-analytic methods in the theory of boundary-value problems*, World Sci., Singapore (2000).
4. С. Т. Мынбаева, А. Н. Станжицкий, Н. А. Марчук, *Усреднение в краевых задачах для систем интегро-дифференциальных уравнений*, Укр. мат. журн., **72**, № 2, 245 – 266 (2020).
5. А. М. Самойленко, Н. И. Ронто, *Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений*, Наук. думка, Киев (1992).
6. А. М. Самойленко, Н. И. Ронто, *Модификация численно-аналитического метода последовательных приближений для краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений*, Укр. мат. журн., **42**, № 8, 1107 – 1116 (1990).
7. А. М. Самойленко, *Об одной последовательности полиномов и радиусе сходимости ее суммы Пуассона – Абеля*, Укр. мат. журн., **55**, № 7, 926 – 934 (2003).
8. Н. И. Ронто, Т. В. Савина, *Численно-аналитический метод для трехточечных краевых задач*, Укр. мат. журн., **46**, № 4, 393 – 403 (1994).
9. О. Д. Нуржанов, О. О. Курбанбаев, К. А. Баймуратова, *Численно-аналитический метод исследования краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра*, Вестн. Каракалпак. гос. ун-та им. Бердаха, Нукус, № 1-2, 10 – 16 (2013).
10. Н. И. Ронто, *О методе коллокации для многоточечной краевой задачи*, Укр. мат. журн., **35**, № 4, 524 – 527 (1983).

Получено 15.02.20,
после доработки — 21.05.20