УДК 517.95

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ДЛЯ СЛАБКО НЕЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ ТИПУ ЕЙДЕЛЬМАНА З НЕВІДОМИМ МОЛОДШИМ КОЕФІЦІЄНТОМ

Н. П. Процах

Нац. лісотех. ун-т України
вул. Генерала Чупринки, 103, Львів, 79057, Україна
e-mail: protsakh@ukr.net

We consider the inverse problem with the integral overdetermination condition for the weakly nonlinear Eidel'man-type equation with unknown time-dependent minor coefficient. Sufficient conditions of the existence and uniqueness of a generalized solution of this problem are obtained for $t \in [0,T]$, where the number T depends on the initial data of the problem.

Розглянуто обернену задачу з інтегральною умовою перевизначення для слабко нелінійного рівняння типу Ейдельмана, в якому невідомим є молодший коефіцієнт, залежний від часової змінної t. Отримано достатні умови існування та єдиності узагальненого розв'язку цієї задачі для $t \in [0,T]$, де число T визначається вихідними даними задачі.

1. Вступ. У цій статті отримано достатні умови існування та єдиності узагальненого розв'язку оберненої задачі з інтегральними умовами перевизначення для слабко нелінійного рівняння типу Ейдельмана з невідомим молодшим коефіцієнтом. Одночасно з розв'язком мішаної задачі для рівняння типу Ейдельмана визначено його молодший коефіцієнт, залежний від часової змінної. Рівняння містить три групи змінних. Похідні його розв'язку, які є в рівнянні, за різними змінними мають різні найвищі порядки: перший — за часовою змінною, другий — за просторовими змінними та четвертий — за частиною просторових змінних. Для одержання основного результату використано метод послідовних наближень та оцінки розв'язків відповідної прямої задачі.

Зауважимо, що у 1960 р. С. Д. Ейдельман узагальнив рівняння, параболічні за Петровським [1]. У працях [2, 3] встановлено умови однозначної розв'язності та властивості розв'язків мішаних (прямих) задач для нелінійних рівнянь типу Ейдельмана в обмежених та необмежених областях, в [4] — оберненої задачі у випадку, коли в рівнянні невідома права частина, а в [5 – 8] — задачі Коші.

Обернені задачі для параболічних рівнянь з інтегральними умовами перевизначення, в яких визначався невідомий молодший коефіцієнт, вивчено в багатьох працях (див. [9 – 11] і наведену в них бібліографію). У працях [12 – 16] для встановлення умов існування та єдиності розв'язку обернених задач для ультрапараболічних рівнянь із невідомим молодшим коефіцієнтом чи правими частинами використано метод послідовних наближень. Задачі відшукання невідомого молодшого коефіцієнта для слабко нелінійних рівнянь типу Ейдельмана раніше не вивчалися.

2. Формулювання задачі. Нехай $\mathcal{D}_x \subset \mathbb{R}^k$ і $\mathcal{D}_y \subset \mathbb{R}^l$ — обмежені області з межами $\partial\mathcal{D}_x \in C^1$ і $\partial\mathcal{D}_y \in C^1,\ k,l \in \mathbb{N}$. Позначимо $\Omega = \mathcal{D}_x \times \mathcal{D}_y,\ Q_\tau = \Omega \times (0,\tau),\ S_\tau = \partial\Omega \times (0,\tau)$, де $\tau \in (0,T],\ T < \infty,\ x \in \mathcal{D}_x,\ y \in \mathcal{D}_y,\ z = (x,y) \in \Omega,\ n = k + l,\ \nu$ — одиничний вектор зовнішньої нормалі до межі $\partial\mathcal{D}_x \times \mathcal{D}_y \times (0,T)$.

Уведемо простір

$$V_1(\Omega)=\left\{u:\ u\in W_0^{1,2}(\Omega),\ \ u_{x_ix_j}\in L^2(\Omega),\ \ i,j\in\{1,\ldots,k\},\ \ \frac{\partial u}{\partial\nu}\bigg|_{\partial\mathcal{D}_x\times\mathcal{D}_y}=0\right\}.$$

В області Q_T розглянемо таку задачу: встановити достатні умови існування та єдиності пари функцій $(u(z,t),\ c(t))$, яка задовольняє рівняння

$$u_t+\sum_{i,j=1}^{k}(a_{ij}(z,t)u_{x_ix_j})_{x_ix_j}-\sum_{i,j=1}^{n}(b_{ij}(z,t)u_{z_i})_{z_j}+(c(t)+q(z))u+g(z,t,u)=f(z,t), \quad (1)$$

а також початкові і крайові умови

$$u(z,0)=u_0(z),\quad z\in\Omega, \quad (2)$$

$$u|_{S_T}=0,\qquad \frac{\partial u}{\partial\nu}\bigg|_{\partial\mathcal{D}_x\times\mathcal{D}_y\times(0,T)}=0 \quad (3)$$

та умову перевизначення

$$\int\limits_{\Omega}K(z)u(z,t)\,dz=E(t),\quad t\in[0,T], \quad (4)$$

у сенсі такого означення.

Означення 1. *Пару функцій* $(u(z,t),c(t))$ *назвемо узагальненим розв'язком задачі (1)–(4), якщо* $u\in L^2\big(0,T;V_1(\Omega)\big)\cap C\big([0,T];L^2(\Omega)\big),\ u_t\in L^2(Q_T),\ c\in C([0,T])$; *також вона задовольняє рівність*

$$\int\limits_{Q_\tau}\left(u_tv+\sum_{i,j=1}^{k}a_{ij}(z,t)u_{x_ix_j}v_{x_ix_j}+\right.$$

$$\left.+\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}(z,t)u_{z_i}v_{z_j}+(c(t)+q(z))uv+g(z,t,u)v\right)dz\,dt=$$

$$=\int\limits_{Q_\tau}f(z,t)v\,dz\,dt \quad (5)$$

для всіх $\tau\in(0,T]$ *і всіх функцій* $v\in L^2\big(0,T;V_1(\Omega)\big)$ *та умови (2), (4).*

Нехай для коефіцієнтів рівняння (1) та вихідних даних виконуються такі умови:

(A1): $a_{ij}\in C([0,T];L^\infty(\Omega)),\ a_{ij,t}\in L^\infty(Q_T),\ a_{ij}(z,t)\ge a_0>0$ для майже всіх $(z,t)\in\in Q_T,\ i,j\in\{1,\ldots,k\}$;

(A2): $b_{ij}\in C([0,T];L^\infty(\Omega)),\ b_{ij,t}\in L^\infty(Q_T),\ i,j\in\{1,\ldots,n\};\ \sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}(z,t)\xi_i\xi_j\ge\ge b_0|\xi|^2$ для всіх $\xi\in\mathbb{R}^n$ і для майже всіх $(z,t)\in Q_T,\ b_0>0$;

(A3): $q\in L^\infty(\Omega),\ q(z)\ge q_0$ для майже всіх $z\in\Omega$, де q_0 — стала;

(A4): $g(z,t,\xi)$ вимірна за змінними (z,t) в Q_T для всіх $\xi \in \mathbb{R}^1$ і неперервна за ξ для майже всіх $(z,t) \in Q_T$; крім того, існує така додатна стала g_0, що $|g(z,t,\xi) - g(z,t,\eta)| \le \le g_0|\xi - \eta|$ для майже всіх $(z,t) \in Q_T$ і всіх $\xi, \eta \in \mathbb{R}^1$;

(A5): $f \in C\big([0,T]; L^2(\Omega)\big)$;

(A6): $u_0 \in V_1(\Omega)$;

(A7): $K \in V_1(\Omega),\ K_{x_i x_i x_j x_j} \in L^2(\Omega),\ K_{z_r z_s} \in L^2(\Omega),\ i,j \in \{1,\ldots,k\},\ r,s \in \{1,\ldots,n\}$;

(A8): $E \in W^{1,2}(0,T),\ E(0) = \int\limits_\Omega K(z)u_0(z)\,dz.$

Зауважимо, що якщо $c(t) = c^*(t)$, де $c^* \in C([0,T])$ — задана функція, то так само, як і в [2], ми отримаємо результати існування та єдиності узагальненого розв'язку мішаної задачі (1) – (3):

Теорема 1. *Нехай виконуються умови (A1) – (A6) та* $c^* \in C([0,T])$. *Тоді існує єдиний узагальнений розв'язок* u^* *задачі (1) – (3), тобто* $u^* \in L^2\big(0,T; V_1(\Omega)\big) \cap C\big([0,T]; L^2(\Omega)\big)$, $u_t^* \in L^2(Q_T)$, *який задовольняє (2) та рівність*

$$\int\limits_{Q_\tau} \Bigg(u_t^* v + \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}(z,t) u^*_{x_i x_j} v_{x_i x_j} + \\ + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(z,t) u^*_{z_i} v_{z_j} + (c^*(t) + q(z))u^* v + g(z,t,u^*)v \Bigg) dz\,dt = \int\limits_{Q_\tau} f(z,t) v\,dz\,dt \tag{6}$$

для всіх $\tau \in (0,T]$ *і всіх функцій* $v \in L^2\big(0,T; V_1(\Omega)\big)$.

Для похідної u_t^* *виконується оцінка*

$$\int\limits_{Q_T} (u_t^*)^2\,dz\,dt \le M_0 \Bigg(\int\limits_\Omega \Big((u_0(z))^2 + \sum_{i=1}^{n} (u_{0,z_i}(z))^2 + \\ + \sum_{i,j=1}^{k} \big(u_{0,x_i x_j}(z)\big)^2 \Big) dz + \int\limits_{Q_T} \big((f(z,t))^2 + (g(z,t,0))^2 \big)\,dz\,dt \Bigg), \tag{7}$$

де стала M_0 *залежить тільки від коефіцієнтів лівої частини рівняння (1).*

3. Еквівалентна задача. Знайдемо еквівалентну задачу до задачі (1) – (4). Позначимо

$$A(z,t) := \sum_{i,j=1}^{k} (K_{x_i x_j}(z) a_{ij}(z,t))_{x_i x_j} - \sum_{i,j=1}^{n} (K_{z_j}(z) b_{ij}(z,t))_{z_i} + q(z)K(z),$$

$$B(t) := -E'(t) + \int\limits_\Omega K(z) f(z,t)\,dz.$$

Нехай $(u(z,t), c(t))$ — узагальнений розв'язок задачі (1) – (4). З (4) випливає

$$\int\limits_\Omega K(z) u_t(z,t)\,dz = E'(t), \quad t \in [0,T]. \tag{8}$$

Використовуючи рівність (5) з $v = K(z)$ і (8), отримуємо

$$\int\limits_0^\tau E'(t)\,dt + \int\limits_{Q_\tau}\Bigg(\sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}(z,t)K_{x_ix_j}(z)u_{x_ix_j} + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(z,t)K_{z_j}(z)u_{z_i} +$$

$$+ (c(t)+q(z))K(z)u + g(z,t,u)K(z)\Bigg)dz\,dt =$$

$$= \int\limits_{Q_\tau} f(z,t)K(z)\,dz\,dt, \quad \tau\in(0,T]. \tag{9}$$

Інтегруючи частинами в (9) та враховуючи умову (A7), отримуємо

$$\int\limits_{Q_\tau}\big(A(z,t)u + g(z,t,u)K(z)\big)\,dz\,dt + \int\limits_0^\tau E(t)c(t)\,dt = \int\limits_0^\tau B(t)\,dt$$

для всіх $\tau\in(0,T]$. Тому

$$E(t)c(t) = B(t) - \int\limits_\Omega \big(A(z,t)u + g(z,t,u)K(z)\big)\,dz, \quad t\in[0,T]. \tag{10}$$

Лема 1. *Нехай виконуються умови (A1) – (A8) та* $a_{ij,x_ix_j}\in C\big([0,T];L^2(\Omega)\big)$, $b_{rs,z_r}\in C\big([0,T];L^2(\Omega)\big)$, $i,j\in\{1,\ldots,k\}$, $r,s\in\{1,\ldots,n\}$. *Пара функцій* $(u(z,t),c(t))$, *де* $u\in L^2\big(0,T;V_1(\Omega)\big)\cap C\big([0,T];L^2(\Omega)\big)$, $u_t\in L^2(Q_T)$, $c\in C([0,T])$, *є узагальненим розв'язком задачі (1) – (4) тоді і тільки тоді, коли вона задовольняє рівність (5) для всіх* $v\in L^2\big(0,T;V_1(\Omega)\big)$, $\tau\in(0,T)$ *та виконуються умови (2), (10).*

Доведення. Необхідність доведено.

Нехай $u^*\in L^2\big(0,T;V_1(\Omega)\big)\cap C\big([0,T];L^2(\Omega)\big)$, $u^*_t\in L^2(Q_T)$, $c^*\in C([0,T])$; вони задовольняють (2), (10) та рівність (5) для всіх $v\in L^2\big(0,T;V_1(\Omega)\big)$, $\tau\in(0,T)$. Тоді u^* є розв'язком задачі (1) – (3) з c^* замість c в (1).

Покладемо $E^*(t) = \int_\Omega K(z)u^*(z,t)\,dz$, $t\in[0,T]$. Так само, як і при доведенні необхідності, отримуємо

$$\int\limits_0^\tau (E^*(t))'\,dt + \int\limits_{Q_\tau}\Bigg(\Bigg(\sum_{i,j=1}^{k}\big(a_{ij}(z,t)K_{x_ix_j}(z)\big)_{x_ix_j} + \sum_{i,j=1}^{n}\big(b_{ij}(z,t)K_{z_j}(z)\big)_{z_i} +$$

$$+ \big(c^*(t)+q(z)\big)K(z)\Bigg)u^* + g(z,t,u^*)K(z)\Bigg)dz\,dt =$$

$$= \int\limits_{Q_\tau} f(z,t)K(z)\,dz\,dt, \quad t\in[0,T]. \tag{11}$$

З іншого боку, $c^*(t)$ і $u^*(z,t)$ задовольняють (10), а тому легко встановити рівність

$$\int\limits_0^\tau E'(t)\,dt+\int\limits_{Q_\tau}\Bigg(\Bigg(\Bigg(\sum_{i,j=1}^{k}\big(a_{ij}(z,t)K_{x_ix_j}(z)\big)_{x_ix_j}+\sum_{i,j=1}^{n}\big(b_{ij}(z,t)K_{z_j}(z)\big)_{z_i}+$$

$$+\big(c^*(t)+q(z)\big)K(z)\Bigg)u^*+g(z,t,u^*)K(z)\Bigg)dz\,dt=$$

$$=\int\limits_{Q_\tau} f(z,t)K(z)\,dz\,dt,\quad t\in[0,T]. \tag{12}$$

Віднімаючи від (11) рівність (12), знаходимо, що

$$\int\limits_0^\tau (E^*(t)-E(t))'\,dt=0,\quad \tau\in[0,T]. \tag{13}$$

З (13) та рівності $E^*(0)=E(0)=\int_\Omega K(z)u_0(z)\,dz$ одержуємо $E^*(t)=E(t),\ t\in[0,T]$. Отже, $u^*(z,t)$ задовольняє (4).

Лему 1 доведено.

4. Існування та єдиність розв'язку. Для функцій $w_1\in W_0^{1,2}(\Omega),\ w_2\in W_0^{2,2}(\mathcal{D}_x)$ будемо використовувати нерівності Фрідріхса [17, с. 44]

$$\int\limits_\Omega (w_1)^2\,dz\le\gamma_0\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^{n}(w_{1,z_i})^2\,dz,\qquad \int\limits_{\mathcal{D}_x}(w_2)^2\,dx\le\gamma_1\int\limits_{\mathcal{D}_x}\sum_{i,j=1}^{k}(w_{2,x_ix_j})^2\,dx, \tag{14}$$

де сталі $\gamma_0,\ \gamma_1$ залежать від $k,\ n$ та області Ω.

Для чисел $\delta>0$ і $T_0\in(0,T]$ означимо сталі

$$C_1:=\frac{4}{\min\limits_{[0,T_0]}(E(t))^2}\sup_{[0,T_0]}\left((B(t))^2+\int\limits_\Omega (K(z))^2\,dz\int\limits_\Omega (g(z,t,0))^2\,dz\right),$$

$$C_2:=\frac{4}{\min\limits_{[0,T_0]}(E(t))^2}\sup_{[0,T_0]}\int\limits_\Omega\big((A(z,t))^2+(g_0)^2(K(z))^2\big)\,dz,$$

$$M_1:=\frac{1}{\delta}\int\limits_{Q_{T_0}}\big((f(z,t))^2+(g(z,t,0))^2\big)\,dz\,dt,$$

$$M_2:=(C_1+C_2M_1)^{\frac12},\quad \varkappa:=2q_0-2g_0-\delta-2M_2,$$

$$M_3:=\frac{M_1}{\delta}\min\left\{\frac{1}{\dfrac{2a_0}{\gamma_1}+\dfrac{2b_0}{\gamma_0}+\varkappa};T_0\right\},$$

$$M_4 := \frac{M_1}{\delta}\left(1 + |\varkappa| \min\left\{\frac{1}{\dfrac{2a_0}{\gamma_1} + \dfrac{2b_0}{\gamma_0} + \varkappa}; T_0\right\}\right),$$

$$M_5 := \frac{2}{\min\limits_{[0,T_0]}(E(t))^2}\left(\sup_{[0,T_0]}\int\limits_\Omega (A(z,t))^2\,dz + (g_0)^2\int\limits_\Omega (K(z))^2\,dz\right), \qquad M_6 := M_3M_5.$$

Теорема 2. *Нехай виконуються умови (A1)–(A8) та* $a_{ij,x_ix_j} \in C\big([0,T]; L^2(\Omega)\big)$, $b_{rs,z_r} \in C\big([0,T]; L^2(\Omega)\big)$, $i,j \in \{1,\ldots,k\}$, $r,s \in \{1,\ldots,n\}$, *та існують числа* $\delta > 0$ *і* $T_0 \in (0,T]$ *такі, що*

$$\frac{2a_0}{\gamma_1} + \frac{2b_0}{\gamma_0} + 2q_0 - 2g_0 - 2\delta - 2M_2 > 0, \quad M_6 < 1, \tag{15}$$

а функція $E(t) \neq 0$ *для всіх* $t \in [0,T_0]$. *Тоді існує єдиний узагальнений розв'язок задачі (1)–(4) в області* Q_{T_0}.

Доведення. *Існування.* Щоб встановити умови існування розв'язку, використаємо метод послідовних наближень. Побудуємо наближення розв'язку $\big(u^m(z,t), c^m(t)\big)$ задачі (1)–(4), де функції $c^m(t)$, $m \in \mathbb{N}$, задовольняють рівності

$$c^1(t) := 0,$$

$$E(t)c^m(t) = B(t) - \int\limits_\Omega A(z,t)u^{m-1}\,dz - \int\limits_\Omega K(z)g(z,t,u^{m-1})\,dz, \tag{16}$$

$$t \in [0,T_0], \quad m \geq 2,$$

та u^m задовольняє рівність

$$\int\limits_{Q_\tau}\left(u_t^m v + \sum_{i,j=1}^k a_{ij}(z,t)u^m_{x_ix_j}v_{x_ix_j} + \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(z,t)u^m_{z_i}v_{z_j} + \right.$$

$$\left. + (c^m(t) + q(z))u^m v + g(z,t,u^m)v\right)dz\,dt =$$

$$= \int\limits_{Q_\tau} f(z,t)v\,dz\,dt, \qquad m \geq 1, \quad \tau \in (0,T_0], \tag{17}$$

для всіх $v \in L^2\big(0,T_0; V_1(\Omega)\big)$ та умову

$$u^m(z,0) = u_0(z), \quad z \in \Omega. \tag{18}$$

З теореми 1 випливає, що для кожного $m \in \mathbb{N}$ існує єдина функція

$$u^m \in L^2\big(0,T_0; V_1(\Omega)\big) \cap C\big([0,T_0]; L^2(\Omega)\big), \quad u^m_t \in L^2(Q_{T_0}),$$

яка задовольняє (17), (18).

Далі покажемо, що $c^m(t) \geq c_0$ для всіх $t \in [0, T_0]$ і $m \in \mathbb{N}$, де $c_0 \in \mathbb{R}$. Нехай $c^m(t) \geq c_{0m}$ для всіх $t \in [0, T_0]$, де $c_{0m} \in \mathbb{R}$. Спочатку знайдемо оцінку для $\int_\Omega (u^m(z,\tau))^2\, dz$. Вибравши в (17) $v = u^m$, отримаємо

$$\int\limits_{Q_\tau} \left(u_t^m u^m + \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}(z,t)(u^m_{x_i x_j})^2 + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(z,t) u^m_{z_i} u^m_{z_j} + \right.$$

$$\left. + (c^m(t) + q(z))(u^m)^2 + g(z,t,u^m)u^m \right) dz\, dt =$$

$$= \int\limits_{Q_\tau} f(z,t) u^m\, dz\, dt, \qquad m \geq 1, \quad \tau \in (0, T_0]. \tag{19}$$

Тоді з урахуванням умов (A1) – (A6) та того, що згідно з умовою (A4)

$$\int\limits_{Q_\tau} g(z,t,u^m)u^m\, dz\, dt \leq \left(g_0 + \frac{\delta}{2} \right) \int\limits_{Q_\tau} (u^m)^2\, dz\, dt + \frac{1}{2\delta} \int\limits_{Q_\tau} (g(z,t,0))^2\, dz\, dt,$$

$$\tau \in (0, T_0], \quad m \geq 1,$$

і

$$\int\limits_{Q_\tau} f(z,t) u^m\, dz\, dt \leq \frac{1}{2\delta} \int\limits_{Q_\tau} (f(z,t))^2\, dz\, dt + \frac{\delta}{2} \int\limits_{Q_\tau} (u^m)^2\, dz\, dt,$$

з (19) отримуємо нерівності

$$\int\limits_{\Omega} (u^m(z,\tau))^2\, dz + \int\limits_{Q_\tau} \left(2a_0 \sum_{i,j=1}^{k} (u^m_{x_i x_j})^2 + \right.$$

$$\left. + 2b_0 \sum_{i=1}^{n} (u^m_{z_i})^2 + (2c_{0m} - 2\delta - 2g_0 + 2q_0)(u^m)^2 \right) dz\, dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{\delta} \int\limits_{Q_{T_0}} \left((f(z,t))^2 + (g(z,t,0))^2 \right) dz\, dt, \qquad \tau \in (0, T_0], \quad m \geq 1.$$

Використовуючи в другому доданку цієї рівності співвідношення (14), одержуємо

$$\int\limits_{\Omega} (u^m(z,\tau))^2\, dz + \left(\frac{2a_0}{\gamma_1} + \frac{2b_0}{\gamma_0} + 2c_{0m} - 2\delta - 2g_0 + 2q_0 \right) \int\limits_{Q_\tau} (u^m)^2\, dz\, dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{\delta} \int\limits_{Q_{T_0}} \left((f(z,t))^2 + (g(z,t,0))^2 \right) dz\, dt, \qquad \tau \in (0, T_0], \quad m \geq 1. \tag{20}$$

Якщо

$$\frac{2a_0}{\gamma_1} + \frac{2b_0}{\gamma_0} + 2c_{0m} - 2\delta - 2g_0 + 2q_0 > 0, \tag{21}$$

то з нерівності (20) отримуємо оцінку

$$\int\limits_{\Omega} (u^m(z,\tau))^2\,dz \le M_1, \qquad \tau \in (0, T_0], \quad m \ge 1. \tag{22}$$

Для функцій $c^m,\ u^m$ також виконується (16). Піднесемо обидві частини нерівності (16) до квадрату та використаємо нерівність Гельдера та (22). Тоді отримаємо

$$(c^m(t))^2 \le C_1 + C_2 \int\limits_{\Omega} (u^{m-1})^2\,dz \le M_2^2, \qquad t \in [0, T_0], \quad m \ge 2. \tag{23}$$

Звідси випливає, що $|c^m(t)| \le M_2$ для $t \in [0, T_0]$ і, отже, можна вважати, що $c_{0m} := -M_2$. Стала M_2 не залежить від m. Зауважимо також, що оскільки виконується умова (15), то також виконується припущення (21). Тоді $c^m(t) \ge c_0$ для всіх $t \in [0, T_0]$ і $m \in \mathbb{N}$, де $c_0 := -M_2$.

Покажемо, що послідовність $\big\{\big(u^m(z,t), c^m(t)\big)\big\}_{m=1}^{\infty}$ збігається до розв'язку задачі (1)–(4). Позначимо

$$w^m := w^m(z,t) = u^m(z,t) - u^{m-1}(z,t),$$
$$r^m(t) := c^m(t) - c^{m-1}(t), \quad m \ge 2.$$

З (18) випливає, що $w^m(z,0) = 0,\ z \in \Omega,\ m \ge 2.$ Отже, з (17) знаходимо

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} (w^m(z,\tau))^2\,dz + \int\limits_{Q_\tau} \Bigg(\sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}(z,t)(w^m_{x_i x_j})^2 +$$
$$+ \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(z,t) w^m_{z_i} w^m_{z_j} + q(z)(w^m)^2 +$$
$$+ \big(c^m(t)u^m - c^{m-1}(t)u^{m-1}\big)w^m + \big(g(z,t,u^m) - g(z,t,u^{m-1})\big)w^m \Bigg) dz\,dt = 0, \tag{24}$$
$$\tau \in (0, T_0], \quad m \ge 2.$$

З урахуванням умов (A1)–(A6), оцінки

$$\int\limits_{Q_\tau} \big(g(z,t,u^m) - g(z,t,u^{m-1})\big)w^m\,dz\,dt \le g_0 \int\limits_{Q_\tau} (w^m)^2\,dz\,dt, \qquad \tau \in (0, T_0], \quad m \ge 2,$$

та

$$\int\limits_{Q_\tau} \big(c^m(t)u^m - c^{m-1}(t)u^{m-1}\big)w^m\,dz\,dt =$$

$$= \int_{Q_\tau} \big(c^m(t)(w^m)^2 + r^m(t)u^{m-1}w^m\big)\, dz\, dt \geq$$

$$\geq \left(c_0 - \frac{\delta}{2}\right) \int_{Q_\tau} (w^m)^2\, dz\, dt - \frac{M_1}{2\delta} \int_0^{T_0} (r^m(t))^2\, dt,$$

з (24) отримуємо нерівності

$$\int_\Omega (w^m(z,\tau))^2\, dz + \int_{Q_\tau} \left(2a_0 \sum_{i,j=1}^k (w^m_{x_ix_j})^2 + 2b_0 \sum_{i=1}^n (w^m_{z_i})^2 + \varkappa (w^m)^2\right) dz\, dt \leq$$

$$\leq \frac{M_1}{\delta} \int_0^\tau (r^m(t))^2\, dt, \qquad \tau \in (0, T_0], \quad m \geq 2.$$

Використовуючи далі нерівності (14), одержуємо

$$\int_\Omega (w^m(z,\tau))^2\, dz + \left(\frac{2a_0}{\gamma_1} + \frac{2b_0}{\gamma_0} + \varkappa\right) \int_{Q_\tau} (w^m)^2\, dz\, dt \leq \frac{M_1}{\delta} \int_0^\tau (r^m(t))^2\, dt, \quad \tau \in (0, T_0], \quad m \geq 2.$$

Отже, оскільки виконується (15), то знаходимо оцінки

$$\begin{gathered} \int_\Omega (w^m(z,\tau))^2\, dz \leq \frac{M_1}{\delta} \int_0^{T_0} (r^m(t))^2\, dt, \qquad \tau \in (0, T_0], \quad m \geq 2, \\ \int_{Q_\tau} (w^m)^2\, dz\, dt \leq M_3 \int_0^{T_0} (r^m(t))^2\, dt, \qquad \tau \in (0, T_0], \quad m \geq 2, \end{gathered} \tag{25}$$

та

$$\int_{Q_\tau} \left(\sum_{i,j=1}^k (w^m_{x_ix_j})^2 + \sum_{i=1}^n (w^m_{z_i})^2\right) dz\, dt \leq M_4 \int_0^{T_0} (r^m(t))^2\, dt, \qquad \tau \in (0, T_0], \quad m \geq 2. \tag{26}$$

З (16) для $t \in [0, T_0]$ і $m \geq 3$ випливають рівності

$$E(t) r^m(t) = -\int_\Omega A(z,t) w^{m-1}\, dz - \int_\Omega K(z) \big(g(z,t,u^{m-1}) - g(z,t,u^{m-2})\big)\, dz. \tag{27}$$

Піднесемо до квадрату обидві частини цих рівностей та проінтегруємо результат за змінною t; тоді з урахуванням гіпотези (A4) отримаємо

$$\int_0^{T_0} (r^m(t))^2\, dt \leq M_5 \int_{Q_{T_0}} (w^{m-1})^2\, dz\, dt, \quad m \geq 3. \tag{28}$$

З (28) і (25) маємо

$$\int\limits_0^{T_0}(r^m(t))^2\,dt \le M_6\int\limits_0^{T_0}(r^{m-1}(t))^2\,dt \le (M_6)^{m-2}\int\limits_0^{T_0}(r^2(t))^2\,dt, \quad m\ge 3. \tag{29}$$

З (27) легко отримати оцінку

$$(r^m(t))^2 \le M_5\int\limits_\Omega (w^{m-1}(z,t))^2\,dz, \qquad t\in[0,T_0], \quad m\ge 2. \tag{30}$$

Далі, врахувавши (25), з (30) знайдемо

$$\left|r^m(t)\right| \le \left(\frac{M_1M_5}{\delta}\right)^{\frac12}\left(\int\limits_0^{T_0}(r^{m-1}(t))^2\,dt\right)^{\frac12}, \qquad t\in[0,T_0], \quad m\ge 2. \tag{31}$$

Використовуючи (31), (29) та припущення $M_6<1$, встановлюємо оцінку

$$\begin{aligned}\left\|c^{m+s}(t)-c^m(t);C([0,T_0])\right\| &\le \sum_{i=m+1}^{m+s}\left\|r^i(t);C([0,T_0])\right\| \le\\ &\le \left(\frac{M_1M_5}{\delta}\right)^{\frac12}\sum_{i=m+1}^{m+s}\|r^{i-1}(t);L^2(0,T_0)\| \le\\ &\le \sum_{i=m+1}^{m+s}\left(\frac{M_1M_5}{\delta}\right)^{\frac12}M_6^{\frac{i-3}{2}}\left\|r^2(t);L^2(0,T_0)\right\| \le\\ &\le \frac{M_1^{\frac12}M_5^{\frac12}M_6^{\frac{m-2}{2}}}{\delta^{\frac12}(1-M_6^{\frac12})}\left\|r^2(t);L^2(0,T_0)\right\|, \qquad s\in\mathbb{N}, \quad m\ge 3. \end{aligned}\tag{32}$$

Крім того,

$$\begin{aligned}&\int\limits_{Q_{T_0}}\left(\sum_{i,j=1}^{k}\left(u^{m+s}_{x_ix_j}-u^m_{x_ix_j}\right)^2+\sum_{i=1}^{n}\left(u^{m+s}_{z_i}-u^m_{z_i}\right)^2\right)dz\,dt \le\\ &\le \sum_{p=m+1}^{m+s}\int\limits_{Q_\tau}\left(\sum_{i,j=1}^{k}(w^p_{x_ix_j})^2+\sum_{i=1}^{n}(w^p_{z_i})^2\right)dz\,dt \le\\ &\le M_4\sum_{p=m+1}^{m+s}\int\limits_0^{T_0}(r^p(t))^2\,dt \le\\ &\le M_4\sum_{p=m+1}^{m+s}M_6^{p-2}\left\|r^2(t);L^2(0,T_0)\right\|^2 \le\end{aligned}$$

$$\leq \frac{M_4 M_6^{m-1}}{1-M_6}\left\|r^2(t); L^2(0,T_0)\right\|^2, \qquad s\in\mathbb{N}, \quad m\geq 3, \tag{33}$$

та

$$\int\limits_{\Omega}(u^{m+s}(z,\tau)-u^m(z,\tau))^2\,dz \leq \sum_{p=m+1}^{m+s}\int\limits_{\Omega}(w^p(z,\tau))^2\,dz \leq$$

$$\leq \frac{M_1}{\delta}\sum_{p=m+1}^{m+s}\int\limits_0^{T_0}(r^p(t))^2\,dt \leq$$

$$\leq \frac{M_1 M_6^{m-1}}{\delta(1-M_6)}\left\|r^2(t); L^2(0,T_0)\right\|^2, \quad \tau\in(0,T_0], \quad s\in\mathbb{N}, \quad m\geq 3, \tag{34}$$

$$\int\limits_{Q_\tau}(u^{m+s}-u^m)^2\,dz\,dt \leq \sum_{p=m+1}^{m+s}\int\limits_{Q_\tau}(w^p)^2\,dz\,dt \leq \frac{M_3 M_6^{m-1}}{1-M_6}\left\|r^2(t); L^2(0,T_0)\right\|^2,$$

$$\tau\in(0,T_0], \quad s\in\mathbb{N}, \quad m\geq 3.$$

З (32) – (34) випливає, що для довільного $\varepsilon>0$ існує таке m_0, що для всіх $s,m\in\mathbb{N}$, $m>m_0$, виконуються нерівності

$$\left\|c^{m+s}(t)-c^m(t); C([0,T_0])\right\| \leq \varepsilon, \qquad \left\|u^{m+s}-u^m; L^2\big(0,T_0;V_1(\Omega)\big)\right\| \leq \varepsilon$$

і

$$\left\|u^{m+s}-u^m; C\big([0,T_0];L^2(\Omega)\big)\right\| \leq \varepsilon.$$

Отже, послідовність $\{c^m\}_{m=1}^\infty$ є фундаментальною в просторі $C([0,T_0])$, $\{u^m\}_{m=1}^\infty$ — в $L^2\big(0,T_0;V_1(\Omega)\big)\cap C\big([0,T_0];L^2(\Omega)\big)$, і тому при $m\to\infty$

$$u^m\to u \quad \text{в} \quad L^2\big(0,T_0;V_1(\Omega)\big)\cap C\big([0,T_0];L^2(\Omega)\big), \qquad c^m\to c \quad \text{в} \quad C([0,T_0]). \tag{35}$$

Далі, з (7) одержуємо

$$\int\limits_{Q_{T_0}}(u_t^m)^2\,dz\,dt \leq M_0\left(\int\limits_{\Omega}\Big((u_0(z))^2+\sum_{i=1}^n(u_{0,z_i}(z))^2+\right.$$

$$\left.+\sum_{i,j=1}^k\big(u_{0,x_ix_j}(z)\big)^2\Big)\,dz+\int\limits_{Q_{T_0}}\big((f(z,t))^2+(g(z,t,0))^2\big)\,dz\,dt\right). \tag{36}$$

Оскільки стала M_0 не залежить від m, то з (36) випливає, що

$$u_t^m\to u_t \quad \text{слабко в} \quad L^2(Q_{T_0}). \tag{37}$$

Врахувавши (35), (37), з (16) і (17) встановлюємо, що пара $(u(z,t),c(t))$ задовольняє рівняння (10) для $t\in[0,T_0]$ і рівність (5) для всіх $\tau\in(0,T_0]$, а отже, згідно з лемою 1 $(u(z,t),c(t))$ є розв'язком задачі (1) – (4) в Q_{T_0}.

Єдиність. Припустимо, що $(u_{(1)}(z,t), c_{(1)}(t))$ і $(u_{(2)}(z,t), c_{(2)}(t))$ — два розв'язки задачі (1)–(4) в Q_{T_0}. Тоді пара функцій $(\tilde{u}(z,t), \tilde{c}(t))$, де $\tilde{u}(z,t) = u_{(1)}(z,t) - u_{(2)}(z,t)$, $\tilde{c}(t) = c_{(1)}(t) - c_{(2)}(t)$, задовольняє умову $\tilde{u}(z,0) \equiv 0$, рівність

$$\int\limits_{Q_\tau} \Bigg(\tilde{u}_t v + \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}(z,t)\tilde{u}_{x_i x_j} v_{x_i x_j} +$$
$$+ \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(z,t)\tilde{u}_{z_i} v_{z_j} + \big(c_{(1)}(t)u_{(1)}(z,t) - c_{(2)}(t)u_{(2)}(z,t)\big)v +$$
$$+ q(z)\tilde{u}v + (g(z,t,u_{(1)}) - g(z,t,u_{(2)}))v \Bigg) dz\,dt = 0, \quad \tau \in [0,T_0], \tag{38}$$

для всіх $v \in V_1(Q_{T_0})$ та виконується рівність

$$E(t)\tilde{c}(t) = -\int\limits_{\Omega} \Big(A(z,t)\tilde{u} + K(z)\big((g(z,t,u_{(1)}) - g(z,t,u_{(2)})\big)\Big)\, dz, \quad t \in [0,T_0]. \tag{39}$$

Вибравши в (38) $v = \tilde{u}$, отримаємо

$$\int\limits_{Q_\tau} \Bigg(\tilde{u}_t \tilde{u} + \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}(z,t)(\tilde{u}_{x_i x_j})^2 +$$
$$+ \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(z,t)\tilde{u}_{z_i}\tilde{u}_{z_j} + \big(c_{(1)}(t)u_{(1)}(z,t) - c_{(2)}(t)u_{(2)}(z,t)\big)\tilde{u} +$$
$$+ q(z)(\tilde{u})^2 + \big(g(z,t,u_{(1)}) - g(z,t,u_{(2)})\big)\tilde{u} \Bigg) dz\,dt = 0, \quad \tau \in (0,T_0]. \tag{40}$$

З (39) та умови (A4) легко отримати нерівність

$$\int\limits_0^{T_0} (\tilde{c}(t))^2\, dt \le M_5 \int\limits_{Q_{T_0}} (\tilde{u})^2\, dz\,dt. \tag{41}$$

З рівності (40), так само, як із (24) отримували (25), знаходимо оцінку

$$\int\limits_{Q_{T_0}} (\tilde{u})^2\, dz\,dt \le M_3 \int\limits_0^{T_0} (\tilde{c}(t))^2\, dt \tag{42}$$

і з урахуванням (41), з (42) отримуємо $(1 - M_6)\int_{Q_{T_0}} (\tilde{u})^2\, dz\,dt \le 0$. Оскільки $M_6 < 1$, то $\int_{Q_{T_0}} (\tilde{u})^2\, dz\,dt = 0$; отже, $u_{(1)} = u_{(2)}$ в Q_{T_0}. Тоді з (41) випливає, що $\tilde{c}(t) \equiv 0$, а тому $c_{(1)}(t) \equiv c_{(2)}(t)$ в Q_{T_0}.

Теорему 2 доведено.

Висновки. У статті за допомогою методу послідовних наближень встановлено достатні умови існування та єдиності розв'язку з просторів Соболєва оберненої задачі (1) – (4) для слабко нелінійного рівняння типу Ейдельмана. Розв'язність прямої задачі та оцінку похідної її розв'язку отримано за допомогою методу Фаедо – Гальоркіна за схемою доведення результатів із [2].

Література

1. С. Д. Эйдельман, *Об одном классе параболических систем*, Докл. АН СССР, **133**, № 1, 40 – 43 (1960).
2. О. Є. Коркуна, С. П. Лавренюк, *Мішана задача для одного нелінійного рівняння типу Ейдельмана в необмеженій області*, Допов. НАН України, № 4, 24 – 30 (2008).
3. О. Є. Коркуна, *Мішана задача для нелінійного рівняння типу Ейдельмана з інтегральним доданком*, Карпат. мат. публ., **4**, № 2, 275 – 283 (2012).
4. N. P. Protsakh, O. E. Parasiuk-Zasun, *Inverse problem for semilinear Eidelman type equation*, Mat. Stud., **53**, № 1, 48 – 58 (2020).
5. С. Д. Ивасишен, С. Д. Эйдельман, $\vec{2b}$*-параболические системы*, Труды семинара по функциональному анализу, Киев, Ин-т математики АН УССР, вып. 1, 3 – 175; 271 – 273 (1968).
6. S. D. Eidelman, S. D. Ivasyshen, A. N. Kochubei, *Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type*, Birkhäuser, Basel (2004).
7. N. I. Turchyna, S. D. Ivasyshen, *On integral representation of the solutions of a model* $\vec{2b}$*-parabolic boundary value problems*, Carpathian Math. Publ., **11**, № 1, 193 – 203 (2019).
8. S. D. Ivasyshen, I. P. Medynsky, *On applications of the Levi method in the theory of parabolic equations*, Mat. Stud., **47**, № 1, 33 – 46 (2017).
9. M. I. Ivanchov, *Inverse problems for equations of parabolic type*, VNTL, Lviv (2003).
10. В. Л. Камынин, *Обратная задача определения младшего коэффициента в параболическом уравнении при условии интегрального наблюдения*, Мат. заметки, **94**, № 2, 207 – 217 (2013).
11. A. I. Prilepko, A. B. Kostin, V. V. Solov'ev, *Inverse source and coefficient problems for elliptic and parabolic equations in Hölder and Sobolev spaces*, J. Math. Sci., **237**, № 4, 576 – 594 (2019).
12. Н. П. Процах, *Обернена задача визначення молодшого коефіцієнта слабко нелінійного ультрапараболічного рівняння*, Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., вип. 83, 164 – 178 (2017).
13. Н. П. Процах, *Обернена задача для слабконелінійного ультрапараболічного рівняння з трьома невідомими функціями різних аргументів у правій частині*, Нелін. коливання, **18**, № 2, 245 – 279 (2015).
14. N. Protsakh, *Determining of right-hand side of higher order ultraparabolic equation*, Open Math., **15**, 1048 – 1062 (2017).
15. N. P. Protsakh, *Problem of determining of minor coefficient and right-hand side function in semilinear ultraparabolic equation*, Mat. Stud., **50**, № 1, 60 – 74 (2018).
16. Н. П. Процах, Б. Й. Пташник, *Нелінійні ультрапараболічні рівняння та варіаційні нерівності*, Наук. думка, Київ (2017).
17. Х. Гаевский, К. Грегер, К. Захариас, *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения*, Мир, Москва (1978).

Одержано 22.04.20