УДК 517.9

# ПРО НАБЛИЖЕНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ СЛАБКОНЕЛІНІЙНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ НЬЮТОНА – КАНТОРОВИЧА*

**А. А. Бойчук**

*Ін-т математики НАН України*
*вул. Терещенківська 3, Київ, 01024, Україна*
*e-mail: boichuk@imath.kiev.ua*

**С. М. Чуйко**

*Донбас. держ. пед. ун-т*
*вул. Генерала Батюка, 19, Слов'янськ, 84116, Україна*
*e-mail: chujko-slav@ukr.net*

We find necessary and sufficient conditions of solvability of the nonlinear boundary-value problem in the critical case. By using the Newton – Kantorovich method, we propose a new iterative scheme for the construction of solutions of the weakly nonlinear boundary-value problem for a system ordinary differential equations in the critical case.

Знайдено необхідні й достатні умови розв'язності та схему побудови розв'язків нелінійної крайової задачі у критичному випадку. Для знаходження розв'язків слабконелінійної крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь у критичному випадку з використанням методу Ньютона – Канторовича побудовано нову ітераційну схему.

**1. Постановка задачі.** Досліджено задачу про побудову розв'язків

$$z(t,\varepsilon)\colon z(\cdot,\varepsilon)\in\mathbb{C}^1[a,b], \quad z(t,\cdot)\in\mathbb{C}[0,\varepsilon_0]$$

нелінійної крайової задачі [1, 2]

$$\frac{dz}{dt}=A(t)z+f(t)+\varepsilon Z(z,t,\varepsilon), \tag{1}$$

$$\ell z(\cdot,\varepsilon)=\alpha+\varepsilon J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon). \tag{2}$$

Розв'язок задачі (1), (2) шукаємо у малому околі розв'язку породжуючої задачі

$$\frac{dz_0}{dt}=A(t)z_0+f(t), \quad \ell z_0(\cdot)=\alpha, \quad \alpha\in\mathbb{R}^m.$$

Тут $A(t)$ —- $(n\times n)$-вимірна матриця та $f(t)$ — $n$-вимірний вектор, елементи яких — неперервні на відрізку $[a,b]$ дійсні функції, $\ell z(\cdot)$ — лінійний обмежений векторний функціонал $\ell z(\cdot)\colon\mathbb{C}[a,b]\to\mathbb{R}^m$. Нелінійності $Z(z,t,\varepsilon)$, а також $J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ нетерової $(m\neq n)$ задачі (1), (2) припускаємо двічі неперервно диференційовними за невідомою $z$ у малому

* Роботу виконано за часткової підтримки гранта H2020-MSCA-RISE-2019, номер проекту 873071 (SOMPATY: Spectral Optimization: From Mathematics to Physics and Advanced Technology), а також фінансової підтримки Міністерства освіти і науки України, р/н 0118U003390.

околі породжуючого розв'язку та за малим параметром $\varepsilon$ у малому додатному околі нуля. Крім того, вважаємо вектор-функцію $Z(z,t,\varepsilon)$ неперервною за незалежною змінною $t$ на відрізку $[a,b]$. Досліджуємо критичний випадок $(P_{Q^*} \neq 0)$, причому припускаємо виконання умови

$$P_{Q_d^*}\{\alpha - \ell K[f(s)](\cdot)\} = 0. \tag{3}$$

При цьому породжуюча задача (3) має $r$-параметричну сім'ю розв'язків [3, с. 163]

$$z_0(t,c_0) = X_r(t)c_0 + G[f(s);\alpha](t), \quad c_0 \in \mathbb{R}^r.$$

Породжуючі розв'язки $z_0\left(t,c_0^*\right)$, у малому околі яких можуть знаходитися шукані розв'язки крайової задачі (1), (2), у критичному випадку визначає рівняння для породжуючих констант [1–3] крайової задачі (1), (2). У статті [3] наведено схему дослідження нелінійної крайової задачі (1), (2) у критичному випадку, побудовану згідно з припущенням, що рівняння для породжуючих констант має дійсні сталі розв'язки $c_0^* \in \mathbb{R}^r$.

Метою цієї статті є побудова альтернативної схеми дослідження нелінійної крайової задачі (1), (2) у критичному випадку, основаної на іншому, більш загальному, способі визначення породжуючого розв'язку [4], в околі якого можуть знаходитися шукані розв'язки крайової задачі (1), (2), та побудові ітераційної схеми для визначення розв'язку цієї задачі з використанням методу Ньютона–Канторовича [5, 6].

**2. Рівняння для породжуючих констант.** Необхідна та достатня умова розв'язності крайової задачі (1), (2) у критичному випадку має вигляд

$$F(c(\varepsilon)) := P_{Q_d^*}\Big\{J(z_0(\cdot,c_0)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \ell K\left[Z(z_0(s,c_0)+x(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\right](\cdot)\Big\} = 0. \tag{4}$$

Спрямувавши у рівності (4) $x(t,\varepsilon) \to 0$, при фіксованому значенні $\varepsilon$ отримаємо необхідну умову розв'язності крайової задачі (1), (2):

$$\mathcal{F}_0(c_0(\varepsilon),\varepsilon) := P_{Q_d^*}\Big\{J(z_0(\cdot,c_0(\varepsilon)),\varepsilon) - \ell K\left[Z(z_0(s,c_0(\varepsilon)),s,\varepsilon)\right](\cdot)\Big\} = 0. \tag{5}$$

Таким чином, доведено таку лему [4].

**Лема 1.** *Припустимо, що для крайової задачі (1), (2) має місце критичний* $(P_{Q^*} \neq 0)$ *випадок і виконується умова (3) розв'язності породжуючої задачі. Припустимо також, що у малому околі породжуючого розв'язку* $z_0\left(t,c_0^*(\varepsilon)\right)$ *задача (1), (2) має розв'язок*

$$z(t,\varepsilon)\colon z(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a,b], \quad z(t,\cdot) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0].$$

*Тоді вектор* $c_0^*(\varepsilon) \in \mathbb{R}^r$ *задовольняє рівняння (5).*

Рівняння (5) визначає породжуючі розв'язки $z_0(t,c_0^*(\varepsilon))$, у малому околі яких можуть знаходитися шукані розв'язки крайової задачі (1), (2) у критичному випадку. Аналогічно зі слабконелінійними крайовими задачами у критичному випадку [2], рівняння (5) будемо називати рівнянням для породжуючих констант крайової задачі (1), (2). Гладкість вектора $c_0^*(\varepsilon) \in \mathbb{R}^r$ суттєво впливатиме на вигляд шуканого розв'язку крайової задачі (1), (2).

**3. Практичний спосіб побудови розв'язків.** Припустимо, що рівняння (5) має дійсні корені та не перетворюється на тотожність [7, 8]. Фіксуючи один із неперервних дійсних розв'язків $c_0^*(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0]$ рівняння (5), приходимо до задачі про знаходження розв'язків

$$x(t,\varepsilon)\colon x(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a,b], \quad x(t,\cdot) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0]$$

крайової задачі

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \varepsilon\, Z(z_0 + x, t, \varepsilon), \tag{6}$$

$$\ell\, x(\cdot, \varepsilon) = \varepsilon\, J\left(z_0\left(\cdot, c_0^*\right) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon\right) \tag{7}$$

у малому околі розв'язку породжуючої задачі

$$z_0(t, c_r^*) = X_r(t)\, c_0^* + G[f(s); \alpha](t), \quad c_0^* \in \mathbb{R}^r.$$

Розв'язок крайової задачі (6), (7) зображуваний у вигляді

$$x(t, \varepsilon) = X_r(t)\xi(\varepsilon) + x^{(1)}(t, \varepsilon),$$

де

$$x^{(1)}(t, \varepsilon) = \varepsilon\, G\left[Z\left(z_0\left(s, c_0^*(\varepsilon)\right) + x(s, \varepsilon), s, \varepsilon\right); J\left(z_0\left(\cdot, c_0^*(\varepsilon)\right) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon\right)\right](t),$$

крім того

$$c(\varepsilon) := c_0^*(\varepsilon) + \xi(\varepsilon), \quad \xi(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0], \quad \xi(0) = 0.$$

У малому околі породжуючого розв'язку $z_0\left(t, c_0^*(\varepsilon)\right)$ має місце розвинення

$$Z\left(z_0\big(t, c_0^*(\varepsilon)\big) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon\right) =$$
$$= Z\left(z_0\big(t, c_0^*(\varepsilon)\big), t, \varepsilon\right) + \mathcal{A}_1\left(z_0\big(t, c_0^*(\varepsilon)\big)\right) x(t, \varepsilon) + \mathcal{R}_1\left(z_0\big(t, c_0^*(\varepsilon)\big) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon\right),$$

де

$$\mathcal{A}_1\left(z_0(t, c_0^*(\varepsilon))\right) = \frac{\partial Z(z, t, \varepsilon)}{\partial z}\Big|_{z = z_0(t, c_0^*(\varepsilon))}.$$

Залишок $\mathcal{R}_1\big(z_0\big(t, c_0^*(\varepsilon)\big) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon\big)$ більш високого порядку мализни за $x(t, \varepsilon)$ в околі точки $x = 0,$ ніж перші два члени розвинення, тому

$$\mathcal{R}_1(z(t, \varepsilon), t, \varepsilon)\Big|_{z = z_0(t, c_0^*(\varepsilon))} \equiv 0, \qquad \frac{\partial\, \mathcal{R}_1(z(t, \varepsilon), t, \varepsilon)}{\partial z}\Big|_{z = z_0(t, c_0^*(\varepsilon))} \equiv 0.$$

Використовуючи неперервну диференційованість (у сенсі Фреше) за першим аргументом векторного функціоналу $J\left(z_0\left(\cdot, c_0^*(\varepsilon)\right) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon\right)$, виділяємо лінійну $\ell_1 x(\cdot, \varepsilon)$ частину цього функціоналу та член $\mathcal{J}_0\left(z_0\left(\cdot, c_0^*(\varepsilon)\right), \varepsilon\right)$ нульового порядку в околі точки $x = 0$:

$$J\left(z_0\left(\cdot, c_0^*(\varepsilon)\right) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon\right) = \mathcal{J}_0\left(z_0\left(\cdot, c_0^*(\varepsilon)\right), \varepsilon\right) + \ell_1 x(\cdot, \varepsilon) + \mathcal{J}_1\left(z_0\left(\cdot, c_0^*(\varepsilon)\right) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon\right),$$

де

$$\ell_1 x(\cdot, \varepsilon) = \frac{\partial J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)}{\partial z}\Big|_{z = z_0(t, c_0^*(\varepsilon))}.$$

Залишок $J_1\left(z_0\left(\cdot, c_0^*(\varepsilon)\right) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon\right)$ більш високого порядку мализни за $x$ у малому околі точки $x = 0,$ ніж перші два члени розвинення, тому

$$J_1(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)\Big|_{z = z_0(t, c_0^*(\varepsilon))} \equiv 0, \qquad \frac{\partial J_1(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)}{\partial z}\Big|_{z = z_0(t, c_0^*(\varepsilon))} \equiv 0.$$

Позначимо $(d \times r)$-вимірну матрицю

$$\mathcal{B}_0\left(c_0^*(\varepsilon)\right) = P_{Q_d^*}\Big\{\ell_1 X_r(\cdot) - \ell K\left[\mathcal{A}_1\left(z_0\big(t, c_0^*(\varepsilon)\big)\right) X_r(t)\right](\cdot)\Big\}.$$

Враховуючи одержані розвинення та рівняння для породжуючих констант, приходимо до операторної системи, рівнозначної до задачі про знаходження розв'язків системи (6), які задовольняють крайову умову (7):

$$x(t,\varepsilon) = X_r(t)\xi(\varepsilon) + x^{(1)}(t,\varepsilon),$$

$$x^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon\, G\left[Z\left(z_0\left(s, c_0^*(\varepsilon)\right) + x(s,\varepsilon), s, \varepsilon\right); J\left(z_0\left(\cdot, c_0^*(\varepsilon)\right) + x(\cdot,\varepsilon), \varepsilon\right)\right](t),$$

$$\mathcal{B}_0\left(c_0^*(\varepsilon)\right)\xi(\varepsilon) = -P_{Q_d^*}\Big\{\ell_1 x^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + \mathcal{J}_1\left(z_0(\cdot, c_0^*(\varepsilon)) + x(\cdot,\varepsilon), \varepsilon\right) -$$

$$- \ell K\Big[\mathcal{A}_1\left(z_0\big(t, c_0^*(\varepsilon)\big)\right) x^{(1)}(t,\varepsilon) + \mathcal{R}_1(z(t,\varepsilon), t, \varepsilon)\Big](\cdot)\Big\}.$$

За умови

$$P_{B_0^*} P_{Q_d^*} \neq 0, \qquad P_{(B_0+\varepsilon B_1)^*} P_{Q_d^*} \neq 0, \qquad P_{\mathcal{B}_0^*(c_0^*(\varepsilon))} P_{Q_d^*} = 0, \qquad \mathcal{B}_0^+\left(c_0^*(\varepsilon)\right) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0] \tag{8}$$

принаймні один розв'язок другого рівняння отриманої операторної системи набирає вигляду

$$\xi(\varepsilon) = -\mathcal{B}_0^+\left(c_0^*(\varepsilon)\right) P_{Q_d^*}\Big\{\ell_1 x^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + \mathcal{J}_1\left(z_0(\cdot, c_0^*(\varepsilon)) + x(\cdot,\varepsilon), \varepsilon\right) -$$

$$- \ell K\Big[\mathcal{A}_1\left(z_0\big(t, c_0^*(\varepsilon)\big)\right) x^{(1)}(t,\varepsilon) + \mathcal{R}_1(z(t,\varepsilon), t, \varepsilon)\Big](\cdot)\Big\},$$

де $P_{\mathcal{B}_0^*(c_0(\varepsilon))}$ — $(d \times d)$-вимірна матриця-ортопроектор: $\mathbb{R}^d \to N\left(\mathcal{B}_0^*(c_0(\varepsilon))\right)$.

Таким чином, за умови (8) принаймні один розв'язок крайової задачі (6), (7) визначається операторною системою

$$x(t,\varepsilon) = X_r(t)\xi(\varepsilon) + x^{(1)}(t,\varepsilon), \tag{9}$$

$$x^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon \cdot G\left[Z\left(z_0\left(s, c_0^*(\varepsilon)\right) + x(s,\varepsilon), s, \varepsilon\right); J\left(z_0\left(\cdot, c_0^*(\varepsilon)\right) + x(\cdot,\varepsilon), \varepsilon\right)\right](t),$$

$$\xi(\varepsilon) = -\mathcal{B}_0^+\left(c_0^*(\varepsilon)\right) P_{Q_d^*}\Big\{\ell_1 x^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + \mathcal{J}_1\left(z_0\left(\cdot, c_0^*(\varepsilon)\right) + x(\cdot,\varepsilon), \varepsilon\right) -$$

$$- \ell K\Big[\mathcal{A}_1\left(z_0\big(t, c_0^*(\varepsilon)\big)\right) x^{(1)}(t,\varepsilon) + \mathcal{R}_1(z(t,\varepsilon), t, \varepsilon)\Big](\cdot)\Big\}.$$

Операторна система (9) відрізняється від аналогічних операторних систем [2, 4] визначенням похідних $\mathcal{A}_1(s)$ та $\ell_1\left(z_0\left(\cdot, c_0^*\right)\right)$ нелінійностей крайової задачі (6), (7). Для побудови розв'язків цієї операторної системи традиційно [2, 9] застосовується ітераційна схема, яка відповідає методу простих ітерацій [4, 9, 10]. Для знаходження розв'язку $c(\varepsilon) \in \mathbb{R}^r$ рівняння (4) може бути використаний метод Ньютона – Канторовича [5, 6]. Припустимо, що для рівняння (4) у малому околі точки $c_0^*(\varepsilon)$ при

$$0 \le \varepsilon \le \varepsilon_* \le \varepsilon_0$$

існує константа $\theta$. Тоді, згідно з [5, 6], за умов [3, с. 165]

$$P_{\mathcal{J}_j^*} = 0, \quad \theta\|c(\varepsilon) - c_j(\varepsilon)\| < 1 \tag{10}$$

для знаходження розв'язку $c(\varepsilon) \in \mathbb{R}^r$ рівняння (4) у малому околі точки $c_0^*(\varepsilon)$ застосовна ітераційна схема

$$c_{j+1}(\varepsilon) = c_j(\varepsilon) - \mathcal{J}_j^+ F(c_j(\varepsilon)), \quad j = 0, 1, 2, \ldots, \tag{11}$$

при цьому швидкість збіжності послідовності $\{c_j(\varepsilon)\}$ до розв'язку $c(\varepsilon)$ рівняння (4) квадратична. Шуканий розв'язок задачі (1), (2) визначається ітераційною схемою

$$z_{k+1}(t,\varepsilon) = z_0\left(t, c_0^*(\varepsilon)\right) + x_{k+1}(t,\varepsilon), \quad x_{k+1}(t,\varepsilon) = X_r(t)\xi_{k+1}(\varepsilon) + x_{k+1}^{(1)}(t,\varepsilon), \tag{12}$$

$$x_{k+1}^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon G\Big[Z(z_0\left(s, c_0^*(\varepsilon)\right) + x_k(s,\varepsilon), s, \varepsilon); J(z_0\left(\cdot, c_0^*(\varepsilon)\right) + x_k(\cdot,\varepsilon), \varepsilon)\Big](t), \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$c_{k+1}(\varepsilon) = c_0^*(\varepsilon) + \xi_{k+1}(\varepsilon), \quad F(c_{k+1}(\varepsilon)) = 0.$$

Таким чином, доведено таке твердження.

**Теорема 1** (достатня умова)**.** *Припустимо, що для крайової задачі (1), (2) має місце критичний* $(P_{Q^*} \neq 0)$ *випадок і виконується умова (3) розв'язності нетерової* $(m \neq n)$ *породжуючої задачі. Припустимо також, що рівняння (5) не перетворюється на тотожність та має дійсний корінь* $c_0^*(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$ *і для рівняння (4) у малому околі точки* $c_0^*(\varepsilon)$ *при*

$$0 \le \varepsilon \le \varepsilon_* \le \varepsilon_0$$

*існує константа* $\theta$. *За умови (10) для знаходження принаймні одного розв'язку крайової задачі (1), (2) у малому околі породжуючого розв'язку* $z_0\left(t, c_0^*(\varepsilon)\right)$ *застосовна ітераційна схема (12).*

Довжину відрізка $[0, \varepsilon^*]$ , на якому може бути використано ітераційну схему (12), можна оцінити з умов (10) та [5, с. 639; 11]

$$\sup_{\varepsilon \in [0;\varepsilon_0]} \left\| \frac{\varepsilon\, \partial G\left[Z\left(z_0\left(s, c_0^*\right) + x(s,\varepsilon), s, \varepsilon\right); J\left(z_0\left(\cdot, c_0^*\right) + x(\cdot,\varepsilon), \varepsilon\right)\right](t)}{\partial x} \right\| \le \lambda < 1. \tag{13}$$

Припустимо далі, що для крайової задачі (1), (2) має місце критичний $(P_{Q^*} \neq 0)$ випадок і виконується умова (3) розв'язності нетерової породжуючої задачі. Припустимо також, що рівняння (5) не перетворюється на тотожність і має дійсний корінь $c_0^*(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$ і виконуються співвідношення

$$P_{B_0^*} P_{Q_d^*} \neq 0, \qquad P_{(B_0 + \varepsilon B_1)^*} P_{Q_d^*} \neq 0, \qquad P_{\mathcal{B}_0^*\left(c_0^*(\varepsilon)\right)} P_{Q_d^*} \neq 0.$$

У малому околі породжуючого розв'язку $z_0\left(t, c_0^*(\varepsilon)\right)$ справедливе розвинення

$$\mathcal{R}_1\left(z_0\big(t, c_0^*(\varepsilon)\big) + x(t,\varepsilon), t, \varepsilon\right) = \frac{1}{2}\, d^2 Z\left(z_0\big(t, c_0^*(\varepsilon)\big), x(t,\varepsilon)\right) +$$

$$+ \mathcal{R}_2\left(z_0\big(t, c_0^*(\varepsilon)\big) + x(t,\varepsilon), t, \varepsilon\right),$$

де

$$d^2Z\left(z_0\left(t,c_0^*(\varepsilon)\right),x(t,\varepsilon)\right)=A_3\left(z_0\left(t,c_0^*(\varepsilon)\right),x(t,\varepsilon)\right)x(t,\varepsilon),$$

крім того,

$$\mathcal{A}_3\left(z_0\left(t,c_0^*(\varepsilon)\right),x(t,\varepsilon)\right):=\frac{\partial}{\partial x}\left\{Z_x'(z,t,\varepsilon)\,x\right\}\Big|_{z=z_0(t,c_0^*(\varepsilon))}.$$

Аналогічно,

$$\mathcal{J}_1\left(z_0\left(\cdot,c_0^*(\varepsilon)\right)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\right)=\frac{1}{2}\,d^2J\left(z_0\left(\cdot,c_0^*(\varepsilon)\right),x(\cdot,\varepsilon)\right)+\mathcal{J}_2\left(z_0\left(\cdot,c_0^*(\varepsilon)\right)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\right).$$

Тут

$$d^2\mathcal{J}\left(z_0\left(\cdot,c_0^*(\varepsilon)\right),x(\cdot,\varepsilon)\right)=\ell_3\left(z_0\left(\cdot,c_0^*(\varepsilon)\right),x(\cdot,\varepsilon)\right)x(\cdot,\varepsilon),$$

і, крім того,

$$\ell_3\left(z_0\left(\cdot,c_0^*(\varepsilon)\right),x(\cdot,\varepsilon)\right)x(\cdot,\varepsilon):=\frac{\partial}{\partial x}\left\{J_x'(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\,x\right\}\Big|_{z=z_0(t,c_0^*(\varepsilon))}.$$

Розв’язок крайової задачі (6), (7) природно шукати в околі розв’язку задачі

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x+\varepsilon\,Z\left(z_0\left(t,c_0^*(\varepsilon)\right),t,\varepsilon\right),$$
$$\ell x(\cdot,\varepsilon)=\varepsilon\,J\left(z_0\left(\cdot,c_0^*(\varepsilon)\right),\varepsilon\right)$$

у вигляді

$$x(t,\varepsilon)=X_r(t)\xi(\varepsilon)+\varepsilon\,G_1(t),\qquad G_1(t):=G\big[Z\left(z_0\left(s,c_0^*(\varepsilon)\right)s,\varepsilon\right);J\left(z_0\left(\cdot,c_0^*(\varepsilon)\right),\varepsilon\right)\big](t).$$

Позначимо $(d\times r)$-вимірну матрицю

$$\mathcal{B}_1(\varepsilon)=P_{Q_d^*}\Big\{\ell_3\left(z_0\left(\cdot,c_0^*(\varepsilon)\right),G_1(\cdot)\right)X_r(\cdot)-\ell K\big[A_3\left(z_0\left(s,c_0^*(\varepsilon)\right),G_1(s)\right)X_r(s)\big](\cdot)\Big\}.$$

Враховуючи другі диференціали нелінійностей

$$Z\left(z_0\left(t,c_0^*(\varepsilon)\right)+x(t,\varepsilon),t,\varepsilon\right),\qquad J\left(z_0\left(\cdot,c_0^*(\varepsilon)\right)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\right),$$

а також рівність (5), рівняння (4) набуває вигляду

$$\begin{aligned}&\left(\mathcal{B}_0(\varepsilon)+\varepsilon\mathcal{B}_1(\varepsilon)\right)\xi(\varepsilon)=\\&\quad=P_{Q_d^*}\Big\{\varepsilon\,\ell_1G_1(\cdot)+\frac{1}{2}\,\ell_3\left(z_0\left(\cdot,c_0^*(\varepsilon)\right),X_r(\cdot)c(\varepsilon)\right)X_r(\cdot)\xi(\varepsilon)+\\&\qquad+\frac{\varepsilon^2}{2}\,\ell_3\left(z_0\left(\cdot,c_0^*(\varepsilon)\right),G_1(\cdot)\right)G_1(\cdot)+\mathcal{J}_2\left(z_0\left(\cdot,c_0^*(\varepsilon)\right)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\right)-\\&\qquad-\ell K\Big[\varepsilon\,A_1(s)G_1(s)+\frac{\varepsilon^2}{2}\,A_3\left(z_0\left(s,c_0^*(\varepsilon)\right),G_1(s)\right)G_1(s)+\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}A_3\left(z_0\left(t,c_0^*(\varepsilon)\right),X_r(s)\xi(\varepsilon)\right)X_r(s)\xi(\varepsilon)+\mathcal{R}_2\left(z_0\left(t,c_0^*(\varepsilon)\right)+x(t,\varepsilon),t,\varepsilon\right)\Bigg](\cdot)\Bigg\}.$$

За умов

$$P_{B_0^*}P_{Q_d^*}\neq 0,\qquad P_{(B_0+\varepsilon B_1)^*}P_{Q_d^*}\neq 0,\qquad P_{(\mathcal{B}_0(\varepsilon)+\varepsilon\,\mathcal{B}_1(\varepsilon))^*}P_{Q_d^*}=0, \tag{14}$$

$$(\mathcal{B}_0(\varepsilon)+\varepsilon\mathcal{B}_1(\varepsilon))^+\in\mathbb{C}[0,\varepsilon_0] \tag{15}$$

принаймні один розв'язок крайової задачі (6), (7) визначається операторною системою

$$x(t,\varepsilon)=X_r(t)\xi(\varepsilon)+x^{(1)}(t,\varepsilon), \tag{16}$$

$$x^{(1)}(t,\varepsilon)=\varepsilon\,G\left[Z\left(z_0\left(s,c_0^*(\varepsilon)\right)+x(s,\varepsilon),s,\varepsilon\right);J\left(z_0\left(\cdot,c_0^*(\varepsilon)\right)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\right)\right](t),$$

$$\xi(\varepsilon)=(\mathcal{B}_0(\varepsilon)+\varepsilon\mathcal{B}_1(\varepsilon))^+\,P_{Q_d^*}\Bigg\{\varepsilon\,\ell_1G_1(\cdot)+\frac{1}{2}\ell_3\left(z_0\left(\cdot,c_0^*(\varepsilon)\right),X_r(\cdot)c(\varepsilon)\right)X_r(\cdot)\xi(\varepsilon)+$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\ell_3\left(z_0\left(\cdot,c_0^*(\varepsilon)\right),G_1(\cdot)\right)G_1(\cdot)+\mathcal{J}_2\left(z_0\left(\cdot,c_0^*(\varepsilon)\right)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\right)-$$

$$-\ell K\Bigg[\varepsilon\,A_1(s)G_1(s)+\frac{\varepsilon^2}{2}A_3\left(z_0\left(s,c_0^*(\varepsilon)\right),G_1(s)\right)G_1(s)+$$

$$+\frac{1}{2}A_3\left(z_0\left(t,c_0^*(\varepsilon)\right),X_r(s)\xi(\varepsilon)\right)X_r(s)\xi(\varepsilon)+\mathcal{R}_2\left(z_0\left(t,c_0^*(\varepsilon)\right)+x(t,\varepsilon),t,\varepsilon\right)\Bigg](\cdot)\Bigg\},$$

де $P_{(\mathcal{B}_0(\varepsilon)+\varepsilon\mathcal{B}_1(\varepsilon))^*}$ — матриця-ортопроектор

$$P_{(\mathcal{B}_0(\varepsilon)+\varepsilon\mathcal{B}_1(\varepsilon))^*}:\mathbb{R}^d\to\mathbb{N}((\mathcal{B}_0(\varepsilon)+\varepsilon\mathcal{B}_1(\varepsilon))^*).$$

Для побудови розв'язків цієї операторної системи застосовна [2, 9] ітераційна схема, яка відповідає методу простих ітерацій [4, 9, 10]. Таким чином, доведено таке твердження.

**Теорема 2** (достатня умова)**.** *Припустимо, що для крайової задачі (1), (2) має місце критичний* ($P_{Q^*}\neq 0$) *випадок і виконується умова (3) розв'язності нетерової* ($m\neq n$) *породжуючої задачі. Припустимо також, що рівняння (5) не перетворюється на тотожність і має дійсний корінь* $c_0^*(\varepsilon)\in\mathbb{C}[0,\varepsilon_0]$. *За умов (14), (15) принаймні один розв'язок крайової задачі (6), (7) визначається операторною системою (16).*

Для знаходження розв'язку $c(\varepsilon)\in\mathbb{R}^r$ рівняння (4) може бути використано також метод Ньютона – Канторовича [5, 6, 12].

**Теорема 3** (достатня умова)**.** *Припустимо, що для крайової задачі (1), (2) має місце критичний* ($P_{Q^*}\neq 0$) *випадок і виконується умова (3) розв'язності нетерової* ($m\neq n$) *породжуючої задачі. Припустимо також, що рівняння (5) не перетворюється на тотожність і має дійсний корінь* $c_0^*(\varepsilon)\in\mathbb{C}[0,\varepsilon_0]$ *і для рівняння (4) у малому околі точки* $c_0^*(\varepsilon)$ *при* $0\leq\varepsilon\leq\varepsilon_*\leq\varepsilon_0$ *існує константа* $\theta$. *За умови (10) для знаходження принаймні одного розв'язку крайової задачі (1), (2) у малому околі породжуючого розв'язку* $z_0\left(t,c_0^*(\varepsilon)\right)$ *застосовна ітераційна схема (12).*

Довжину відрізка $[0,\varepsilon^*]$, на якому може бути використана ітераційна схема (12), можна оцінити з умов (10) та (13).

***Приклад.*** Умови теореми 1 справджуються у випадку $2\pi$-періодичної крайової задачі для рівняння

$$y'' + y = \varepsilon Y(y, t, \varepsilon), \tag{17}$$

де, зокрема,

$$Y(y, t, \varepsilon) := \frac{y^3}{12} - \frac{\varepsilon^3 \sin t}{16}.$$

Рівняння для породжуючих амплітуд [1–3] у випадку періодичної крайової задачі для рівняння (17) не перетворюється на тотожність та має кратний

$$B_0 = B_1 = 0$$

сталий дійсний корінь $c_0^* = 0,$ отже, результати з [1–3] не можуть бути застосовані внаслідок нерівностей

$$P_{B_0^*} P_{Q_d^*} \neq 0, \qquad P_{(B_0 + \varepsilon B_1)^*} P_{Q_d^*} \neq 0.$$

Проте рівняння для породжуючих констант (5) має простий

$$\mathcal{B}_0\left(c_0(\varepsilon)\right) = -P_{Q_d^*} \ell K \big[\mathcal{A}_1\left(z_0\big(t, c_0^*(\varepsilon)\big)\right) X_r(t)\big](\cdot) = \frac{\pi\,\varepsilon^2}{16} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

неперервний дійсний корінь

$$c_0^*(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \end{pmatrix}^*,$$

а отже, виконуються умови теореми 1. Зафіксуємо $\varepsilon_0 := 0.$ На першому кроці ітераційної схеми (12) внаслідок повноти рангу матриці $J_0$ умова $P_{\mathcal{J}_0^*} = 0$ виконується. Перше наближення до розв'язку періодичної задачі для рівняння (17) у малому околі породжуючого розв'язку

$$y_0\left(t, c_0^*(\varepsilon)\right) = \varepsilon \sin t$$

має вигляд

$$y_1(\tau, \varepsilon) = y_0\left(t, c_0^*(\varepsilon)\right) + x_1(t, \varepsilon), \qquad x_1(t, \varepsilon) = X_r(t)\xi_1(\varepsilon) + x_1^{(1)}(t, \varepsilon),$$

де

$$x_1^{(1)}(t, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{384}\left(\sin 3t - \sin t\right), \quad \xi_1(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0].$$

Покладемо $\xi_1^{(0)}(\varepsilon) := 0.$ Оскільки умова $P_{\mathcal{J}_0^*} = 0$ виконується, перше наближення до розв'язку рівняння $F(\xi_1(\varepsilon)) = 0$ у випадку $2\pi$-періодичної задачі для рівняння (17) має вигляд

$$\xi_1^{(1)}(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^4\left(245\,760 - 2\,240\,\varepsilon^3 + 7\,\varepsilon^6\right)}{64\left(442\,368 - 7\,680\,\varepsilon^3 + 35\,\varepsilon^6\right)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

при цьому

$$F\left(\xi_1^{(1)}(\varepsilon)\right) = -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\left(\frac{25\pi\,\varepsilon^9}{1\,769\,472} + \frac{925\pi\,\varepsilon^{12}}{6\,115\,295\,232} + \frac{24\,085\pi\,\varepsilon^{15}}{9\,393\,093\,476\,352} + \ldots\right),$$

де

$$\left\| \left\| F\big(\xi_1^{(1)}(\varepsilon)\big) \right\|_\infty \right\|_{\mathbb{C}[0;\varepsilon_0]} \approx 4{,}43\,864 \times 10^{-14}.$$

Оскільки умова (10) на першому кроці ітераційної схеми (11) виконується:

$$\theta_1\,|c_1 - c_0^*| \approx 0{,}0000\ 347\ 223 \ll 1,$$

знаходимо друге наближення до розв'язку рівняння $F(\xi_1(\varepsilon)) = 0$ у випадку $2\pi$-періодичної задачі для рівняння (17):

$$\xi_1^{(2)}(\varepsilon) = \binom{0}{1}\left(\frac{5\,\varepsilon^4}{576} - \frac{5\,\varepsilon^7}{1\ 327\ 104} - \frac{\varepsilon^{10}}{286\ 654\ 464} + \frac{625\,\varepsilon^{13}}{110\ 075\ 314\ 176} + \right.$$

$$\left. + \frac{15\ 415\,\varepsilon^{16}}{126\ 806\ 761\ 930\ 752} + \frac{3\ 104\ 791\,\varepsilon^{19}}{2\ 337\ 302\ 235\ 907\ 620\ 864} + \ldots\right),$$

при цьому

$$F\left(\xi_1^{(2)}(\varepsilon)\right) = -\binom{0}{1}\left(-\frac{625\pi\,\varepsilon^{15}}{587\ 068\ 342\ 272} - \right.$$

$$\left. - \frac{23\ 125\pi\,\varepsilon^{18}}{1\ 014\ 454\ 095\ 446\ 016} - \frac{3\ 436\ 625\pi\,\varepsilon^{21}}{14\ 023\ 813\ 415\ 445\ 725\ 184} + \ldots\right),$$

де

$$\left\|\,\left\| F\big(\xi_1^{(2)}(\varepsilon)\big)\right\|_\infty\right\|_{\mathbb{C}[0;\varepsilon_0]} \approx 3{,}34\ 464 \times 10^{-24}.$$

Умова (10) на другому кроці ітераційної схеми (11) також виконується:

$$\theta_1 \cdot |c_1 - c_0^*| \approx 0{,}0\ 000\ 347\ 223 \ll 1.$$

Умова (13) збіжності ітераційної схеми (12) на першому

$$\left\|\,\left\|\varepsilon\, G_y'\big[Y(y_0(s,\varepsilon), s, \varepsilon)\big](\cdot)\right\|_{\mathbb{C}^2[0;2\pi]}\right\|_{\mathbb{C}[0;\varepsilon_0]} \approx 0{,}000\ 712\ 246 \ll 1$$

та другому кроці також виконується:

$$\left\|\,\left\|\varepsilon\, G_y'\big[Y(y_1(s,\varepsilon), s, \varepsilon)\big](\cdot)\right\|_{\mathbb{C}^2[0;2\pi]}\right\|_{\mathbb{C}[0;\varepsilon_0]} \approx 0{,}000\ 712\ 246 \ll 1.$$

Знайдені нульове та перше наближення до періодичного розв'язку рівняння типу Дюффінга (17) характеризують нев'язки

$$\Delta_k(\varepsilon) = \left\|y_k''(t,\varepsilon) + y_k(t,\varepsilon) - \varepsilon\, Y(y_k(t,\varepsilon), t, \varepsilon)\right\|_{\mathbb{C}[0;2\pi]}, \quad k = 0, 1.$$

Зокрема, при $\varepsilon = 0,1$ маємо

$$\Delta_0(0,1) \approx 2{,}08\ 333 \times 10^{-6}, \qquad \Delta_1(0,1) \approx 4{,}34\ 028 \times 10^{-11}.$$

Порівняємо знайдені нульове та перше наближення до періодичного розв'язку рівняння типу Дюффінга (17) з першими п'ятьма наближеннями до періодичного розв'язку рівняння типу Дюффінга (17), знайденими за допомогою методу Пуанкаре

$$y_{1p}(t,\varepsilon) = y_{2p}(t,\varepsilon) = y_{3p}(t,\varepsilon) = y_0(t, c_0^*(\varepsilon)),$$

$$y_{4p}(t,\varepsilon) = y_{5p}(t,\varepsilon) = y_0\left(t, c_0^*(\varepsilon)\right) - \frac{\varepsilon^4\, \sin t}{128} + \frac{\varepsilon^4 \sin 3t}{384}.$$

Перші п'ять наближень до періодичного розв'язку рівняння типу Дюффінга (17), знайдені за допомогою методу Пуанкаре, характеризують нев'язки

$$\Delta_{0p}(0,1) = \Delta_{1p}(0,1) = \Delta_{2p}(0,1) = \Delta_{3p}(0,1) \approx 2{,}08\,333 \times 10^{-6},$$

$$\Delta_4(0,1) = \Delta_{5p}(0,1) \approx 2{,}60\,414 \times 10^{-10}.$$

Таким чином, знайдені за допомогою ітераційної схеми (12) нульове та перше наближення до періодичного розв'язку рівняння типу Дюффінга (17) перевершують точність перших п'яти наближень до періодичного розв'язку рівняння типу Дюффінга (17), знайдених за допомогою методу Пуанкаре.

Для знаходження розв'язку операторної системи (9) також може бути використано метод найменших квадратів [4, 13 – 15].

Внаслідок рівності [4]

$$\mathcal{B}_0\left(c_0^*(\varepsilon)\right) = B_0 := F_c'\left(c_0^*(\varepsilon)\right)$$

для знаходження принаймні одного розв'язку операторної системи (9) можна застосувати ітераційну схему

$$x_{k+1}(t,\varepsilon) = X_r(t)\xi_{k+1}^{(j+1)}(\varepsilon) + x_{k+1}^{(1)}(t,\varepsilon), \quad j = 0,1,2,\ldots,$$

$$\xi_{k+1}^{(j+1)}(\varepsilon) = -\mathcal{B}_0^+\left(c_0^*(\varepsilon)\right) P_{Q_d^*}\Big\{\ell_1 x_{k+1}^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + \mathcal{J}_1(z_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) -$$

$$- \ell K\Big[\mathcal{A}_1\left(z_0\big(t, c_0^*(\varepsilon)\big)\right) x_{k+1}^{(1)}(t,\varepsilon) + \mathcal{R}_1(z_k(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\Big](\cdot)\Big\},$$

яка узагальнює модифікований метод Ньютона [5, с. 670] на випадок $m \neq n$. Як відомо, така ітераційна схема має порядок збіжності менший другого.

Покладемо $\xi_1^{(0)}(\varepsilon) := 0$. Оскільки умова $P_{\mathcal{B}_0^*} = 0$ виконується, перше наближення до розв'язку рівняння $F(\xi_1(\varepsilon)) = 0$ у випадку $2\pi$-періодичної задачі для рівняння (17) має вигляд

$$\xi_1^{(1)}(\varepsilon) \approx \left(\frac{5\,\varepsilon^4}{576} - \frac{35\,\varepsilon^7}{442\,368} + \frac{7\,\varepsilon^{10}}{28\,311\,552} + \ldots\right)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

при цьому

$$\left\|\,\left\| F\Big(\xi_1^{(1)}(\varepsilon)\Big)\right\|_\infty \right\|_{\mathbb{C}[0;\varepsilon_0]} \approx 4{,}43\,858 \times 10^{-14}.$$

Далі знаходимо друге наближення до розв'язку рівняння $F(\xi_1(\varepsilon)) = 0$ у випадку $2\pi$-періодичної задачі для рівняння (17):

$$\xi_1^{(2)}(\varepsilon) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\left(\frac{5\,\varepsilon^4}{576} - \frac{5\,\varepsilon^7}{1\,327\,104} - \frac{\varepsilon^{10}}{286\,654\,464} + \frac{875\,\varepsilon^{13}}{146\,767\,085\,568} + \ldots\right),$$

при цьому нев'язка

$$\left\|\,\left\| F\Big(\xi_1^{(2)}(\varepsilon)\Big)\right\|_\infty \right\|_{\mathbb{C}[0;\varepsilon_0]} \approx 3{,}51\,177 \times 10^{-24}$$

лише трохи гірша за нев'язку другого наближення, знайденого за ітераційною схемою (11).

Запропоновану у цій статті схему дослідження нелінійних крайових задач аналогічно [1, 2, 16] можна перенести на нелінійні крайові задачі з запізненням, а також на нелінійні матричні [17] та диференціально-алгебраїчні крайові задачі [18, 19].

## Література


1. А. А. Бойчук, *Конструктивные методы анализа краевых задач*, Наук. думка, Киев (1990).
2. A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko, *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. Second edition.*, De Gruyter, Berlin (2016).
3. А. А. Бойчук, С. М. Чуйко, *О приближенном решении нелинейных краевых задач методом Ньютона–Канторовича*, Нелін. коливання, **23**, № 2, 162–183 (2020).
4. С. М. Чуйко, Е. В. Чуйко, *О приведении нетеровой краевой задачи к критическому случаю первого порядка*, Нелін. коливання, **17**, № 2, 281–292 (2014); ***English translation:*** J. Math. Sci. (N.Y.), **208**, № 5, 607–619 (2015).
5. Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ*, Наука, Москва (1977).
6. S. M. Chuiko, *To the generalization of the Newton–Kantorovich theorem*, Visn. V. N. Karazin Kharkiv Nat. Univ. Ser. Math. Appl. Math. Mech., **85**, № 1, 62–68 (2017).
7. И. Г. Малкин, *Некоторые задачи теории нелинейных колебаний*, Гостехиздат, Москва, (1956).
8. С. М. Чуйко, *Слабонелинейная краевая задача в особом критическом случае*, Укр. мат. журн., **61**, № 4, 548–562 (2009); ***English translation:*** Ukr. Math. J., **61**, 657 (2009).
9. Д. К. Лика, Ю. А. Рябов, *Методы итераций и мажорирующие уравнения Ляпунова в теории нелинейных колебаний*, Штиинца, Кишинев (1974).
10. С. М. Чуйко, *Область сходимости итерационной процедуры для автономной краевой задачи*, Нелін. коливання, **9**, № 3, 416–432 (2006); ***English translation:*** Nonlinear Oscil., **9**, № 3, 405–422 (2006).
11. А. С. Чуйко, *Область сходимости итерационной процедуры для слабонелинейной краевой задачи*, Нелін. коливання, **8**, № 2, 278–288 (2005); ***English translation:*** Nonlinear Oscillations, **8**, 277–287 (2005).
12. С. М. Чуйко, *Про узагальнення теореми Ньютона–Канторовича у банахововому просторі*, Доп. НАН України, № 6, 22–31 (2018).
13. С. М. Чуйко, О. В. Старкова, *О приближенном решении автономных краевых задач методом наименьших квадратов*, Нелін. коливання, **12**, № 4, 556–573 (2009); ***English translation:*** Nonlinear Oscil., **12**, № 4, 556–573 (2009).
14. Н. И. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимации*, Наука, Москва (1965).
15. С. М. Чуйко, *О приближенном решении краевых задач методом наименьших квадратов*, Нелін. коливання, **11**, № 4, 554–573 (2008); ***English translation:*** Nonlinear Oscil., **11**, № 4, 585–604 (2008).
16. С. М. Чуйко, Ан. С. Чуйко, *О приближенном решении периодических краевых задач с запаздыванием методом наименьших квадратов в критическом случае*, Нелін. коливання, **14**, № 3, 419–433 (2011); ***English translation:*** Nonlinear Oscil., **14**, 445–460 (2012).
17. S. Chuiko, *Weakly nonlinear boundary value-problem for a matrix differential equation*, Miskolc Math. Notes., **17**, № 1, 139–150 (2016).
18. А. М. Самойленко, М. І. Шкіль, В. П. Яковець, *Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженням*, Вища шк., Київ (2000).
19. S. M. Chuiko, *On a reduction of the order in a differential-algebraic system*, J. Math. Sci., **235**, № 1, 2–18 (2018).


*Одержано 22.07.20*