УДК 517.946

ПАРАБОЛІЧНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ В КУСКОВО-ОДНОРІДНОМУ КЛИНОВИДНОМУ ЦИЛІНДРИЧНО-КРУГОВОМУ ПРОСТОРІ

А. П. Громик

Поділ. держ. аграрно-техн. ун-т
вул. Шевченка, 13, Кам'янець-Подільський, 32300, Україна
e-mail: gapon74@gmail.com

І. М. Конет, Т. М. Пилипюк

Кам'янець-Поділ. нац. ун-т ім. І. Огієнка
вул. Огієнка, 61, Кам'янець-Подільський, 32300, Україна
e-mail: konet51@ukr.net,
t-myh@i.ua

By using the method of integral and hybrid integral transforms together with the method of principal solutions (influence matrices and Green's matrices), for the first time, we have constructed unique exact analytical solutions of parabolic boundary-value problems of mathematical physics in a piecewise homogeneous wedge-shaped cylindrically circular space.

За допомогою методу інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків (матриць впливу та матриць Гріна) вперше побудовано єдині точні аналітичні розв'язки параболічних крайових задач математичної фізики в кусково-однорідному клиновидному циліндрично-круговому просторі.

1. Вступ. Теорія крайових і мішаних (початково-крайових) задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними, зокрема рівнянь математичної фізики, — важливий розділ сучасної теорії диференціальних рівнянь, який в цей час інтенсивно розвивається. Її актуальність обумовлена як значущістю її результатів для розвитку багатьох розділів математики, так і численними застосуваннями її досягнень при дослідженні різноманітних математичних моделей різних процесів і явищ фізики, хімії, біології, механіки, медицини, економіки, техніки, новітніх технологій.

Вагомі результати з теорії задачі Коші та початково-крайових задач для параболічних рівнянь одержано в [1 – 10] та в працях інших відомих вітчизняних і зарубіжних математиків.

Відомо, що складність досліджуваних крайових і мішаних задач суттєво залежить як від коефіцієнтів рівнянь (різні види вироджень і особливостей коефіцієнтів), так і від геометрії області (гладкість межі, наявність кутових точок тощо), в якій розглядається задача. На цей час досить детально вивчено властивості розв'язків і розвинуто методи побудови розв'язків крайових задач для лінійних, квазілінійних та деяких нелінійних рівнянь різних типів (еліптичних, параболічних, гіперболічних) в однозв'язних областях (однорідних середовищах), які обумовлені згаданими вище властивостями коефіцієнтів рівнянь і геометричної структури області, та побудовано функціональні простори коректності задач у сенсі Адамара.

© А. П. Громик, І. М. Конет, Т. М. Пилипюк, 2020

Водночас багато важливих прикладних задач термомеханіки, теплофізики, дифузії, теорії пружності, теорії електричних кіл, теорії коливань приводять до крайових і мішаних задач для диференціальних рівнянь із частинними похідними різних типів не тільки в однорідних середовищах, коли коефіцієнти рівнянь є неперервними, але й у неоднорідних і кусково-однорідних середовищах, коли коефіцієнти рівнянь є кусково-неперервними чи, зокрема, кусково-сталими [11 – 13].

Крім методу відокремлення змінних та його узагальнень одним із важливих і ефективних методів вивчення лінійних крайових і мішаних задач для диференціальних рівнянь із частинними похідними в однорідних середовищах є метод інтегральних перетворень, який дає можливість побудувати в аналітичному вигляді точні розв'язки задач за допомогою їхніх інтегральних зображень.

У той же час для досить широкого класу лінійних задач у кусково-однорідних середовищах ефективним виявився метод гібридних інтегральних перетворень, породжених відповідними гібридними диференціальними операторами, коли на кожній компоненті зв'язності кусково-однорідного середовища розглядаються або ж різні диференціальні оператори, або ж диференціальні оператори того ж самого вигляду, але з різними наборами коефіцієнтів [14 – 18].

У цій статті методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків побудовано інтегральні зображення єдиних точних аналітичних розв'язків параболічних крайових задач математичної фізики в кусково-однорідному клиновидному циліндрично-круговому просторі.

2. Постановка задачі. Розглянемо задачу побудови обмеженого на множині

$$D = \left\{ (t, r, \varphi, z) \mid t > 0;\ r \in I_n^+ = \bigcup_{j=1}^{n+1} I_j \equiv \bigcup_{j=1}^{n+1} (R_{j-1}; R_j),\ R_0 = 0;\ R_{n+1} = +\infty \right\},$$

$\varphi \in (0; \varphi_0);\ \varphi_0 < 2\pi;\ z \in (-\infty; +\infty)\}$ класичного розв'язку диференціальних рівнянь із частинними похідними параболічного типу 2-го порядку [19]

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} - \left[a_{rj}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{a_{\varphi j}^2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u_j +$$
$$+ \chi_j^2 u_j = f_j(t, r, \varphi, z), \quad r \in I_j, \quad j = \overline{1, n+1}, \tag{1}$$

з початковими умовами

$$u_j(t, r, \varphi, z)|_{t=0} = g_j(r, \varphi, z), \quad r \in I_j, \quad j = \overline{1, n+1}, \tag{2}$$

крайовими умовами

$$\left.\frac{\partial^s u_j}{\partial z^s}\right|_{z=-\infty} = 0, \quad \left.\frac{\partial^s u_j}{\partial z^s}\right|_{z=+\infty} = 0, \quad s = 0, 1, \quad j = \overline{1, n+1}, \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial^s u_1}{\partial r^s}\right|_{r=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial^s u_{n+1}}{\partial r^s}\right|_{r=+\infty} = 0, \quad s = 0, 1, \tag{4}$$

одними з крайових умов на гранях клина [17]

$$u_j|_{\varphi=0} = g_{1j}(t, r, z), \qquad u_j|_{\varphi=\varphi_0} = w_{1j}(t, r, z), \quad j = \overline{1, n+1}, \tag{5}$$

$$u_j\big|_{\varphi=0} = g_{2j}(t,r,z), \qquad \frac{\partial u_j}{\partial \varphi}\bigg|_{\varphi=\varphi_0} = -w_{2j}(t,r,z), \quad j=\overline{1,n+1}, \tag{6}$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial \varphi}\bigg|_{\varphi=0} = g_{3j}(t,r,z), \qquad u_j\big|_{\varphi=\varphi_0} = w_{3j}(t,r,z), \quad j=\overline{1,n+1}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial \varphi}\bigg|_{\varphi=0} = g_{4j}(t,r,z), \qquad \frac{\partial u_j}{\partial \varphi}\bigg|_{\varphi=\varphi_0} = -w_{4j}(t,r,z), \quad j=\overline{1,n+1}, \tag{8}$$

та умовами спряження [18]

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^k\right) u_k - \left(\alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^k\right) u_{k+1}\right]\bigg|_{r=R_k} = 0, \quad j=1,2, \quad k=\overline{1,n}, \tag{9}$$

де $a_{rj},\ a_{\varphi j},\ a_{zj},\ \chi_j,\ p_j,\ \alpha_{js}^k,\ \beta_{js}^k$ — деякі сталі;

$$c_{jk} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k \neq 0, \quad c_{1k}\, c_{2k} > 0,$$

$$f(t,r,\varphi,z) = \{f_1(t,r,\varphi,z), f_2(t,r,\varphi,z), \ldots, f_{n+1}(t,r,\varphi,z)\},$$

$$g(r,\varphi,z) = \{g_1(r,\varphi,z), g_2(r,\varphi,z), \ldots, g_{n+1}(r,\varphi,z)\},$$

$$g_{pj}(t,r,z), w_{pj}(t,r,z), \quad p=\overline{1,4}, \quad j=\overline{1,n+1},$$

— задані дійсні обмежені неперервні функції;

$$u(t,r,\varphi,z) = \{u_1(t,r,\varphi,z), u_2(t,r,\varphi,z), \ldots, u_{n+1}(t,r,\varphi,z)\}$$

— шукана дійсна неперервно диференційовна за змінною t і двічі неперервно диференційовна за геометричними змінними функція.

Зауважимо, що:

1) у випадку $\chi_j \equiv 0$ рівняння (1) є класичним тривимірним неоднорідним рівнянням теплопровідності (дифузії) для ортотропного середовища у циліндричній системі координат;

2) якщо $\alpha_{11}^k = 0,\ \beta_{11}^k = 1,\ \alpha_{12}^k = 0,\ \beta_{12}^k = 1,\ \alpha_{21}^k = \lambda_1^k,\ \beta_{21}^k = 0,\ \alpha_{22}^k = \lambda_2^k,\ \beta_{22}^k = 0$, де $\lambda_1^k,\ \lambda_2^k$ — коефіцієнти теплопровідності, то умови спряження (9) збігаються з умовами ідеального теплового (термічного) контакту;

3) якщо $\alpha_{11}^k = b_k,\ \beta_{11}^k = 1,\ \alpha_{12}^k = 0,\ \beta_{12}^k = 1,\ \alpha_{21}^k = \lambda_1^k,\ \beta_{21}^k = 0,\ \alpha_{22}^k = \lambda_2^k,\ \beta_{22}^k = 0$, де b_k — коефіцієнти термоопору, то умови спряження (9) збігаються з умовами неідеального теплового контакту.

Таким чином, у зазначених випадках 1, 2 (або 1, 3) розглянута параболічна крайова задача математичної фізики моделює процеси теплопровідності в кусково-однорідному клиновидному циліндрично-круговому просторі [17].

3. Основна частина. Припустимо, що розв'язки параболічних початково-крайових задач (1)–(4), (5), (9); (1)–(4), (6), (9); (1)–(4), (7), (9); (1)–(4), (8), (9) існують і задані, а шукані функції задовольняють умови застосовності залучених далі прямих та обернених інтегральних і гібридних інтегральних перетворень [18, 20, 21].

Згідно з [21] визначимо скінченні пряме $F_{m,ik}$ та обернене $F^{-1}_{m,ik}$ інтегральні перетворення Фур'є щодо кутової змінної $\varphi \in (0;\varphi_0)$ за формулами

$$F_{m,ik}[f(\varphi)] = \int\limits_0^{\varphi_0} f(\varphi) U_{m,ik}(\varphi) d\varphi \equiv f_{m,ik}, \tag{10}$$

$$F^{-1}_{m,ik}[f_{m,ik}] = \frac{2}{\varphi_0} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m^{ik} f_{m,ik} U_{m,ik}(\varphi) \equiv f(\varphi), \tag{11}$$

де

$$U_{m,11}(\varphi) = \sin(\beta_{m,11}\varphi), \qquad \beta_{m,11} = \frac{\pi m}{\varphi_0},$$

$$U_{m,12}(\varphi) = \sin(\beta_{m,12}\varphi), \qquad \beta_{m,12} = \frac{\pi(2m+1)}{2\varphi_0},$$

$$U_{m,21}(\varphi) = \cos(\beta_{m,21}\varphi), \qquad \beta_{m,21} = \beta_{m,12},$$

$$U_{m,22}(\varphi) = \cos(\beta_{m,22}\varphi), \qquad \beta_{m,22} = \beta_{m,11},$$

$\varepsilon_0^{ik} = 0,\ \varepsilon_m^{ik} = 1$ при $ik = 11, 12, 21,\ m = 1, 2, 3, \ldots,\ \varepsilon_0^{22} = \frac{1}{2},\ \varepsilon_m^{22} = 1$ при $m = 1, 2, 3, \ldots.$

Безпосередньо перевіряється, що для інтегрального оператора $F_{m,ik}$ виконується тотожність

$$F_{m,ik}\left[\frac{d^2 f}{d\varphi^2}\right] = -\beta^2_{m,ik} f_{m,ik} + \Phi_{m,ik}, \quad i,k = 1,2, \tag{12}$$

де

$$\Phi_{m,11} = \frac{\pi m}{\varphi_0}\left[f(0) + (-1)^{m+1} f(\varphi_0)\right], \qquad \Phi_{m,12} = \frac{\pi(2m+1)}{2\varphi_0} f(0) + (-1)^m \left.\frac{df}{d\varphi}\right|_{\varphi=\varphi_0},$$

$$\Phi_{m,21} = -\left.\frac{df}{d\varphi}\right|_{\varphi=0} + (-1)^m \frac{\pi(2m+1)}{2\varphi_0} f(\varphi_0), \qquad \Phi_{m,22} = -\left.\frac{df}{d\varphi}\right|_{\varphi=0} + (-1)^m \left.\frac{df}{d\varphi}\right|_{\varphi=\varphi_0}.$$

Інтегральний оператор $F_{m,ik}$, який діє за формулою (10), внаслідок тотожності (12) ставить у відповідність тривимірним крайовим задачам (1) – (4), (5), (9); (1) – (4), (6), (9); (1) – (4), (7), (9); (1) – (4), (8), (9) задачу побудови обмеженого на множині

$$D' = \{(t,r,z) \mid t > 0,\ r \in I_n^+,\ z \in (-\infty;+\infty)\}$$

класичного розв'язку двовимірних диференціальних рівнянь параболічного типу 2-го порядку

$$\frac{\partial u_{jm,ik}}{\partial t} - \left[a_{rj}^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\nu^2_{jm,ik}}{r^2}\right) + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right] u_{jm,ik} +$$

$$+ \chi_j^2 u_{jm,ik} = G_{jm,ik}(t,r,z), \quad r \in I_j, \quad j = \overline{1, n+1}, \tag{13}$$

з початковими умовами

$$u_{jm,ik}(t,r,z)|_{t=0} = g_{jm,ik}(r,z), \quad r \in I_j, \quad j = \overline{1,n+1}, \tag{14}$$

крайовими умовами

$$\left.\frac{\partial^s u_{jm,ik}}{\partial z^s}\right|_{z=-\infty} = 0, \qquad \left.\frac{\partial^s u_{jm,ik}}{\partial z^s}\right|_{z=+\infty} = 0, \quad s = 0,1, \quad j = \overline{1,n+1}, \tag{15}$$

$$\left.\frac{\partial^s u_{1m,ik}}{\partial r^s}\right|_{r=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial^s u_{n+1,m,ik}}{\partial r^s}\right|_{r=+\infty} = 0, \quad s = 0,1, \tag{16}$$

та умовами спряження

$$\left.\left[\left(\alpha_{j1}^p \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^p\right) u_{pm,ik} - \left(\alpha_{j2}^p \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^p\right) u_{p+1,m,ik}\right]\right|_{r=R_p} = 0, \quad j = 1,2, \quad p = \overline{1,n}, \tag{17}$$

де $G_{jm,ik}(t,r,z) = f_{jm,ik}(t,r,z) + a_{\varphi j}^2 r^{-2} \Phi_{m,ik}(t,r,z)$, $\nu_{jm,ik} = a_{rj}^{-1} a_{\varphi j} \beta_{m,ik}$.

До двовимірної крайової задачі (13)–(17) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовій осі $(-\infty;+\infty)$ щодо змінної z [20]:

$$F[g(z)] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(z)\exp(-i\sigma z)dz \equiv \tilde{g}(\sigma), \quad i = \sqrt{-1}, \tag{18}$$

$$F^{-1}[\tilde{g}(\sigma)] = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(\sigma)\exp(i\sigma z)d\sigma \equiv g(z), \tag{19}$$

$$F\left[\frac{d^2 g}{dz^2}\right] = -\sigma^2 F[g(z)] \equiv -\sigma^2 \tilde{g}(\sigma). \tag{20}$$

Інтегральний оператор F, який діє за формулою (18), внаслідок тотожності (20) ставить у відповідність початково-крайовій задачі (13)–(17) задачу побудови обмеженого на множині $D'' = \{(t,r) \mid t > 0; r \in I_n^+\}$ класичного розв'язку одновимірних диференціальних рівнянь B-параболічного типу 2-го порядку

$$\frac{\partial \tilde{u}_{jm,ik}}{\partial t} - a_{rj}^2 B_{\nu_{jm,ik}}[\tilde{u}_{jm,ik}] + \left(a_{zj}^2\sigma^2 + \chi_j^2\right)\tilde{u}_{jm,ik} = \tilde{G}_{jm,ik}(t,r,\sigma), \tag{21}$$

$$r \in I_j, \quad j = \overline{1,n+1},$$

з початковими умовами

$$\tilde{u}_{jm,ik}(t,r,\sigma)|_{t=0} = \tilde{g}_{jm,ik}(r,\sigma), \quad r \in I_j, \quad j = \overline{1,n+1}, \tag{22}$$

крайовими умовами

$$\left.\frac{\partial^s \tilde{u}_{1m,ik}}{\partial r^s}\right|_{r=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial^s \tilde{u}_{n+1,m,ik}}{\partial r^s}\right|_{r=+\infty} = 0, \quad s = 0,1, \tag{23}$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^p \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^p\right) \tilde{u}_{p,m,ik} - \left(\alpha_{j2}^p \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^p\right) \tilde{u}_{p+1,m,ik}\right]\Big|_{r=R_p} = 0, \quad j = 1, 2, \quad p = \overline{1, n}, \quad (24)$$

де

$$B_{\nu_{jm,ik}} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\nu_{jm,ik}^2}{r^2}$$

— класичний диференціальний оператор Бесселя.

До одновимірної задачі спряження (21) – (24) застосуємо гібридне інтегральне перетворення типу Фур'є – Бесселя на полярній осі I_n^+ з n точками спряження щодо радіальної змінної r [18]:

$$H_{(n)}[f(r)] = \int_0^{+\infty} f(r)V(r, \lambda)\sigma(r)dr \equiv \tilde{f}(\lambda), \quad (25)$$

$$H_{(n)}^{-1}[\tilde{f}(\lambda)] = \int_0^{+\infty} \tilde{f}(\lambda)V(r, \lambda)\Omega(\lambda)d\lambda \equiv f(r), \quad (26)$$

$$H_{(n)}\big[B_{(m,ik)}\big[f(r)\big]\big] = -\lambda^2\tilde{f}(\lambda) - \sum_{k=1}^{n+1}\gamma_k^2 \int_{R_{k-1}}^{R_k} f(r)V_k(r, \lambda)\sigma_k r dr, \quad (27)$$

$$R_0 = 0, \quad R_{n+1} = +\infty.$$

У формулах (25) – (27) використано спектральну функцію $V(r, \lambda)$, вагову функцію $\sigma(r)$, спектральну щільність $\Omega(\lambda)$ та гібридний диференціальний оператор Бесселя, одержані в [18]:

$$B_{(m,ik)} = \sum_{j=1}^{n} a_j^2\Theta(r - R_{j-1})\Theta(R_j - r)B_{\nu_{jm,ik}} + a_{n+1}^2\Theta(r - R_n)B_{\nu_{n+1,m,ik}},$$

де $\Theta(x)$ — одинична функція Гевісайда.

Запишемо диференціальні рівняння (21) та початкові умови (22) у матричній формі:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial t} - a_1^2 B_{\nu_{1m,ik}} + q_1^2(\sigma)\right)\tilde{u}_{1m,ik}(t, r, \sigma) \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - a_2^2 B_{\nu_{2m,ik}} + q_2^2(\sigma)\right)\tilde{u}_{2m,ik}(t, r, \sigma) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - a_{n+1}^2 B_{\nu_{n+1,m,ik}} + q_{n+1}^2(\sigma)\right)\tilde{u}_{n+1,m,ik}(t, r, \sigma) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{G}_{1m,ik}(t, r, \sigma) \\ \tilde{G}_{2m,ik}(t, r, \sigma) \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{G}_{n+1,m,ik}(t, r, \sigma) \end{bmatrix}, \quad (28)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}_{1m,ik}(t, r, \sigma) \\ \tilde{u}_{2m,ik}(t, r, \sigma) \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{u}_{n+1,m,ik}(t, r, \sigma) \end{bmatrix}\Bigg|_{t=0} = \begin{bmatrix} \tilde{g}_{1m,ik}(r, \sigma) \\ \tilde{g}_{2m,ik}(r, \sigma) \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{g}_{n+1,m,ik}(r, \sigma) \end{bmatrix}, \quad (29)$$

де $q_j^2(\sigma) = a_{zj}^2\sigma^2 + \chi_j^2$, $j = \overline{1, n+1}$.

Інтегральний оператор $H_{(n)}$, який діє за формулою (25), зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка

$$H_{(n)}[\cdots] = \Bigg[\int\limits_{0}^{R_1} \ldots V_1(r,\lambda)\sigma_1 r dr \int\limits_{R_1}^{R_2} \ldots V_2(r,\lambda)\sigma_2 r dr$$

$$\int\limits_{R_{n-1}}^{R_n} \ldots V_n(r,\lambda)\sigma_n r dr \int\limits_{R_n}^{+\infty} \ldots V_{n+1}(r,\lambda)\sigma_{n+1} r dr\Bigg] \tag{30}$$

і застосуємо за правилом множення матриць до задачі (28), (29). Внаслідок тотожності (27) одержуємо задачу Коші для звичайних диференціальних рівнянь 1-го порядку

$$\sum_{j=1}^{n+1}\left(\frac{d}{dt} + \lambda^2 + \gamma_j^2 + q_j^2(\sigma)\right)\tilde{\tilde{u}}_{jm,ik}(t,\lambda,\sigma) = \sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{G}}_{jm,ik}(t,\lambda,\sigma), \tag{31}$$

$$\sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{u}}_{jm,ik}(t,\lambda,\sigma)\Bigg|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{g}}_{jm,ik}(\lambda,\sigma), \tag{32}$$

де

$$\tilde{\tilde{u}}_{jm,ik}(t,\lambda,\sigma) = \int\limits_{R_{j-1}}^{R_j} \tilde{u}_{jm,ik}(t,r,\sigma)V_j(r,\lambda)\sigma_j r dr, \quad j = \overline{1,n+1},$$

$$\tilde{\tilde{G}}_{jm,ik}(t,\lambda,\sigma) = \int\limits_{R_{j-1}}^{R_j} \tilde{G}_{jm,ik}(t,r,\sigma)V_j(r,\lambda)\sigma_j r dr, \quad j = \overline{1,n+1},$$

$$\tilde{\tilde{g}}_{jm,ik}(\lambda,\sigma) = \int\limits_{R_{j-1}}^{R_j} \tilde{g}_{jm,ik}(r,\sigma)V_j(r,\lambda)\sigma_j r dr, \quad j = \overline{1,n+1}.$$

Припустимо, не зменшуючи загальності розв'язку задачі, що

$$\max\left\{q_1^2(\sigma), q_2^2(\sigma), \ldots, q_{n+1}^2(\sigma)\right\} = q_1^2(\sigma)$$

і покладемо всюди $\gamma_j^2 = q_1^2(\sigma) - q_j^2(\sigma),\ j = \overline{1,n+1}$. Задача Коші (31), (32) набирає вигляду

$$\frac{d\tilde{\tilde{u}}_{m,ik}}{dt} + \Delta^2(\lambda,\sigma)\tilde{\tilde{u}}_{m,ik} = \tilde{\tilde{G}}_{m,ik}(t,\lambda,\sigma), \tag{33}$$

$$\tilde{\tilde{u}}_{m,ik}(t,\lambda,\sigma)\big|_{t=0} = \tilde{\tilde{g}}_{m,ik}(\lambda,\sigma), \tag{34}$$

де

$$\tilde{\tilde{u}}_{m,ik}(t,\lambda,\sigma) = \sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{u}}_{jm,ik}(t,\lambda,\sigma), \qquad \tilde{\tilde{G}}_{m,ik}(t,\lambda,\sigma) = \sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{G}}_{jm,ik}(t,\lambda,\sigma);$$

$$\tilde{\tilde{g}}_{m,ik}(\lambda,\sigma)=\sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{g}}_{jm,ik}(\lambda,\sigma),\qquad \Delta^2(\lambda,\sigma)=\lambda^2+a_{z1}^2\sigma^2+\chi_1^2.$$

Безпосередньо перевіряємо, що єдиним розв'язком задачі (33), (34) є функція

$$\tilde{\tilde{u}}_{m,ik}(t,\lambda,\sigma)=N(t,\lambda,\sigma)\tilde{\tilde{g}}_{m,ik}(\lambda,\sigma)+\int\limits_0^t N(t-\tau,\lambda,\sigma)\tilde{\tilde{G}}_{m,ik}(\tau,\lambda,\sigma)d\tau, \tag{35}$$

де розв'язувальна функція (функція Коші) $N(t,\lambda,\sigma)=\exp\left(-\Delta^2(\lambda,\sigma)t\right)$.

Оскільки суперпозиція операторів $H_{(n)}$ та $H_{(n)}^{-1}$ є одиничним оператором $(H_{(n)}\circ H_{(n)}^{-1}=$ $=H_{(n)}^{-1}\circ H_{(n)}=I)$, то оператор $H_{(n)}^{-1}$, як обернений до оператора (30), зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця

$$H_{(n)}^{-1}[\cdots]=\begin{bmatrix}\displaystyle\int_0^{+\infty}\ldots V_1(r,\lambda)\Omega(\lambda)d\lambda\\ \displaystyle\int_0^{+\infty}\ldots V_2(r,\lambda)\Omega(\lambda)d\lambda\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \displaystyle\int_0^{+\infty}\ldots V_{n+1}(r,\lambda)\Omega(\lambda)d\lambda\end{bmatrix} \tag{36}$$

і застосуємо за правилом множення матриць до матриці-елемента $\left[\tilde{\tilde{u}}_{m,ik}(t,\lambda,\sigma)\right]$, де функцію $\tilde{\tilde{u}}_{m,ik}(t,\lambda,\sigma)$ визначено формулою (35). Одержуємо єдиний розв'язок одновимірної параболічної початково-крайової задачі спряження (21) – (24):

$$\tilde{u}_{jm,ik}(t,r,\sigma)=\int\limits_0^{+\infty}N(t,\lambda,\sigma)\tilde{\tilde{g}}_{m,ik}(\lambda,\sigma)V_j(r,\lambda)\Omega(\lambda)d\lambda+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^{+\infty}N(t-\tau,\lambda,\sigma)\tilde{\tilde{G}}_{m,ik}(\tau,\lambda,\sigma)V_j(r,\lambda)\Omega(\lambda)d\lambda d\tau,\quad j=\overline{1,n+1}. \tag{37}$$

Застосовуючи послідовно до функцій $\tilde{u}_{jm,ik}(t,r,\sigma)$, визначених формулами (37), обернені оператори F^{-1} та $F_{m,ik}^{-1}$, і виконуючи нескладні перетворення, одержуємо функції

$$u_{j,ik}(t,r,\varphi,z)=\sum_{p=1}^{n+1}\int\limits_0^t\int\limits_{R_{p-1}}^{R_p}\int\limits_0^{\varphi_0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}E_{jp}^{ik}(t-\tau,r,\rho,\varphi,\alpha,z-\xi)f_p(\tau,\rho,\alpha,\xi)\sigma_p\rho d\xi d\alpha d\rho d\tau+$$

$$+\sum_{p=1}^{n+1}\int\limits_{R_{p-1}}^{R_p}\int\limits_0^{\varphi_0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}E_{jp}^{ik}(t,r,\rho,\varphi,\alpha,z-\xi)g_p(\rho,\alpha,\xi)\sigma_p\rho d\xi d\alpha d\rho+$$

$$+\sum_{p=1}^{n+1}a_{\varphi p}^2\int\limits_0^t\int\limits_{R_{p-1}}^{R_p}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}Q_{jp}^{ik}(t,\tau,r,\rho,\varphi,z,\xi)\sigma_p\rho^{-1}d\xi d\rho d\tau,\quad j=\overline{1,n+1}, \tag{38}$$

які визначають єдині розв'язки параболічних початково-крайових задач (1) – (4), (5), (9); (1) – (4), (6), (9); (1) – (4), (7), (9); (1) – (4), (8), (9) при відповідних значеннях ik (11), (12), (21), (22).

У формулах (38) застосовано компоненти

$$E_{jp}^{ik}(t, r, \rho, \varphi, \alpha, z) = \frac{2}{\pi\varphi_0} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m^{ik} K_{jp}^{m,ik}(t, r, \rho, z) U_{m,ik}(\varphi) U_{m,ik}(\alpha) \tag{39}$$

матриці впливу (функції впливу) та функції Гріна

$$Q_{jp}^{ik}(t, \tau, r, \rho, \varphi, z, \xi) = \frac{2}{\pi\varphi_0} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m^{ik} K_{jp}^{m,ik}(t-\tau, r, \rho, z-\xi) \Phi_{m,ik}(\tau, \rho, \xi) U_{m,ik}(\varphi) \tag{40}$$

відповідних початково-крайових задач спряження, де

$$K_{jp}^{m,ik}(t, r, \rho, z) = \int\limits_0^{+\infty} \int\limits_0^{+\infty} N(t, \lambda, \sigma) V_j(r, \lambda) V_p(\rho, \lambda) \Omega(\lambda) \cos(\sigma z) d\lambda d\sigma.$$

Проаналізуємо формули (38) залежно від типу крайових умов на гранях кусково-однорідного клиновидного циліндрично-кругового простору. Розглянемо, наприклад, випадок крайових умов (5). У цьому випадку функції Гріна мають вигляд

$$Q_{jp}^{11}(t, \tau, r, \rho, \varphi, z, \xi) = \frac{2}{\varphi_0^2} \sum_{m=1}^{\infty} m K_{jp}^{m,11}(t-\tau, r, \rho, z-\xi) \times$$
$$\times \left[g_{1p}(\tau, \rho, \xi) + (-1)^{m+1} \omega_{1p}(\tau, \rho, \xi) \right] \sin \frac{\pi m \varphi}{\varphi_0}.$$

Якщо визначати тангенціальні функції Гріна

$$W_{jp,1}^{11}(t, \tau, r, \rho, \varphi, z, \xi) = \frac{2}{\varphi_0^2} \sum_{m=1}^{\infty} m K_{jp}^{m,11}(t-\tau, r, \rho, z-\xi) \sin \frac{\pi m \varphi}{\varphi_0},$$

$$W_{jp,2}^{11}(t, \tau, r, \rho, \varphi, z, \xi) = \frac{2}{\varphi_0^2} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} m K_{jp}^{m,11}(t-\tau, r, \rho, z-\xi) \sin \frac{\pi m \varphi}{\varphi_0},$$

то розв'язок задачі (1) – (4), (5), (9) можемо записати у вигляді

$$u_{j,11}(t, r, \varphi, z) = \sum_{p=1}^{n+1} \int\limits_0^t \int\limits_{R_{p-1}}^{R_p} \int\limits_0^{\varphi_0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} E_{jp}^{11}(t-\tau, r, \rho, \varphi, \alpha, z-\xi) f_p(\tau, \rho, \alpha, \xi) \sigma_p \rho d\xi d\alpha d\rho d\tau +$$

$$+ \sum_{p=1}^{n+1} \int\limits_{R_{p-1}}^{R_p} \int\limits_0^{\varphi_0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} E_{jp}^{11}(t, r, \rho, \varphi, \alpha, z-\xi) g_p(\rho, \alpha, \xi) \sigma_p \rho d\xi d\alpha d\rho +$$

$$+ \sum_{p=1}^{n+1} a_{\varphi p}^2 \int\limits_0^t \int\limits_{R_{p-1}}^{R_p} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Big[W_{jp,1}^{11}(t, \tau, r, \rho, \varphi, z, \xi) g_{1p}(\tau, \rho, \xi) +$$

$$+ W^{11}_{jp,2}(t,\tau,r,\rho,\varphi,z,\xi)\omega_{1p}(\tau,\rho,\xi)\Big]\sigma_p\rho^{-1}d\xi d\rho d\tau, \quad j=\overline{1,n+1}. \tag{41}$$

З використанням властивостей функцій впливу $E^{11}_{jp}(t,r,\rho,\varphi,\alpha,z)$ і функцій Гріна

$$W^{11}_{jp,s}(t,\tau,r,\rho,\varphi,z,\xi), \quad s=1,2,$$

безпосередньо перевіряємо, що функції $u_{j,11}(t,r,\varphi,z)$, визначені формулами (41), задовольняють рівняння (1), початкові умови (2), крайові умови (3) – (5) та умови спряження (9) у сенсі теорії узагальнених функцій [22].

Єдиність розв'язку (41) випливає з його структури (інтегрального зображення) та єдиності головних розв'язків (функцій впливу і функцій Гріна) параболічної початково-крайової задачі спряження (1) – (4), (5), (9).

Методами з [22, 23] можна довести, що при відповідних умовах на вихідні дані формули (39) визначають обмежений класичний розв'язок розглянутої задачі.

Підсумком викладеного вище є така теорема.

Теорема. *Якщо функції* $f_j(t,r,\varphi,z),\ g_j(r,\varphi,z),\ g_{1j}(t,r,z),\ \omega_{1j}(t,r,z),\ j=\overline{1,n+1}$*:*

1) неперервно диференційовні за змінною t *і двічі неперервно диференційовні за геометричними змінними;*

2) мають обмежену варіацію за геометричними змінними;

3) абсолютно сумовні за змінною z *на осі* $(-\infty;+\infty)$*;*

4) абсолютно сумовні з ваговою функцією $r\sigma(r)$ *за змінною* r *на осі* I_n^+*;*

5) справджують умови спряження,

то параболічна початково-крайова задача спряження (1) – (4), (5), (9) має єдиний обмежений класичний розв'язок, який визначається за формулами (41).

Випадки крайових умов (6) – (8) на гранях клина можна проаналізувати аналогічно.

Зауваження 1. У випадку $a_{rj}=a_{\varphi j}=a_{zj}\equiv a_j>0$ формули (38) визначають структури розв'язків розглянутих задач у ізотропному кусково-однорідному клиновидному циліндрично-круговому просторі.

Зауваження 2. Випадок зміни φ в межах $\varphi_1<\varphi<\varphi_2$ зводиться до розглянутого заміною $\varphi'=\varphi-\varphi_1,\ \varphi_0\equiv\varphi_2-\varphi_1$.

Зауваження 3. Аналіз розв'язків (38) залежно від аналітичного виразу функцій $f_j(t,r,\varphi,z),\ g_j(r,\varphi,z),\ g_{kj}(t,r,z),\ \omega_{kj}(t,r,z),\ j=\overline{1,n+1},\ k=\overline{1,4}$, проводиться безпосередньо із загальних структур.

4. Висновки. Методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків (функцій впливу та функцій Гріна) вперше побудовано єдині точні аналітичні розв'язки параболічних крайових задач у кусково-однорідному клиновидному циліндрично-круговому просторі. Одержані інтегральні зображення розв'язків носять алгоритмічний характер, неперервно залежать від параметрів і даних задачі та можуть бути використані як у теоретичних дослідженнях, так і в практиці інженерних розрахунків математичних моделей еволюційних процесів у кусково-однорідних середовищах.

Література

1. В. В. Городецький, *Граничні властивості гладких у шарі розв'язків рівнянь параболічного типу*, Рута, Чернівці (1998).
2. Н. В. Житарашу, С. Д. Эйдельман, *Параболические граничные задачи*, Штиинца, Кишинев (1992).

3. Т. Я. Загорский, *Смешанные задачи для систем дифференциальных уравнений с частными производными параболического типа*, Изд-во Львов. гос. ун-та, Львов (1961).
4. С. Д. Ивасишен, *Матрица Грина параболических задач*, Вища шк., Киев (1990).
5. О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, Наука, Москва (1967).
6. Е. М. Ландис, *Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов*, Наука, Москва (1971).
7. М. І. Матійчук, *Параболічні та еліптичні крайові задачі з особливостями*, Прут, Чернівці (2003).
8. І. Д. Пукальський, *Крайові задачі для нерівномірно параболічних та еліптичних рівнянь з виродженостями і особливостями*, Рута, Чернівці (2008).
9. А. Фридман, *Уравнения с частными производными параболического типа*, Мир, Москва (1968).
10. С. Д. Эйдельман, *Параболические системы*, Наука, Москва (1964).
11. В. С. Дейнека, И. В. Сергиенко, *Модели и методы решения задач в неоднородных средах*, Наук. думка, Киев (2001).
12. В. С. Дейнека, И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий, *Модели и методы решения задач с условиями сопряжения*, Наук. думка, Киев (1998).
13. И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий, В. С. Дейнека, *Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах*, Наук. думка, Киев (1991).
14. А. П. Громик, І. М. Конет, М. П. Ленюк, *Температурні поля в кусково-однорідних просторових середовищах*, Абетка-Світ, Кам'янець-Подільський (2011).
15. І. М. Конет, *Гіперболічні крайові задачі математичної фізики в кусково-однорідних просторових середовищах*, Абетка-Світ, Кам'янець-Подільський (2013).
16. І. М. Конет, Т. М. Пилипюк, *Параболічні крайові задачі в кусково-однорідних середовищах*, Абетка-Світ, Кам'янець-Подільський (2016).
17. І. М. Конет, М. П. Ленюк, *Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в циліндрично-кругових областях*, Прут, Чернівці (2001).
18. І. М. Конет, Т. М. Пилипюк, *Параболічні крайові задачі в кусково-однорідних циліндрично-кругових середовищах*, Абетка-Світ, Кам'янець-Подільський (2017).
19. М. О. Перестюк, В. В. Маринець, *Теорія рівнянь математичної фізики*, Либідь, Київ (2006).
20. И. Снеддон, *Преобразования Фурье*, Изд-во иностр. лит., Москва (1955).
21. К. Дж. Трантер, *Интегральные преобразования в математической физике*, Гостехтеориздат, Москва (1956).
22. Г. Е. Шилов, *Математический анализ. Второй специальный курс*, Наука, Москва (1965).
23. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений*, Физматгиз, Москва (1958).

Одержано 03.08.20