УДК 517.926.7

КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ НЕОДНОРІДНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ З ПРЯМОКУТНИМИ МАТРИЦЯМИ НА ВСІЙ ОСІ

М. А. Єлішевич

Київ. нац. ун-т будівництва і архітектури
просп. Повітрофлотський, 31, Київ, 03037, Україна
e-mail: m-a-e@i.ua

We construct a solution bounded on the whole numerical axis of the boundary-value problem for a system of linear inhomogeneous first-order differential equations with rectangular matrices.

Побудовано обмежений на всій числовій осі розв'язок крайової задачі для системи лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь першого порядку з прямокутними матрицями.

Постановка задачі. У цій роботі для системи

$$B(t)\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \quad t \in R, \tag{1}$$

де $A(t),\ B(t)$ — прямокутні $(m \times n)$-вимірні матриці-функції, $f(t)$ — m-вимірна вектор-функція, $A(t),\ B(t),\ f(t) \in BC^\infty(R)$ дійсні, $BC^\infty(R)$ [1, с. 244] — множина всіх скалярних, векторних, матричних функцій, що належать $C^\infty(R)$, обмежені та мають обмежені похідні всіх порядків на R, розглядається крайова задача з граничною умовою

$$h\big(x(t)\big) = \gamma, \tag{2}$$

де h — лінійний векторний функціонал, що відображає простір n-вимірних вектор-функцій, які належать $BC^\infty(R)$, у простір сталих l-вимірних векторів, γ — сталий l-вимірний вектор.

Випадок для скінченного відрізка числової осі розглянуто в [2, 3]. У [2] матриці $A(t)$ і $B(t)$ квадратні, в [3] — прямокутні. В обох згаданих роботах розв'язок побудовано з використанням жорданових наборів векторів матриці $B(t)$ відносно оператора

$$L(t) = A(t) - B(t)\,\frac{d}{dt}$$

і спряженої матриці $B^*(t)$ відносно оператора

$$L^*(t) = A^*(t) + \frac{d}{dt}\,B^*(t),$$

формально спряженого до $L(t)$. Вони використовуються і в цій роботі.

Задача побудови обмеженого на всій осі розв'язку системи лінійних диференціальних рівнянь розглядалася в [1, 4]. У [1, с. 243 – 252] розглянуто випадок, коли $B(t)$ — одинична матриця, $A(t)$ — квадратна матриця, в [4] — випадок з такою ж системою, як і в цій роботі.

Основні означення.

Означення 1 [5, c. 54]. *Елемент* $\varphi^{(1)}(t) \in \ker B(t)$ *має в точці* $t \in R$ *скінченний жорданів ланцюжок векторів матриці* $B(t)$ *відносно оператора* $L(t)$ *довжини* p, $p \geq 1$, *якщо існують вектори* $\varphi^{(i)}(t)$, $i = \overline{1,p}$, *які задовольняють співвідношення*

$$B(t)\varphi^{(1)}(t) = 0,$$

$$B(t)\varphi^{(i)}(t) = L(t)\varphi^{(i-1)}(t), \quad i = \overline{2,p},$$

$$L(t)\varphi^{(p)}(t) \notin \mathrm{Im} B(t).$$

Означення 2. *Елемент* $\tilde{\varphi}^{(1)}(t) \in \ker B(t)$ *має в точці* $t \in R$ *циклічний жорданів ланцюжок векторів матриці* $B(t)$ *відносно оператора* $L(t)$ *довжини* $\tilde{p}$, $\tilde{p} \geq 1$, *якщо існують вектори* $\tilde{\varphi}^{(i)}(t)$, $i = \overline{1,\tilde{p}}$, *які задовольняють співвідношення*

$$B(t)\tilde{\varphi}^{(1)}(t) = 0,$$

$$B(t)\tilde{\varphi}^{(i)}(t) = L(t)\tilde{\varphi}^{(i-1)}(t), \quad i = \overline{2,\tilde{p}},$$

$$L(t)\tilde{\varphi}^{(\tilde{p})}(t) = 0.$$

Означення 3. *Елемент* $\hat{\varphi}^{(1)}(t)$ *має в точці* $t \in R$ *допоміжний ланцюжок векторів матриці* $B(t)$ *відносно оператора* $L(t)$ *довжини* $\hat{p}$, $\hat{p} \geq 1$, *якщо існують вектори* $\hat{\varphi}^{(i)}(t)$, $i = \overline{1,\hat{p}}$, *які задовольняють співвідношення*

$$B(t)\hat{\varphi}^{(i)}(t) = L(t)\hat{\varphi}^{(i-1)}(t), \quad i = \overline{2,\hat{p}},$$

$$B(t)\hat{\varphi}^{(1)}(t) \notin \mathrm{Im} L(t),$$

$$L(t)\hat{\varphi}^{(\hat{p})}(t) \notin \mathrm{Im} B(t).$$

Аналогічно визначимо ланцюжки векторів на R. Їхні властивості досліджено в [6, 7]. Далі будемо вважати, що доводжувані твердження виконуються на R, якщо не обумовлено інше.

У цій роботі розглядається випадок, коли можуть існувати скінченні, циклічні й допоміжні ланцюжки, але $\mathrm{rank}\, B(t) = \mathrm{const}$, $\mathrm{rank}\, L(t) = \mathrm{const}$ для всіх $t \in R$ (внаслідок чого кількості й довжини зазначених ланцюжків сталі) і ці ранги не змінюються при $t \to -\infty$ і $t \to \infty$.

Позначимо через 0_i нульовий i-вимірний вектор, c_i — довільний сталий i-вимірний вектор, $c_0 = 0_1$.

Означення 4 [8, c. 236]. *Система*

$$\frac{dy}{dt} = C(t)y \tag{3}$$

з фундаментальною матрицею $Y(t)$, *де* $C(t)$ — *квадратна матриця-функція порядку* k, *допускає експоненціальну дихотомію розв'язків на півосях* $R_- = (-\infty; 0]$ *і* $R_+ = [0; \infty)$, *якщо існують сталі квадратні матриці-проектори* P_i $\left(P_i^2 = P_i\right)$ *порядку* k *і скалярні сталі* $K_i \geq 1$, $\alpha_i > 0$, $i = 1, 2$, *такі, що виконуються нерівності*

$$\left\|Y(t)P_1Y^{-1}(s)\right\| \leq K_1 e^{-\alpha_1(t-s)}, \quad s \leq t \leq 0,$$

$$\left\|Y(t)(E_k - P_1)Y^{-1}(s)\right\| \le K_1 e^{-\alpha_1(s-t)}, \quad t \le s \le 0,$$

$$\left\|Y(t)P_2Y^{-1}(s)\right\| \le K_2 e^{-\alpha_2(t-s)}, \quad 0 \le s \le t,$$

$$\left\|Y(t)(E_k - P_2)Y^{-1}(s)\right\| \le K_2 e^{-\alpha_2(s-t)}, \quad 0 \le t \le s.$$

Для системи (3) та інших систем, що допускають експоненціальну дихотомію розв'язків на півосях R_- і R_+, які розглядаються далі, введемо такі позначення додатково до тих, що були введені в означенні 4: $U = P_1 + P_2 - E_k$ — стала квадратна матриця порядку k, $\varkappa = \dim\ker U = \dim\ker U^*$, $0 \le \varkappa \le k$, F і G — сталі прямокутні $(k \times \varkappa)$-вимірні матриці, складені з базисів $\ker U$ і $\ker U^*$ відповідно. Якщо $\varkappa = 0$, то покладемо $F = G = 0_k$.

2. Отриманий результат. Аналогічно [3, 4, 6, 7] будемо вважати, що існують:

$\check{r}$, $\check{r} \ge 0$, циклічних ланцюжків матриці $B(t)$ відносно оператора $L(t)$ одиничної довжини, що складаються з векторів $\check{\varphi}_i(t)$, $i = \overline{1, \check{r}}$;

$\check{r}$, $\check{r} \ge 0$, циклічних ланцюжків матриці $B^*(t)$ відносно оператора $L^*(t)$ одиничної довжини, що складаються з векторів $\check{\psi}_i(t)$, $i = \overline{1, \check{r}}$;

$\tilde{r}$, $\tilde{r} \ge 0$, циклічних ланцюжків матриці $B(t)$ відносно оператора $L(t)$ довжин $(\tilde{s}_i + 1)$, $i = \overline{1, \tilde{r}}$, $0 < \tilde{s}_1 \le \ldots \le \tilde{s}_{\tilde{r}}$, що складаються з векторів $\tilde{\varphi}_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, \tilde{s}_i + 1}$, $i = \overline{1, \tilde{r}}$;

$\hat{r}$, $\hat{r} \ge 0$, циклічних ланцюжків матриці $B^*(t)$ відносно оператора $L^*(t)$ довжин $(\hat{s}_i + 1)$, $i = \overline{1, \hat{r}}$, $0 < \hat{s}_1 \le \ldots \le \hat{s}_{\hat{r}}$, що складаються з векторів $\tilde{\psi}_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, \hat{s}_i + 1}$, $i = \overline{1, \hat{r}}$;

r, $r \ge 0$, скінченних ланцюжків матриці $B(t)$ відносно оператора $L(t)$ довжин s_i, $i = \overline{1, r}$, $s_1 \ge \ldots \ge s_r > 0$, що складаються з векторів $\varphi_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, s_i}$, $i = \overline{1, r}$.

Позначимо

$$s = \sum_{i=1}^{r} s_i, \quad \tilde{s} = \sum_{i=1}^{\tilde{r}} \tilde{s}_i, \quad \hat{s} = \sum_{i=1}^{\hat{r}} \hat{s}_i, \quad \alpha = n - \check{r} - \tilde{r} - \tilde{s} - s - \hat{s} = m - \check{r} - \hat{r} - \hat{s} - s - \tilde{s}.$$

Згідно з [6, 7] існують також:

r скінченних ланцюжків матриці $B^*(t)$ відносно оператора $L^*(t)$ довжин s_i, $i = \overline{1, r}$, що складаються з векторів $\psi_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, s_i}$, $i = \overline{1, r}$;

$\hat{r}$ допоміжних ланцюжків матриці $B(t)$ відносно оператора $L(t)$ довжин $\hat{s}_i$, $i = \overline{1, \hat{r}}$, що складаються з векторів $\hat{\varphi}_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, \hat{s}_i}$, $i = \overline{1, \hat{r}}$;

$\tilde{r}$ допоміжних ланцюжків матриці $B^*(t)$ відносно оператора $L^*(t)$ довжин $\tilde{s}_i$, $i = \overline{1, \tilde{r}}$, що складаються з векторів $\hat{\psi}_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, \tilde{s}_i}$, $i = \overline{1, \tilde{r}}$;

$\check{r}$ векторів $\check{\varphi}_i(t) \notin \mathrm{Im}B(t) \bigcup \mathrm{Im}L(t)$, $i = \overline{1, \check{r}}$;

$\check{r}$ векторів $\check{\psi}_i(t) \notin \mathrm{Im}B^*(t) \bigcup \mathrm{Im}L^*(t)$, $i = \overline{1, \check{r}}$;

α векторів $q_i(t)$, $i = \overline{1, \alpha}$,

α векторів $p_i(t)$, $i = \overline{1, \alpha}$, таких, що елементи кожної з наступних множин належать $BC^\infty(R)$ і лінійно незалежні:

1. $q_i(t)$, $i = \overline{1, \alpha}$, $\check{\varphi}_i(t)$, $i = \overline{1, \check{r}}$, $\tilde{\varphi}_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, \tilde{s}_i + 1}$, $i = \overline{1, \tilde{r}}$, $\varphi_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, s_i}$, $i = \overline{1, r}$, $\hat{\varphi}_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, \hat{s}_i}$, $i = \overline{1, \hat{r}}$;

2. $B(t)q_i(t)$, $i = \overline{1, \alpha}$, $\check{\varphi}_i(t)$, $i = \overline{1, \check{r}}$, $L(t)\tilde{\varphi}_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, \tilde{s}_i}$, $i = \overline{1, \tilde{r}}$, $L(t)\varphi_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, s_i}$, $i = \overline{1, r}$, $B(t)\hat{\varphi}_i^{(1)}(t)$, $i = \overline{1, \hat{r}}$, $L(t)\hat{\varphi}_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, \hat{s}_i}$, $i = \overline{1, \hat{r}}$;

3. $p_i(t)$, $i = \overline{1, \alpha}$, $\check{\psi}_i(t)$, $i = \overline{1, \check{r}}$, $\tilde{\psi}_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, \hat{s}_i + 1}$, $i = \overline{1, \hat{r}}$, $\psi_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, s_i}$, $i = \overline{1, r}$, $\hat{\psi}_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, \tilde{s}_i}$, $i = \overline{1, \tilde{r}}$;

4. $B^*(t)p_i(t),\ i=\overline{1,\alpha},\ \breve{\psi}_i(t),\ i=\overline{1,\breve{r}},\ L^*(t)\tilde{\psi}_i^{(j)}(t),\ j=\overline{1,\hat{s}_i},\ i=\overline{1,\hat{r}},\ L^*(t)\psi_i^{(j)}(t),$ $j=\overline{1,s_i},\ i=\overline{1,r},\ B^*(t)\hat{\psi}_i^{(1)}(t),\ i=\overline{1,\tilde{r}},\ L^*(t)\hat{\psi}_i^{(j)}(t),\ j=\overline{1,\tilde{s}_i},\ i=\overline{1,\tilde{r}};$
пари множин 1 і 4, 2 і 3 відповідно являють собою біортогональні системи:

$$(B(t)q_i(t),p_k(t))=(q_i(t),B^*(t)p_k(t))=\delta_{ik},\quad i,k=\overline{1,\alpha},$$

$$\big(\breve{\varphi}_i(t),\breve{\psi}_k(t)\big)=\delta_{ik},\quad i,k=\overline{1,\breve{r}},$$

$$\Big(\breve{\varphi}_i(t),\breve{\psi}_k(t)\Big)=\delta_{ik},\quad i,k=\overline{1,\breve{r}},$$

$$\Big(\tilde{\varphi}_i^{(j)}(t),L^*(t)\hat{\psi}_k^{(l)}(t)\Big)=\Big(L(t)\tilde{\varphi}_i^{(j)}(t),\hat{\psi}_k^{(l)}(t)\Big)=\delta_{ik}\delta_{l+j,\tilde{s}_i+1},\quad j,l=\overline{1,\tilde{s}_i},\quad i,k=\overline{1,\tilde{r}},$$

$$\Big(\tilde{\varphi}_i^{(\tilde{s}_i+1)}(t),B^*(t)\hat{\psi}_k^{(1)}(t)\Big)=\delta_{ik},\quad i,k=\overline{1,\tilde{r}},$$

$$\Big(\hat{\varphi}_i^{(j)}(t),L^*(t)\tilde{\psi}_k^{(l)}(t)\Big)=\Big(L(t)\hat{\varphi}_i^{(j)}(t),\tilde{\psi}_k^{(l)}(t)\Big)=\delta_{ik}\delta_{l+j,\hat{s}_i+1},\quad j,l=\overline{1,\hat{s}_i},\quad i,k=\overline{1,\hat{r}},$$

$$\Big(B(t)\hat{\varphi}_i^{(1)}(t),\tilde{\psi}_k^{(\hat{s}_i+1)}(t)\Big)=\delta_{ik},\quad i,k=\overline{1,\hat{r}},$$

$$\Big(\varphi_i^{(j)}(t),L^*(t)\psi_k^{(l)}(t)\Big)=\Big(L(t)\varphi_i^{(j)}(t),\psi_k^{(l)}(t)\Big)=\delta_{ik}\delta_{l+j,s_i+1},\quad j,l=\overline{1,s_i},\quad i,k=\overline{1,r},$$

всі інші скалярні добутки векторів із відповідних пар множин рівні 0.

З елементів множин 1 і 3 складемо прямокутні матриці, що належать $BC^\infty(R)$:

$$Q(t)=[q_1(t),\ldots,q_\alpha(t)],$$

$$\Phi_i(t)=\Big[\varphi_i^{(1)}(t),\ldots,\varphi_i^{(s_i)}(t)\Big],\quad i=\overline{1,r},$$

$$\tilde{\Phi}_i(t)=\Big[\tilde{\varphi}_i^{(\tilde{s}_i)}(t),\ldots,\tilde{\varphi}_i^{(1)}(t)\Big],\quad i=\overline{1,\tilde{r}},$$

$$\hat{\Phi}_i(t)=\Big[\hat{\varphi}_i^{(1)}(t),\ldots,\hat{\varphi}_i^{(\hat{s}_i)}(t)\Big],\quad i=\overline{1,\hat{r}},$$

$$P(t)=[p_1(t),\ldots,p_\alpha(t)],$$

$$\Psi_i(t)=\Big[\psi_i^{(s_i)}(t),\ldots,\psi_i^{(1)}(t)\Big],\quad i=\overline{1,r},$$

$$\tilde{\Psi}_i(t)=\Big[\tilde{\psi}_i^{(\hat{s}_i)}(t),\ldots,\tilde{\psi}_i^{(1)}(t)\Big],\quad i=\overline{1,\hat{r}},$$

$$\hat{\Psi}_i(t)=\Big[\hat{\psi}_i^{(1)}(t),\ldots,\hat{\psi}_i^{(\tilde{s}_i)}(t)\Big],\quad i=\overline{1,\tilde{r}}.$$

Перейдемо безпосередньо до крайової задачі (1), (2). Згідно з [7] для розв'язності системи (1) необхідно та достатньо виконання умов

$$\sum_{j=0}^{\hat{s}_i}\frac{d^j}{dt^j}\Big(f(t),\tilde{\psi}_i^{(\hat{s}_i-j+1)}(t)\Big)=0,\quad i=\overline{1,\hat{r}},\tag{4}$$

$$\Big(f(t), \breve{\psi}_i(t)\Big) = 0, \quad i = \overline{1, \breve{r}}. \tag{5}$$

Якщо система

$$\frac{dy}{dt} = P^*(t)\big[L(t)Q(t)\big]y \tag{6}$$

з фундаментальною матрицею $X(t)$ допускає експоненціальну дихотомію розв'язків на півосях R_- і R_+, то згідно з [4] система (1) має розв'язок, що належить $BC^\infty(R)$, у тому і тільки тому випадку, коли виконуються рівності (4), (5),

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} G^* P_1 X^{-1}(t) P^*(t) f(t)\, dt = 0. \tag{7}$$

Її розв'язки, що належать $BC^\infty(R)$, мають вигляд

$$x(t) = Q(t)X(t)\big(P_2 F c_\varkappa + \tilde{x}(t)\big) - \sum_{i=1}^{r} \Phi_i(t) \sum_{j=0}^{s_i-1} I_{s_i}^j \frac{d^j}{dt^j}\big(\Psi_i^*(t) f(t)\big) -$$
$$- \sum_{i=1}^{\tilde{r}} \tilde{\Phi}_i(t) \sum_{j=0}^{\tilde{s}_i-1} \big(I_{\tilde{s}_i}^T\big)^j \frac{d^j}{dt^j}\Big(\hat{\Psi}_i^*(t) f(t)\Big) - \sum_{i=1}^{\hat{r}} \hat{\Phi}_i(t) \sum_{j=0}^{\hat{s}_i-1} I_{\hat{s}_i}^j \frac{d^j}{dt^j}\Big(\tilde{\Psi}_i^*(t) f(t)\Big) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{\tilde{r}} \sum_{j=0}^{\tilde{s}_i} \left(\frac{d^j}{dt^j}\tilde{\beta}_i(t)\right) \tilde{\varphi}_i^{(\tilde{s}_i - j + 1)}(t) + \sum_{i=1}^{\breve{r}} \breve{\beta}_i(t) \breve{\varphi}_i(t), \tag{8}$$

де

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{t} P_1 X^{-1}(\tau)P^*(\tau)f(\tau)\,d\tau - \int_t^0 (E_\alpha - P_1)X^{-1}(\tau)P^*(\tau)f(\tau)\,d\tau + \\ \quad \displaystyle + (E_\alpha - P_1)U^-\left[\int_{-\infty}^{0} P_1 X^{-1}(\tau)P^*(\tau)f(\tau)\,d\tau + \right. \\ \quad \displaystyle \left. + \int_0^\infty (E_\alpha - P_2)X^{-1}(\tau)P^*(\tau)f(\tau)\,d\tau\right], \quad t \le 0, \\ \displaystyle\int_0^t P_2 X^{-1}(\tau)P^*(\tau)f(\tau)\,d\tau - \int_t^\infty (E_\alpha - P_2)X^{-1}(\tau)P^*(\tau)f(\tau)\,d\tau + \\ \quad \displaystyle + P_2 U^-\left[\int_{-\infty}^{0} P_1 X^{-1}(\tau)P^*(\tau)f(\tau)\,d\tau + \right. \\ \quad \displaystyle \left. + \int_0^\infty (E_\alpha - P_2)X^{-1}(\tau)P^*(\tau)f(\tau)\,d\tau\right], \quad t \ge 0, \end{cases} \tag{9}$$

— α-вимірна вектор-функція, I_i — нільпотентний i-вимірний блок Жордана, $\tilde{\beta}_i(t) \in BC^\infty(R)$, $i = \overline{1, \tilde{r}}$, $\breve{\beta}_i(t) \in BC^\infty(R)$, $i = \overline{1, \breve{r}}$, — довільні скалярні функції.

Виберемо зі стовпців матриці $h\big(Q(t)X(t)P_2F\big)$ і векторів

$$h\left(\sum_{j=0}^{\tilde{s}_i} \left(\frac{d^j}{dt^j}\,\tilde{\xi}_k(t)\right) \tilde{\varphi}_i^{(\tilde{s}_i - j + 1)}(t)\right), \quad k = 1, 2, \ldots, \quad i = \overline{1, \tilde{r}},$$

$$h\big(\breve{\xi}_k(t)\breve{\varphi}_i(t)\big), \quad k=1,2,\ldots, \quad i=\overline{1,\breve{r}},$$

де $\tilde{\xi}_k(t) \in BC^\infty(R),\ k=1,2,\ldots,\ \breve{\xi}_k(t) \in BC^\infty(R),\ k=1,2,\ldots,$ — довільні скалярні функції, максимальну кількість $\mu,\ 0 \le \mu \le l,$ лінійно незалежних векторів і складемо з відповідних їм стовпців матриці $Q(t)X(t)P_2F$ і векторів $\sum_{j=0}^{\tilde{s}_i}\left(\frac{d^j}{dt^j}\,\tilde{\xi}_k(t)\right)\tilde{\varphi}_i^{(\tilde{s}_i-j+1)}(t),$ $\breve{\xi}_k(t)\breve{\varphi}_i(t)$ $(n\times\mu)$-вимірну матрицю $D(t)$, а якщо $\mu=0$, то покладемо $D(t)\equiv 0_n$.

Завдяки довільності вибору вектора $c_\varkappa$ і функцій $\tilde{\beta}_i(t),\ i=\overline{1,\tilde{r}},\ \breve{\beta}_i(t),\ i=\overline{1,\breve{r}},$ вираз (8) можна замінити виразом

$$x(t)=D(t)c_\mu+Q(t)X(t)\left(P_2Fc_\varkappa+\tilde{x}(t)\right)-\sum_{i=1}^{r}\Phi_i(t)\sum_{j=0}^{s_i-1}I_{s_i}^j\frac{d^j}{dt^j}\big(\Psi_i^*(t)f(t)\big)-$$

$$-\sum_{i=1}^{\tilde{r}}\tilde{\Phi}_i(t)\sum_{j=0}^{\tilde{s}_i-1}\left(I_{\tilde{s}_i}^T\right)^j\frac{d^j}{dt^j}\left(\hat{\Psi}_i^*(t)f(t)\right)-\sum_{i=1}^{\hat{r}}\hat{\Phi}_i(t)\sum_{j=0}^{\hat{s}_i-1}I_{\hat{s}_i}^j\frac{d^j}{dt^j}\left(\tilde{\Psi}_i^*(t)f(t)\right)+$$

$$+\sum_{i=1}^{\tilde{r}}\sum_{j=0}^{\tilde{s}_i}\left(\frac{d^j}{dt^j}\tilde{\beta}_i(t)\right)\tilde{\varphi}_i^{(\tilde{s}_i-j+1)}(t)+\sum_{i=1}^{\breve{r}}\breve{\beta}_i(t)\breve{\varphi}_i(t). \tag{10}$$

Нехай $\dim\ker\big(h(D(t))\big)^*=\nu,\ 0\le\nu\le\mu.$ Складемо з елементів базису $\ker\big(h(D(t))\big)^*$ $(l\times\nu)$-вимірну матрицю H, а якщо $\nu=0$, то покладемо $H=0_l$.

Теорема 1. *Нехай $A(t),B(t),f(t)\in BC^\infty(R),$ для всіх $t\in R$ існують жорданові ланцюжки векторів:*

матриці $B(t)$ відносно оператора $L(t)$:

r скінченних, $r\ge 0$, довжин $s_i,\ s_i>0,\ i=\overline{1,r}$;

$\tilde{r}$ циклічних, $\tilde{r}\ge 0$, довжин $(\tilde{s}_i+1),\ \tilde{s}_i>0,\ i=\overline{1,\tilde{r}}$;

$\breve{r}$ циклічних, $\breve{r}\ge 0$, довжини 1;

матриці $B^*(t)$ відносно оператора $L^*(t)$:

$\hat{r}$ циклічних, $\hat{r}\ge 0$, довжин $(\hat{s}_i+1),\ \hat{s}_i>0,\ i=\overline{1,\hat{r}}$;

$\check{r}$ циклічних, $\check{r}\ge 0$, довжини 1, система (6) допускає експоненціальну дихотомію розв'язків на півосях R_- і R_+.

Тоді крайова задача (1), (2) має розв'язки, що належать $BC^\infty(R)$, у тому і тільки тому випадку, коли виконуються умови (4), (5), (7),

$$H^*\Bigg[\gamma-h\Bigg(Q(t)X(t)\tilde{x}(t)-\sum_{i=1}^{r}\Phi_i(t)\sum_{j=0}^{s_i-1}I_{s_i}^j\frac{d^j}{dt^j}\big(\Psi_i^*(t)f(t)\big)-$$

$$-\sum_{i=1}^{\tilde{r}}\tilde{\Phi}_i(t)\sum_{j=0}^{\tilde{s}_i-1}\left(I_{\tilde{s}_i}^T\right)^j\frac{d^j}{dt^j}\left(\hat{\Psi}_i^*(t)f(t)\right)-\sum_{i=1}^{\hat{r}}\hat{\Phi}_i(t)\sum_{j=0}^{\hat{s}_i-1}I_{\hat{s}_i}^j\frac{d^j}{dt^j}\left(\tilde{\Psi}_i^*(t)f(t)\right)\Bigg)\Bigg]=0. \tag{11}$$

Ці розв'язки мають вигляд (9),

$$x(t)=D(t)\left(h\big(D(t)\big)\right)^-\Bigg[\gamma-h\Bigg(Q(t)X(t)\big(P_2Fc_\varkappa+\tilde{x}(t)\big)-\sum_{i=1}^{r}\Phi_i(t)\sum_{j=0}^{s_i-1}I_{s_i}^j\frac{d^j}{dt^j}\big(\Psi_i^*(t)f(t)\big)-$$

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{i=1}^{\tilde r}\tilde\Phi_i(t)\sum_{j=0}^{\tilde s_i-1}\big(I_{\tilde s_i}^T\big)^j\frac{d^j}{dt^j}\Big(\hat\Psi_i^*(t)f(t)\Big)-\sum_{i=1}^{\hat r}\hat\Phi_i(t)\sum_{j=0}^{\hat s_i-1}I_{\hat s_i}^j\frac{d^j}{dt^j}\Big(\tilde\Psi_i^*(t)f(t)\Big)+\\
&+\sum_{i=1}^{\tilde r}\sum_{j=0}^{\tilde s_i}\left(\frac{d^j}{dt^j}\,\tilde\beta_i(t)\right)\tilde\varphi_i^{(\tilde s_i-j+1)}(t)+\sum_{i=1}^{\breve r}\breve\beta_i(t)\breve\varphi_i(t)\Bigg)\Bigg]+\\
&+Q(t)X(t)\big(P_2Fc_\varkappa+\tilde x(t)\big)-\sum_{i=1}^{r}\Phi_i(t)\sum_{j=0}^{s_i-1}I_{s_i}^j\frac{d^j}{dt^j}\big(\Psi_i^*(t)f(t)\big)-\\
&-\sum_{i=1}^{\tilde r}\tilde\Phi_i(t)\sum_{j=0}^{\tilde s_i-1}\big(I_{\tilde s_i}^T\big)^j\frac{d^j}{dt^j}\Big(\hat\Psi_i^*(t)f(t)\Big)-\sum_{i=1}^{\hat r}\hat\Phi_i(t)\sum_{j=0}^{\hat s_i-1}I_{\hat s_i}^j\frac{d^j}{dt^j}\Big(\tilde\Psi_i^*(t)f(t)\Big)+\\
&+\sum_{i=1}^{\tilde r}\sum_{j=0}^{\tilde s_i}\left(\frac{d^j}{dt^j}\tilde\beta_i(t)\right)\tilde\varphi_i^{(\tilde s_i-j+1)}(t)+\sum_{i=1}^{\breve r}\breve\beta_i(t)\breve\varphi_i(t). \qquad (12)
\end{aligned}
$$

Доведення. Підставивши (10) у (2), отримаємо систему

$$
\begin{aligned}
h(D(t))c_\mu=\gamma-h\Bigg(&Q(t)X(t)\big(P_2Fc_\varkappa+\tilde x(t)\big)-\sum_{i=1}^{r}\Phi_i(t)\sum_{j=0}^{s_i-1}I_{s_i}^j\frac{d^j}{dt^j}\big(\Psi_i^*(t)f(t)\big)-\\
&-\sum_{i=1}^{\tilde r}\tilde\Phi_i(t)\sum_{j=0}^{\tilde s_i-1}\big(I_{\tilde s_i}^T\big)^j\frac{d^j}{dt^j}\Big(\hat\Psi_i^*(t)f(t)\Big)-\sum_{i=1}^{\hat r}\hat\Phi_i(t)\sum_{j=0}^{\hat s_i-1}I_{\hat s_i}^j\frac{d^j}{dt^j}\Big(\tilde\Psi_i^*(t)f(t)\Big)+\\
&+\sum_{i=1}^{\tilde r}\sum_{j=0}^{\tilde s_i}\left(\frac{d^j}{dt^j}\,\tilde\beta_i(t)\right)\tilde\varphi_i^{(\tilde s_i-j+1)}(t)+\sum_{i=1}^{\breve r}\breve\beta_i(t)\breve\varphi_i(t)\Bigg).
\end{aligned}
$$

Для її розв'язності необхідно й достатньо виконання умови (11), оскільки стовпці матриці $h\big(Q(t)X(t)P_2F\big)$ і вектори $h\left(\sum_{j=0}^{\tilde s_i}\left(\frac{d^j}{dt^j}\tilde\beta_i(t)\right)\tilde\varphi_i^{(\tilde s_i-j+1)}(t)\right)$, $i=\overline{1,\tilde r}$, $h\big(\breve\beta_i(t)\breve\varphi_i(t)\big)$, $i=\overline{1,\breve r}$, є лінійними комбінаціями стовпців матриці $h\big(D(t)\big)$, при цьому, якщо $\mu\neq0$, то з урахуванням $\dim\ker h\big(D(t)\big)=0$ маємо

$$
\begin{aligned}
c_\mu=\big(h\big(D(t)\big)\big)^-\Bigg[\gamma-h\Bigg(&Q(t)X(t)\big(P_2Fc_\varkappa+\tilde x(t)\big)-\sum_{i=1}^{r}\Phi_i(t)\sum_{j=0}^{s_i-1}I_{s_i}^j\frac{d^j}{dt^j}\big(\Psi_i^*(t)f(t)\big)-\\
&-\sum_{i=1}^{\tilde r}\tilde\Phi_i(t)\sum_{j=0}^{\tilde s_i-1}\big(I_{\tilde s_i}^T\big)^j\frac{d^j}{dt^j}\Big(\hat\Psi_i^*(t)f(t)\Big)-\sum_{i=1}^{\hat r}\hat\Phi_i(t)\sum_{j=0}^{\hat s_i-1}I_{\hat s_i}^j\frac{d^j}{dt^j}\Big(\tilde\Psi_i^*(t)f(t)\Big)+\\
&+\sum_{i=1}^{\tilde r}\sum_{j=0}^{\tilde s_i}\left(\frac{d^j}{dt^j}\tilde\beta_i(t)\right)\tilde\varphi_i^{(\tilde s_i-j+1)}(t)+\sum_{i=1}^{\breve r}\breve\beta_i(t)\breve\varphi_i(t)\Bigg)\Bigg]. \qquad (13)
\end{aligned}
$$

Підставивши (13) в (10), отримаємо (12).

Теорему 1 доведено.

3. Приклад. Нехай в (1), (2) $m = n = l = 2$,

$$h(x(t)) = \lim_{t\to\infty} x(t) - \lim_{t\to-\infty} x(t),$$

$$B(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{bmatrix}, \qquad f(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}, \qquad \gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix},$$

$a_{ij}(t) \in BC^\infty(R),\ i,j = 1,2,\ f_i(t) \in BC^\infty(R),\ i = 1,2,$ — дійсні скалярні функції, γ_i, $i = 1,2,$ — дійсні числа, існують межі

$$a_{ij}(-\infty) = \lim_{t\to-\infty} a_{ij}(t), \qquad a_{ij}(\infty) = \lim_{t\to\infty} a_{ij}(t),$$

$$\frac{d}{dt}\, a_{ij}(t)\Big|_{t=-\infty} = \lim_{t\to-\infty} \frac{d}{dt}\, a_{ij}(t), \qquad \frac{d}{dt} a_{ij}(t)\Big|_{t=\infty} = \lim_{t\to\infty} \frac{d}{dt}\, a_{ij}(t), \quad i,j = 1,2,$$

$$f_i(-\infty) = \lim_{t\to-\infty} f_i(t), \qquad f_i(\infty) = \lim_{t\to\infty} f_i(t), \quad i = 1,2.$$

Розглянемо такі випадки [3, 4, 6, 7]:

1. $a_{22}(t) \neq 0\ \ \forall t \in -\infty \bigcup R \bigcup \infty$. Маємо: $r = 1,\ s_1 = 1,\ \check{r} = \check{r} = \tilde{r} = \hat{r} = 0,\ \alpha = 1,$

$$\Phi_1(t) = \varphi_1^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \Psi_1(t) = \psi_1^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ a_{22}^{-1}(t) \end{bmatrix},$$

$$Q(t) = q_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{21}(t)a_{22}^{-1}(t) \end{bmatrix}, \qquad P(t) = p_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{12}(t)a_{22}^{-1}(t) \end{bmatrix},$$

умови (4), (5) відсутні,

$$X(t) = \exp\left(\int\limits_0^t \lambda(\tau)\, d\tau \right),$$

де

$$\lambda(t) = a_{11}(t) - a_{12}(t)a_{21}(t)a_{22}^{-1}(t)$$

— скалярна функція, для неї існують межі

$$\lambda(-\infty) = \lim_{t\to-\infty} \lambda(t), \qquad \lambda(\infty) = \lim_{t\to\infty} \lambda(t).$$

Для експоненціальної дихотомії розв'язків системи (6) на півосях R_- і R_+ згідно з [4] необхідно та достатньо, щоб $\lambda(-\infty) \neq 0$ і $\lambda(\infty) \neq 0$. Будемо припускати, що ці умови виконуються.

Якщо $\lambda(-\infty) < 0$ і $\lambda(\infty) < 0$, то $P_1 = 1,\ P_2 = 1,\ U = U^- = 1,\ \varkappa = 0,\ F = G = 0$, умова (7) виконується, система (1) має єдиний розв'язок (8), (9), що належить $BC^\infty(R)$,

$$x(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{21}(t)a_{22}^{-1}(t) \end{bmatrix} \exp\left(\int\limits_0^t \lambda(z)\,dz\right) \int\limits_{-\infty}^t \exp\left(-\int\limits_0^\tau \lambda(z)\,dz\right) \times$$
$$\times \big(f_1(\tau) - a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau)f_2(\tau)\big)\,d\tau - \begin{bmatrix} 0 \\ a_{22}^{-1}(t)f_2(t) \end{bmatrix}, \tag{14}$$

$$\mu = 0, \qquad D(t) \equiv 0_2, \qquad h\big(D(t)\big) = 0_2, \qquad \nu = 2, \qquad H = E_2, \qquad \big(h\big(D(t)\big)\big)^- = 0_2^T. \tag{15}$$

Він є розв'язком крайової задачі (1), (2) при виконанні умови (11):

$$\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{21}(\infty)a_{22}^{-1}(\infty) \end{bmatrix} \exp\left(\int\limits_0^\infty \lambda(z)\,dz\right) \int\limits_{-\infty}^\infty \exp\left(-\int\limits_0^\tau \lambda(z)\,dz\right) \times$$
$$\times \big(f_1(\tau) - a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau)f_2(\tau)\big)\,d\tau + \begin{bmatrix} 0 \\ a_{22}^{-1}(\infty)f_2(\infty) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ a_{22}^{-1}(-\infty)f_2(-\infty) \end{bmatrix} = 0,$$

звідки

$$\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{21}(\infty)a_{22}^{-1}(\infty) \end{bmatrix} \exp\left(\int\limits_0^\infty \lambda(z)\,dz\right) \int\limits_{-\infty}^\infty \exp\left(-\int\limits_0^\tau \lambda(z)\,dz\right) \times$$
$$\times \big(f_1(\tau) - a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau)f_2(\tau)\big)\,d\tau - \begin{bmatrix} 0 \\ a_{22}^{-1}(\infty)f_2(\infty) - a_{22}^{-1}(-\infty)f_2(-\infty) \end{bmatrix}.$$

Якщо $\lambda(-\infty) < 0$ і $\lambda(\infty) > 0$, то $P_1 = 1,\ P_2 = 0,\ U = U^- = 0,\ \varkappa = 1,\ F = G = 1$, при виконанні умови (7)

$$\int\limits_{-\infty}^\infty \exp\left(-\int\limits_0^\tau \lambda(z)\,dz\right)\big(f_1(\tau) - a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau)f_2(\tau)\big)\,d\tau = 0$$

система (1) має єдиний розв'язок (8), (9), що належить $BC^\infty(R)$, який співпадає з (14), або, що те ж саме,

$$x(t) = -\begin{bmatrix} 1 \\ -a_{21}(t)a_{22}^{-1}(t) \end{bmatrix} \exp\left(\int\limits_0^t \lambda(z)\,dz\right) \int\limits_t^\infty \exp\left(-\int\limits_0^\tau \lambda(z)\,dz\right) \times$$
$$\times \big(f_1(\tau) - a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau)f_2(\tau)\big)\,d\tau - \begin{bmatrix} 0 \\ a_{22}^{-1}(t)f_2(t) \end{bmatrix}. \tag{16}$$

Виконуються рівності (15) і він є розв'язком крайової задачі (1), (2) при виконанні умови (11):

$$\begin{bmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ a_{22}^{-1}(\infty)f_2(\infty)\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\ a_{22}^{-1}(-\infty)f_2(-\infty)\end{bmatrix} = 0,$$

звідки

$$\begin{bmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}0\\ a_{22}^{-1}(\infty)f_2(\infty) - a_{22}^{-1}(-\infty)f_2(-\infty)\end{bmatrix}.$$

Якщо $\lambda(-\infty) > 0$ і $\lambda(\infty) < 0$, то $P_1 = 0,\ P_2 = 1,\ U = U^- = 0,\ \varkappa = 1,\ F = G = 1$, умова (7) виконується, система (1) має розв'язки (8), (9), що належать $BC^\infty(R)$:

$$x(t) = \begin{bmatrix}1\\ -a_{21}(t)a_{22}^{-1}(t)\end{bmatrix} \exp\left(\int\limits_0^t \lambda(z)\,dz\right)\left[c_1 + \int\limits_0^t \exp\left(-\int\limits_0^\tau \lambda(z)dz\right) \times \right.$$

$$\left. \times \left(f_1(\tau) - a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau)f_2(\tau)\right)d\tau\right] - \begin{bmatrix}0\\ a_{22}^{-1}(t)f_2(t)\end{bmatrix}. \qquad (17)$$

Якщо

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda(z)\,dz = 0, \qquad a_{21}(-\infty)a_{22}^{-1}(-\infty) = a_{21}(\infty)a_{22}^{-1}(\infty),$$

то справджуються рівності (15), при виконанні умови (11)

$$\begin{bmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\ -a_{21}(\infty)a_{22}^{-1}(\infty)\end{bmatrix} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\int\limits_{-\infty}^{\tau} \lambda(z)\,dz\right)\left(f_1(\tau) - a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau)f_2(\tau)\right)d\tau +$$

$$+ \begin{bmatrix}0\\ a_{22}^{-1}(\infty)f_2(\infty)\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\ a_{22}^{-1}(-\infty)f_2(-\infty)\end{bmatrix} = 0,$$

звідки

$$\begin{bmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ -a_{21}(\infty)a_{22}^{-1}(\infty)\end{bmatrix} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\int\limits_{-\infty}^{\tau} \lambda(z)\,dz\right)\left(f_1(\tau) - a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau)f_2(\tau)\right)d\tau -$$

$$- \begin{bmatrix}0\\ a_{22}^{-1}(\infty)f_2(\infty) - a_{22}^{-1}(-\infty)f_2(-\infty)\end{bmatrix},$$

крайова задача (1), (2) має розв'язки (9), (12), що співпадають з (17).

Якщо

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda(z)\,dz = 0, \qquad a_{21}(-\infty)a_{22}^{-1}(-\infty) \neq a_{21}(\infty)a_{22}^{-1}(\infty),$$

то

$$\mu = 1, \qquad D(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{21}(t)a_{22}^{-1}(t) \end{bmatrix} \exp\left(\int\limits_{-\infty}^{t} \lambda(z)\, dz \right),$$

$$h\bigl(D(t)\bigr) = \begin{bmatrix} 0 \\ -a_{21}(\infty)a_{22}^{-1}(\infty) + a_{21}(-\infty)a_{22}^{-1}(-\infty) \end{bmatrix}, \qquad \nu = 1, \quad H = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\bigl(h\bigl(D(t)\bigr)\bigr)^{-} = \Bigl[0 \quad \bigl(-a_{21}(\infty)a_{22}^{-1}(\infty) + a_{21}(-\infty)a_{22}^{-1}(-\infty)\bigr)^{-1}\Bigr],$$

при виконанні умови (11)

$$\gamma_1 - \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(- \int\limits_{-\infty}^{\tau} \lambda(z)\, dz \right) \bigl(f_1(\tau) - a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau) f_2(\tau) \bigr)\, d\tau = 0,$$

звідки

$$\gamma_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(- \int\limits_{-\infty}^{\tau} \lambda(z)\, dz \right) \bigl(f_1(\tau) - a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau) f_2(\tau) \bigr)\, d\tau,$$

крайова задача (1), (2) має єдиний розв'язок (9), (12):

$$x(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{21}(t)a_{22}^{-1}(t) \end{bmatrix} \exp\left(\int\limits_{-\infty}^{t} \lambda(z)\, dz \right) \Biggl\{ \bigl(-a_{21}(\infty)a_{22}^{-1}(\infty) + a_{21}(-\infty)a_{22}^{-1}(-\infty)\bigr)^{-1} \times$$

$$\times \Biggl[\gamma_2 + a_{21}(\infty)a_{22}^{-1}(\infty) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(- \int\limits_{-\infty}^{\tau} \lambda(z)\, dz \right) \bigl(f_1(\tau) - a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau) f_2(\tau) \bigr)\, d\tau +$$

$$+ a_{22}^{-1}(\infty) f_2(\infty) - a_{22}^{-1}(-\infty) f_2(-\infty) \Biggr] + \exp\left(- \int\limits_{-\infty}^{\tau} \lambda(z)\, dz \right) \times$$

$$\times \bigl(f_1(\tau) - a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau) f_2(\tau) \bigr)\, d\tau \Biggr\} - \begin{bmatrix} 0 \\ a_{22}^{-1}(t) f_2(t) \end{bmatrix}.$$

Якщо

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda(z)\, dz \neq 0,$$

то

$$\mu = 1, \qquad D(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{21}(t)a_{22}^{-1}(t) \end{bmatrix} \exp\left(\int\limits_{-\infty}^{t} \lambda(z)\, dz \right),$$

$$h\big(D(t)\big) = \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{21}(\infty)a_{22}^{-1}(\infty) \end{bmatrix} \exp\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda(z)\,dz\right) - \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{21}(-\infty)a_{22}^{-1}(-\infty) \end{bmatrix},$$

$$\nu = 1, \qquad H = \begin{bmatrix} a_{21}(\infty)a_{22}^{-1}(\infty) \\ 1 \end{bmatrix} \exp\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda(z)\,dz\right) - \begin{bmatrix} a_{21}(-\infty)a_{22}^{-1}(-\infty) \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\big(h\big(D(t)\big)\big)^{-} = \left[\left(\exp\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda(z)\,dz\right) - 1\right)^{-1} \quad 0\right],$$

при виконанні умови (11)

$$\gamma_1\left(a_{21}(\infty)a_{22}^{-1}(\infty)\exp\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda(z)\,dz\right) - a_{21}(-\infty)a_{22}^{-1}(-\infty)\right) +$$

$$+\,\gamma_2\left(\exp\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda(z)\,dz\right) - 1\right) - \big(a_{21}(\infty)a_{22}^{-1}(\infty) - a_{21}(-\infty)a_{22}^{-1}(-\infty)\big)\times$$

$$\times \exp\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda(z)\,dz\right)\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\int\limits_{-\infty}^{\tau} \lambda(z)\,dz\right)\big(f_1(\tau) - a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau)f_2(\tau)\big)\,d\tau +$$

$$+\,\big(a_{22}^{-1}(\infty)f_2(\infty) - a_{22}^{-1}(-\infty)f_2(-\infty)\big)\left(\exp\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda(z)\,dz\right) - 1\right) = 0,$$

звідки

$$\gamma_2 = -\gamma_1\left(a_{21}(\infty)a_{22}^{-1}(\infty)\exp\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda(z)\,dz\right) - a_{21}(-\infty)a_{22}^{-1}(-\infty)\right)\times$$

$$\times\left[\exp\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda(z)\,dz\right) - 1\right]^{-1} + \big(a_{21}(\infty)a_{22}^{-1}(\infty) - a_{21}(-\infty)a_{22}^{-1}(-\infty)\big)\times$$

$$\times \exp\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda(z)\,dz\right)\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\int\limits_{-\infty}^{\tau} \lambda(z)\,dz\right)\big(f_1(\tau) - a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau)f_2(\tau)\big)\,d\tau\times$$

$$\times\left[\exp\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda(z)\,dz\right) - 1\right]^{-1} - a_{22}^{-1}(\infty)f_2(\infty) + a_{22}^{-1}(-\infty)f_2(-\infty),$$

крайова задача (1), (2) має єдиний розв'язок (9), (12):

$$x(t)=\begin{bmatrix}1\\-a_{21}(t)a_{22}^{-1}(t)\end{bmatrix}\exp\left(\int\limits_{-\infty}^{t}\lambda(z)\,dz\right)\left\{\left[\exp\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\lambda(z)\,dz\right)-1\right]^{-1}\times\right.$$
$$\times\left[\gamma_1-\exp\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\lambda(z)\,dz\right)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\int\limits_{-\infty}^{\tau}\lambda(z)\,dz\right)\big(f_1(\tau)-a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau)f_2(\tau)\big)\,d\tau\right]+$$
$$\left.+\int\limits_{-\infty}^{t}\exp\left(-\int\limits_{-\infty}^{\tau}\lambda(z)\,dz\right)\big(f_1(\tau)-a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau)f_2(\tau)\big)\,d\tau\right\}-\begin{bmatrix}0\\a_{22}^{-1}(t)f_2(t)\end{bmatrix}.$$

Якщо $\lambda(-\infty)>0$ і $\lambda(\infty)>0$, то $P_1=0,\ P_2=0,\ U=U^-=-1,\ \varkappa=0,\ F=G=0$, умова (7) виконується, система (1) має єдиний розв'язок (8), (9), що належить $BC^\infty(R)$, який співпадає з (16). Виконуються рівності (15). Він є розв'язком крайової задачі (1), (2) при виконанні умови (11):

$$\begin{bmatrix}\gamma_1\\\gamma_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\-a_{21}(\infty)a_{22}^{-1}(\infty)\end{bmatrix}\exp\left(-\int\limits_{-\infty}^{0}\lambda(z)\,dz\right)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\int\limits_{\tau}^{0}\lambda(z)\,dz\right)\times$$
$$\times\big(f_1(\tau)-a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau)f_2(\tau)\big)\,d\tau+\begin{bmatrix}0\\a_{22}^{-1}(\infty)f_2(\infty)\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\a_{22}^{-1}(-\infty)f_2(-\infty)\end{bmatrix}=0,$$

звідки

$$\begin{bmatrix}\gamma_1\\\gamma_2\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}1\\-a_{21}(\infty)a_{22}^{-1}(\infty)\end{bmatrix}\exp\left(-\int\limits_{-\infty}^{0}\lambda(z)\,dz\right)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\int\limits_{\tau}^{0}\lambda(z)\,dz\right)\times$$
$$\times\big(f_1(\tau)-a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau)f_2(\tau)\big)\,d\tau-\begin{bmatrix}0\\a_{22}^{-1}(\infty)f_2(\infty)-a_{22}^{-1}(-\infty)f_2(-\infty)\end{bmatrix}.$$

2. $a_{22}(t)\equiv0,\ a_{12}(t)\neq0,\ a_{21}(t)\neq0\ \ \forall t\in-\infty\bigcup R\bigcup\infty$. Маємо: $r=1,\ s_1=2,$ $\breve{r}=\check{r}=\tilde{r}=\hat{r}=0,\ \alpha=0,$

$$\varphi_1^{(1)}(t)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\qquad \varphi_1^{(2)}(t)=\begin{bmatrix}a_{12}(t)\\a_{12}^{-1}(t)\dfrac{d}{dt}a_{12}(t)-a_{11}(t)\end{bmatrix},$$

$$\psi_1^{(1)}(t)=\begin{bmatrix}0\\a_{12}^{-1}(t)a_{21}^{-1}(t)\end{bmatrix},\qquad \psi_1^{(2)}(t)=\begin{bmatrix}a_{12}^{-1}(t)\\0\end{bmatrix},$$

$$\Phi_1(t)=\begin{bmatrix}0&a_{12}(t)\\1&a_{12}^{-1}(t)\dfrac{d}{dt}a_{12}(t)-a_{11}(t)\end{bmatrix},\qquad \Psi_1(t)=\begin{bmatrix}a_{12}^{-1}(t)&0\\0&a_{12}^{-1}(t)a_{21}^{-1}(t)\end{bmatrix},$$

умови (4), (5), (7) відсутні, система (1) має єдиний розв'язок (8), (9), що належить $BC^{\infty}(R)$:

$$x(t) = \begin{bmatrix} -a_{21}^{-1}(t)f_2(t) \\ a_{12}^{-1}(t)\left[a_{11}(t)a_{21}^{-1}(t)f_2(t) - f_1(t) - \dfrac{d}{dt}\left(a_{21}^{-1}(t)f_2(t)\right)\right] \end{bmatrix}.$$

Виконуються рівності (15). Він є розв'язком крайової задачі (1), (2) при виконанні умови (11):

$$\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -a_{21}^{-1}(\infty)f_2(\infty) \\ a_{12}^{-1}(\infty)\left[a_{11}(\infty)a_{21}^{-1}(\infty)f_2(\infty) - f_1(\infty) - \dfrac{d}{dt}\left(a_{21}^{-1}(t)f_2(t)\right)\Big|_{t=\infty}\right] \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} -a_{21}^{-1}(-\infty)f_2(-\infty) \\ a_{12}^{-1}(-\infty)\left[a_{11}(-\infty)a_{21}^{-1}(-\infty)f_2(-\infty) - f_1(-\infty) - \dfrac{d}{dt}\left(a_{21}^{-1}(t)f_2(t)\right)\Big|_{t=-\infty}\right] \end{bmatrix} = 0,$$

звідки

$$\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{21}^{-1}(\infty)f_2(\infty) \\ a_{12}^{-1}(\infty)\left[a_{11}(\infty)a_{21}^{-1}(\infty)f_2(\infty) - f_1(\infty) - \dfrac{d}{dt}\left(a_{21}^{-1}(t)f_2(t)\right)\Big|_{t=\infty}\right] \end{bmatrix} -$$

$$- \begin{bmatrix} -a_{21}^{-1}(-\infty)f_2(-\infty) \\ a_{12}^{-1}(-\infty)\left[a_{11}(-\infty)a_{21}^{-1}(-\infty)f_2(-\infty) - f_1(-\infty) - \dfrac{d}{dt}\left(a_{21}^{-1}(t)f_2(t)\right)\Big|_{t=-\infty}\right] \end{bmatrix}.$$

3. $a_{22}(t) \equiv 0,\ a_{12}(t) \neq 0,\ a_{21}(t) \equiv 0\ \ \forall t \in -\infty \bigcup R \bigcup \infty$. Маємо: $\tilde{r} = 1,\ \tilde{s}_1 = 1,\ \check{r} = 1,$ $\breve{r} = r = \hat{r} = 0,\ \alpha = 0,$

$$\tilde{\Phi}_1(t) = \tilde{\varphi}_1^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \tilde{\varphi}_1^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} a_{12}(t) \\ a_{12}^{-1}(t)\,\dfrac{d}{dt}\,a_{12}(t) - a_{11}(t) \end{bmatrix},$$

$$\breve{\psi}_1(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \hat{\Psi}_1(t) = \hat{\psi}_1^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} a_{12}^{-1}(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \check{\varphi}_1(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

умови (4), (7) відсутні, при виконанні умови (5)

$$f_2(t) \equiv 0$$

система (1) має розв'язки (8), (9), що належать $BC^{\infty}(R)$:

$$x(t) = \begin{bmatrix} a_{12}(t)\tilde{\beta}_1(t) \\ a_{12}^{-1}(t)\tilde{\beta}_1(t)\,\dfrac{d}{dt}\,a_{12}(t) - a_{11}(t)\tilde{\beta}_1(t) - a_{12}^{-1}(t)f_1(t) + \dfrac{d}{dt}\,\tilde{\beta}_1(t) \end{bmatrix}.$$

Функції $\tilde{\xi}_k(t),\ k = 1, 2,$ виберемо таким чином, щоб існували межі

$$\tilde{\xi}_k(-\infty) = \lim_{t\to-\infty} \tilde{\xi}_k(t), \qquad \tilde{\xi}_k(\infty) = \lim_{t\to\infty} \tilde{\xi}_k(t),$$

$$\frac{d}{dt}\,\tilde{\xi}_k(t)\Big|_{t=-\infty} = \lim_{t\to-\infty} \frac{d}{dt}\tilde{\xi}_k(t), \qquad \frac{d}{dt}\,\tilde{\xi}_k(t)\Big|_{t=\infty} = \lim_{t\to\infty} \frac{d}{dt}\,\tilde{\xi}_k(t), \quad k = 1, 2,$$

вектори

$$\begin{bmatrix} a_{12}(t)\tilde{\xi}_k(t) \\ a_{12}^{-1}(t)\tilde{\xi}_k(t)\dfrac{d}{dt}\,a_{12}(t) - a_{11}(t)\tilde{\xi}_k(t) + \dfrac{d}{dt}\,\tilde{\xi}_k(t) \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2,$$

були лінійно незалежні та виконувалися рівності

$$\tilde{\xi}_1(\infty) = a_{12}^{-1}(\infty)\big(a_{12}(-\infty)\tilde{\xi}_1(-\infty) + 1\big),$$

$$\frac{d}{dt}\,\tilde{\xi}_1(t)\Big|_{t=\infty} = -a_{12}^{-1}(\infty)\tilde{\xi}_1(\infty)\,\frac{d}{dt}\,a_{12}(t)\Big|_{t=\infty} + a_{11}(\infty)\tilde{\xi}_1(\infty) +$$
$$+ a_{12}^{-1}(-\infty)\tilde{\xi}_1(-\infty)\,\frac{d}{dt}\,a_{12}(t)\Big|_{t=-\infty} - a_{11}(-\infty)\tilde{\xi}_1(-\infty) + \frac{d}{dt}\,\tilde{\xi}_1(t)\Big|_{t=-\infty},$$

$$\tilde{\xi}_2(\infty) = a_{12}^{-1}(\infty)a_{12}(-\infty)\tilde{\xi}_2(-\infty),$$

$$\frac{d}{dt}\,\tilde{\xi}_2(t)\Big|_{t=\infty} = -a_{12}^{-1}(\infty)\tilde{\xi}_2(\infty)\,\frac{d}{dt}\,a_{12}(t)\Big|_{t=\infty} + a_{11}(\infty)\tilde{\xi}_2(\infty)+$$
$$+ a_{12}^{-1}(-\infty)\tilde{\xi}_2(-\infty)\,\frac{d}{dt}\,a_{12}(t)\Big|_{t=-\infty} - a_{11}(-\infty)\tilde{\xi}_2(-\infty) + \frac{d}{dt}\,\tilde{\xi}_2(t)\Big|_{t=-\infty} + 1.$$

Складемо з цих векторів матрицю $D(t)$. Тоді

$$\mu = 2, \qquad h\big(D(t)\big) = E_2, \qquad \nu = 0, \qquad H = 0_2, \qquad \big(h\big(D(t)\big)\big)^- = E_2,$$

умова (11) виконується, крайова задача (1), (2) має розв'язки (9), (12):

$$x(t) = \begin{bmatrix} a_{12}(t)\xi(t) \\ a_{12}^{-1}(t)\xi(t)\dfrac{d}{dt}\,a_{12}(t) - a_{11}(t)\xi(t) - a_{12}^{-1}(t)f_1(t) + \dfrac{d}{dt}\,\xi(t) \end{bmatrix},$$

де

$$\xi(t) = \Big(\gamma_1 - a_{12}(\infty)\tilde{\beta}_1(\infty) + a_{12}(-\infty)\tilde{\beta}_1(-\infty)\Big)\,\tilde{\xi}_1(t) +$$
$$+ \Big(\gamma_2 - a_{12}^{-1}(\infty)\tilde{\beta}_1(\infty)\,\frac{d}{dt}\,a_{12}(t)\Big|_{t=\infty} + a_{11}(\infty)\tilde{\beta}_1(\infty) + a_{12}^{-1}(\infty)f_1(\infty) -$$
$$-\frac{d}{dt}\,\tilde{\beta}_1(t)\Big|_{t=\infty} + a_{12}^{-1}(-\infty)\tilde{\beta}_1(-\infty)\,\frac{d}{dt}\,a_{12}(t)\Big|_{t=-\infty} -$$

$$-a_{11}(-\infty)\tilde{\beta}_1(-\infty) - a_{12}^{-1}(-\infty)f_1(-\infty) + \frac{d}{dt}\,\tilde{\beta}_1(t)\Big|_{t=-\infty}\Big)\,\tilde{\xi}_2(t) + \tilde{\beta}_1(t)$$

— скалярна функція.

4. $a_{22}(t) \equiv 0,\ a_{12}(t) \equiv 0,\ a_{21}(t) \neq 0\ \forall t \in -\infty \bigcup R \bigcup \infty$. Маємо: $\check{r} = 1,\ \hat{r} = 1,\ \hat{s}_1 = 1,\ \tilde{r} = r = \check{r} = 0,\ \alpha = 0$,

$$\check{\varphi}_1(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \tilde{\Psi}_1(t) = \tilde{\psi}_1^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \tilde{\psi}_1^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} a_{21}(t) \\ -a_{11}(t) - a_{21}^{-1}(t)\dfrac{d}{dt}\,a_{21}(t) \end{bmatrix},$$

$$\hat{\Phi}_1(t) = \hat{\varphi}_1^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} a_{21}^{-1}(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \check{\psi}_1(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

умови (5), (7) відсутні, при виконанні умови (4)

$$a_{21}(t)f_1(t) - a_{11}(t)f_2(t) - a_{21}^{-1}(t)f_2(t)\,\frac{d}{dt}\,a_{21}(t) + \frac{d}{dt}\,f_2(t) \equiv 0$$

система (1) має розв'язки (8), (9), що належать $BC^{\infty}(R)$:

$$x(t) = \begin{bmatrix} -a_{21}^{-1}(t)f_2(t) \\ \check{\beta}_1(t) \end{bmatrix}.$$

Функцію $\check{\xi}_1(t)$ виберемо таким чином, щоб

$$\check{\xi}_1(t) \neq 0 \quad \forall t \in -\infty \bigcup R \bigcup \infty, \tag{18}$$

існували межі

$$\check{\xi}_1(-\infty) = \lim_{t\to-\infty} \check{\xi}_1(t), \qquad \check{\xi}_1(\infty) = \lim_{t\to\infty} \check{\xi}_1(t) \tag{19}$$

і виконувалася рівність

$$\check{\xi}_1(\infty) = \check{\xi}_1(-\infty) + 1. \tag{20}$$

Тоді

$$\begin{gathered} \mu = 1, \qquad D(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \check{\xi}_1(t) \end{bmatrix}, \qquad h\big(D(t)\big) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \nu = 1, \\ H = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \big(h\big(D(t)\big)\big)^{-} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{gathered} \tag{21}$$

при виконанні умови (11)

$$\gamma_1 + a_{21}^{-1}(\infty)f_2(\infty) - a_{21}^{-1}(-\infty)f_2(-\infty) = 0,$$

звідки

$$\gamma_1 = -a_{21}^{-1}(\infty) f_2(\infty) + a_{21}^{-1}(-\infty) f_2(-\infty),$$

крайова задача (1), (2) має розв'язки (9), (12):

$$x(t) = \begin{bmatrix} -a_{21}^{-1}(t) f_2(t) \\ \breve{\xi}_1(t)\left(\gamma_2 - \breve{\beta}_1(\infty) + \breve{\beta}_1(-\infty)\right) + \breve{\beta}_1(t) \end{bmatrix}.$$

5. $a_{22}(t) \equiv 0,\ a_{12}(t) \equiv 0,\ a_{21}(t) \equiv 0\ \forall t \in \infty \bigcup R \bigcup \infty$. Маємо: $\breve{r} = 1,\ \breve{r} = 1,\ \tilde{r} = r = \hat{r} = 0$, $\alpha = 1$,

$$\breve{\varphi}_1(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \breve{\psi}_1(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \breve{\varphi}_1(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \breve{\psi}_1(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$Q(t) = q_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad P(t) = p_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

умова (4) відсутня, умова (5) має вигляд

$$f_2(t) \equiv 0.$$

Далі будемо припускати, що вона виконується,

$$X(t) = \exp\left(\int\limits_0^t a_{11}(\tau)\, d\tau\right).$$

Для експоненціальної дихотомії розв'язків системи (6) на півосях R_- і R_+ згідно з [4] необхідно і достатньо, щоб $a_{11}(-\infty) \neq 0$ і $a_{11}(\infty) \neq 0$. Будемо припускати, що ці умови виконуються.

Функцію $\breve{\xi}_1(t)$ виберемо таким чином, щоб виконувалися умови (18)–(20).

Якщо $a_{11}(-\infty) < 0$ і $a_{11}(\infty) < 0$, то $P_1 = 1,\ P_2 = 1,\ U = U^- = 1,\ \varkappa = 0,\ F = G = 0$, умова (7) виконується, система (1) має розв'язки (8), (9), що належать $BC^\infty(R)$:

$$x(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \exp\left(\int\limits_0^t a_{11}(z)\, dz\right) \int\limits_{-\infty}^t \exp\left(-\int\limits_0^\tau a_{11}(z)\, dz\right) f_1(\tau)\, d\tau + \begin{bmatrix} 0 \\ \breve{\beta}_1(t) \end{bmatrix}. \tag{22}$$

Виконуються рівності (21) і при виконанні умови (11)

$$\gamma_1 - \exp\left(\int\limits_0^\infty a_{11}(z)\, dz\right) \int\limits_{-\infty}^\infty \exp\left(-\int\limits_0^\tau a_{11}(z)\, dz\right) f_1(\tau)\, d\tau = 0,$$

звідки

$$\gamma_1 = \exp\left(\int\limits_0^\infty a_{11}(z)\, dz\right) \int\limits_{-\infty}^\infty \exp\left(-\int\limits_0^\tau a_{11}(z)\, dz\right) f_1(\tau)\, d\tau,$$

крайова задача (1), (2) має розв'язки (9), (12):

$$x(t) = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \exp\left(\int\limits_0^t a_{11}(z)\,dz\right) \int\limits_{-\infty}^{t} \exp\left(-\int\limits_0^\tau a_{11}(z)\,dz\right) f_1(\tau)\,d\tau +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ \breve{\xi}_1(t)\left(\gamma_2 - \breve{\beta}_1(\infty) + \breve{\beta}_1(-\infty)\right) + \breve{\beta}_1(t)\end{bmatrix}. \tag{23}$$

Якщо $\lambda(-\infty) < 0$ і $\lambda(\infty) > 0$, то $P_1 = 1,\ P_2 = 0,\ U = U^- = 0,\ \varkappa = 1,\ F = G = 1$, при виконанні умови (7)

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\int\limits_0^\tau a_{11}(z)\,dz\right) f_1(\tau)\,d\tau = 0$$

система (1) має розв'язки (8), (9), що належать $BC^\infty(R)$, які співпадають з (22), або, що те ж саме,

$$x(t) = -\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \exp\left(\int\limits_0^t a_{11}(z)\,dz\right) \int\limits_{t}^{\infty} \exp\left(-\int\limits_0^\tau a_{11}(z)\,dz\right) f_1(\tau)\,d\tau + \begin{bmatrix}0\\ \breve{\beta}_1(t)\end{bmatrix}. \tag{24}$$

Виконуються рівності (21) і при виконанні умови (11)

$$\gamma_1 = 0$$

крайова задача (1), (2) має розв'язки (9), (12), що співпадають з (23), або, що те ж саме,

$$x(t) = -\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \exp\left(\int\limits_0^t a_{11}(z)\,dz\right) \int\limits_{t}^{\infty} \exp\left(-\int\limits_0^\tau a_{11}(z)\,dz\right) f_1(\tau)\,d\tau +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ \breve{\xi}_1(t)\left(\gamma_2 - \breve{\beta}_1(\infty) + \breve{\beta}_1(-\infty)\right) + \breve{\beta}_1(t)\end{bmatrix}. \tag{25}$$

Якщо $a_{11}(-\infty) > 0$ і $a_{11}(\infty) < 0$, то $P_1 = 0,\ P_2 = 1,\ U = U^- = 0,\ \varkappa = 1,\ F = G = 1$, умова (7) виконується, система (1) має розв'язки (8), (9), що належать $BC^\infty(R)$:

$$x(t) = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \exp\left(\int\limits_0^t a_{11}(z)\,dz\right)\left(c_1 + \int\limits_0^t \exp\left(-\int\limits_0^\tau a_{11}(z)\,dz\right) f_1(\tau)\,d\tau\right) + \begin{bmatrix}0\\ \breve{\beta}_1(t)\end{bmatrix}.$$

Якщо

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} a_{11}(z)\,dz = 0,$$

то справджуються рівності (21), при виконанні умови (11)

$$\gamma_1 - \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\int\limits_{-\infty}^{\tau} a_{11}(z)\,dz\right) f_1(\tau)\,d\tau = 0,$$

звідки

$$\gamma_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\int\limits_{-\infty}^{\tau} a_{11}(z)\,dz\right) f_1(\tau)\,d\tau,$$

крайова задача (1), (2) має розв'язки (9), (12):

$$x(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \exp\left(\int\limits_0^t a_{11}(z)\,dz\right)\left(c_1 + \int\limits_0^t \exp\left(-\int\limits_0^{\tau} a_{11}(z)\,dz\right) f_1(\tau)\,d\tau\right) +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ \breve{\xi}_1(t)\left(\gamma_2 - \breve{\beta}_1(\infty) + \breve{\beta}_1(-\infty)\right) + \breve{\beta}_1(t) \end{bmatrix}.$$

Якщо

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} a_{11}(z)\,dz \neq 0,$$

то

$$\mu = 2, \quad D(t) = \begin{bmatrix} \exp\left(\int_{-\infty}^t a_{11}(z)\,dz\right) & 0 \\ 0 & \breve{\xi}_1(t) \end{bmatrix},$$

$$h\big(D(t)\big) = \begin{bmatrix} \exp\left(\int_{-\infty}^{\infty} a_{11}(z)\,dz\right) - 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\nu = 0, \qquad H = 0_2, \qquad \big(h\big(D(t)\big)\big)^{-} = \begin{bmatrix} \left(\exp\left(\int_{-\infty}^{\infty} a_{11}(z)\,dz\right) - 1\right)^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

умова (11) виконується, крайова задача (1), (2) має розв'язки (9), (12):

$$x(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \exp\left(\int\limits_{-\infty}^t a_{11}(z)\,dz\right)\left\{\left[\exp\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} a_{11}(z)\,dz\right) - 1\right]^{-1} \times\right.$$

$$\times \left[\gamma_1 - \exp\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} a_{11}(z)\,dz\right) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\int\limits_{-\infty}^{\tau} a_{11}(z)\,dz\right) f_1(\tau)\,d\tau\right] +$$

$$\left. + \int\limits_{-\infty}^{t} \exp\left(-\int\limits_{-\infty}^{\tau} a_{11}(z)\,dz\right) f_1(\tau)\,d\tau\right\} + \begin{bmatrix} 0 \\ \breve{\xi}_1(t)\left(\gamma_2 - \breve{\beta}_1(\infty) + \breve{\beta}_1(-\infty)\right) + \breve{\beta}_1(t) \end{bmatrix}.$$

Якщо $a_{11}(-\infty) > 0$ і $a_{11}(\infty) > 0$, то $P_1 = 1,\ P_2 = 1,\ U = U^- = 1,\ \varkappa = 0,\ F = G = 0$, умова (7) виконується, система (1) має розв'язки (8), (9), що належать $BC^{\infty}(R)$, які співпадають з (24). Виконуються рівності (21) і при виконанні умови (11)

$$\gamma_1 + \exp\left(-\int\limits_{-\infty}^{0} a_{11}(z)\,dz\right)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\int\limits_{\tau}^{0} a_{11}(z)\,dz\right) f_1(\tau)\,d\tau = 0,$$

звідки

$$\gamma_1 = -\exp\left(-\int\limits_{-\infty}^{0} a_{11}(z)\,dz\right)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\int\limits_{\tau}^{0} a_{11}(z)\,dz\right) f_1(\tau)\,d\tau = 0,$$

крайова задача (1), (2) має розв'язки (9), (12), які співпадають з (25).

Література

1. A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko, *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems*, De Gruyter, Berlin (2016).
2. О. А. Бойчук, Л. М. Шегда, *Вироджені нетерові крайові задачі*, Нелін. коливання, **10**, № 3, 303 – 312 (2007).
3. М. А. Елишевич, *Краевая задача для системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка с прямоугольными матрицами*, Нелін. коливання, **19**, № 4, 476 – 492 (2016).
4. А. А. Бойчук, М. А. Елишевич, *Ограниченные решения системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка с прямоугольными матрицами*, Укр. мат. журн., **72**, № 6, 758 – 775 (2020).
5. А. М. Самойленко, М. І. Шкіль, В. П. Яковець, *Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями*, Вища шк., Київ (2000).
6. М. А. Елишевич, *Некоторые свойства жордановых наборов векторов матрицы относительно оператора, содержащего дифференцирование*, Журн. обчисл. та прикл. математики, **108**, № 2, 119 – 134 (2012).
7. М. А. Елишевич, *Задача Коши для системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка с прямоугольными матрицами*, Нелін. коливання, **16**, № 2, 173 – 190 (2013).
8. Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн, *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве*, Наука, Москва (1970).

Одержано 02.07.20