

## АСИМПТОТИКА ЗАГАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ЛІНІЙНОЇ ОДНОРІДНОЇ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОЇ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ, ДО ЯКОЇ ПРИВОДЯТЬ ЗАДАЧІ ДИНАМІКИ СТІЙКОСТІ КРУГОВИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК

С. П. Паффик

Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова  
вул. Пирогова, 9, Київ, 01601, Україна  
e-mail: s.p.pafyk@npu.edu.ua

By using the method of Newton diagrams and asymptotic methods of the theory of differential equations, we construct the asymptotics of the general solution of a linear homogeneous singularly perturbed system of differential equations for some problems of stability of circular cylindrical shells.

З використанням методу діаграм Ньютона та асимптотичних методів у теорії диференціальних рівнянь досліджено питання побудови асимптотики загального розв'язку лінійної однорідної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь, до якої приводять деякі задачі, що виникають під час дослідження стійкості кругових циліндричних оболонок.

**1. Постановка задачі.** З класичної теорії динаміки стійкості оболонок [1, с. 97] відомо, що система стійкості замкнутої кругової циліндричної оболонки має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + P_1 \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} + Q_1 \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} - a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + b_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} + P_2 \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + Q_2 \frac{\partial \omega}{\partial \beta} - a_2 \frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} + b_2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0, \\ \Delta^2 \omega + P_3 \frac{\partial u}{\partial \alpha} + Q_3 \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial v}{\partial \beta} - a_3 \frac{\partial^2 \omega}{\partial \beta^2} + d\omega + b_3 \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} &= 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

де  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}$ ,  $P_k, Q_k, k = \overline{1, 3}$ ,  $-a_k, k = \overline{1, 2}$ ,  $a_3, -b_k, k = \overline{1, 2}$ ,  $b_3, d$  — додатні сталі, які виражаються через фізичні константи, а  $u(t, \alpha, \beta)$ ,  $v(t, \alpha, \beta)$ ,  $\omega(t, \alpha, \beta)$  — переміщення кругової циліндричної оболонки в напрямку її твірної, дотичної і нормалі до її поверхні відповідно [1, с. 95];  $\alpha \in \left[0; \frac{l}{R}\right]$ ,  $\beta \in [0; 2\pi]$ ,  $t \in [0; +\infty)$ . Зокрема,

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{1 + \nu}{2} + \frac{1 - \nu^2}{Eh} \frac{T_1 - T_2}{R^2}, \\ Q_1 &= \nu + \frac{1 - \nu^2}{Eh} \frac{T_1 - T_2}{R^2}, \\ a_1 &= \frac{\nu - 1}{2}, \quad b_1 = m \frac{\nu^2 - 1}{Eh}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_2 &= \frac{1+\nu}{1-\nu} - \frac{2(1+\nu)}{Eh} \frac{T_1 - T_2}{R^2}, \\
Q_2 &= \frac{2}{1-\nu}, \quad a_2 = \frac{2}{\nu-1}, \\
b_2 &= -m \frac{2(1+\nu)}{Eh}, \quad P_3 = \frac{\nu}{c^2}, \\
Q_3 &= \frac{1-\nu^2}{Eh} \frac{T_1}{c^2 R^2}, \quad a_3 = \frac{\nu^2-1}{Eh} \frac{T_2}{c^2 R^2}, \\
b_3 &= \frac{1-\nu^2}{Eh} \frac{m}{c^2}, \quad d = \frac{1-\nu^2}{Eh} \frac{1}{R^2 c^2},
\end{aligned}$$

де  $E$  — модуль пружності матеріалу,  $R$  — радіус внутрішньої частини оболонки,  $h$  — товщина оболонки,  $m$  — маса оболонки,  $l$  — довжина оболонки,  $\nu$  — коефіцієнт Пуассона,  $T_1, T_2$  — внутрішні сили, що діють на оболонку, в початковий момент часу,  $c^2 = \frac{h^2}{12R^2}$ .

Зазначимо, що системи диференціальних рівнянь, подібні до системи (1.1), також розглядалися в роботах [2, с. 3232; 3, с. 985; 4, с. 231].

Фундаментальні дослідження систем диференціальних рівнянь із частинними похідними в основному відносяться до систем, які охоплено типовими класифікаціями. Якщо говорити про систему (1.1), то вона не належить до жодної із згаданих класифікацій. Більш того, відповідні спектральні задачі не самоспряжені, що виключає можливість застосування до розв'язків мішаних задач для неї методу Фур'є. У зв'язку з цим природно виникає необхідність вивчення для системи (1.1) мішаних задач, до розв'язку яких із точних методів може бути використаний метод виключення.

Для використання методу виключення потрібно дослідити відповідну спектральну задачу: 1) асимптотичне зображення фундаментальної матриці; 2) асимптотичне зображення матриці Гріна спектральної задачі поза деяким  $\delta$ -околом спектра власних значень і асимптотичне зображення самих власних значень. У цій статті розглянемо першу з цих задач для системи

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 \tilde{u}_n}{d\alpha^2} + inP_1 \frac{d\tilde{v}_n}{d\alpha} + Q_1 \frac{d\tilde{\omega}_n}{d\alpha} + (a_1 n^2 + b_1 n^4 \lambda^2) \tilde{u}_n &= 0, \\
\frac{d^2 \tilde{v}_n}{d\alpha^2} + inP_2 \frac{d\tilde{u}_n}{d\alpha} + inQ_2 \tilde{\omega}_n + (a_2 n^2 + b_2 n^4 \lambda^2) \tilde{v}_n &= 0, \\
\frac{d^4 \tilde{\omega}_n}{d\alpha^4} - 2n^2 \frac{d^2 \tilde{\omega}_n}{d\alpha^2} + n^4 \tilde{\omega}_n + P_3 \frac{d\tilde{u}_n}{d\alpha} + \\
+ Q_3 \frac{d^2 \tilde{\omega}_n}{d\alpha^2} + inc^{-2} \tilde{v}_n + (d + a_3 n^2 + b_3 n^4 \lambda^2) \tilde{\omega}_n &= 0,
\end{aligned} \tag{1.2}$$

де  $n, \lambda$  — параметри,  $n \in N, \lambda \in C, i$  — уявна одиниця.

Зауважимо, що систему рівнянь (1.2) можна отримати із системи (1.1), якщо зробити в ній заміну

$$\begin{aligned}
u(t, \alpha, \beta) &= \tilde{u}_n(\alpha) \exp(\lambda n^2 t) \exp(in\beta), \\
v(t, \alpha, \beta) &= \tilde{v}_n(\alpha) \exp(\lambda n^2 t) \exp(in\beta),
\end{aligned}$$

$$\omega(t, \alpha, \beta) = \tilde{\omega}_n(\alpha) \exp(\lambda n^2 t) \exp(in\beta).$$

Зазначимо, що цю задачу раніше досліджували в роботі [5, с. 230]. Зокрема, в цій роботі систему (1.1) зводили до системи (1.2), а потім будували асимптотичне зображення фундаментальної матриці системи (1.2). Для цього систему (1.2) за допомогою заміни зводили до системи диференціальних рівнянь 1-го порядку з  $(12 \times 12)$ -вимірними матрицями і для побудови фундаментальної матриці утвореної системи диференціальних рівнянь 1-го порядку використовували класичні результати, отримані в роботах [6, 7]. Це зі свого боку призвело до громіздких обчислень, оскільки довелося оперувати з матрицями великої вимірності. Більш того, для побудови фундаментальної матриці системи диференціальних рівнянь (1.2) на коефіцієнти цієї системи накладали додаткову умову:  $b_1 \neq b_2$ . У цій статті ми пропонуємо інший підхід до побудови фундаментальної матриці розв'язків системи диференціальних рівнянь (1.2), який дає можливість не оперувати з матрицями великої вимірності й позбутися додаткової умови  $b_1 \neq b_2$ . Суть даного підходу полягає в тому, що ми не будемо зводити систему диференціальних рівнянь (1.2) до відповідної системи диференціальних рівнянь 1-го порядку, а, використовуючи результати робіт [8–13], застосуємо для побудови фундаментальної матриці розв'язків системи (1.2) метод діаграм Ньютонна.

Для цього перетворимо систему (1.2). З цією метою в системі (1.2) зробимо заміну  $x = n\alpha$ . Тоді згадана система набере вигляду

$$\begin{aligned} n^2 \frac{d^2 \tilde{u}_n}{dx^2} + in^2 P_1 \frac{d\tilde{v}_n}{dx} + nQ_1 \frac{d\tilde{\omega}_n}{dx} + (a_1 n^2 + b_1 n^4 \lambda^2) \tilde{u}_n &= 0, \\ n^2 \frac{d^2 \tilde{v}_n}{dx^2} + in^2 P_2 \frac{d\tilde{u}_n}{dx} + inQ_2 \tilde{\omega}_n + (a_2 n^2 + b_2 n^4 \lambda^2) \tilde{v}_n &= 0, \\ n^4 \frac{d^4 \tilde{\omega}_n}{dx^4} + (Q_3 n^2 - 2n^4) \frac{d^2 \tilde{\omega}_n}{dx^2} + n^4 \tilde{\omega}_n + \\ + nP_3 \frac{d\tilde{u}_n}{dx} + inc^{-2} \tilde{v}_n + (d + a_3 n^2 + b_3 n^4 \lambda^2) \tilde{\omega}_n &= 0, \end{aligned}$$

де  $x \in \left[0; \frac{nl}{R}\right]$ .

Поділивши ліву й праву частини першого та другого рівнянь останньої системи на  $n^2$ , а третє — на  $n^4$ , запишемо цю систему у векторно-матричній формі:

$$\tilde{A}_4(n^{-1}) \frac{d^4 y_n}{dx^4} + \tilde{A}_2(n^{-1}) \frac{d^2 y_n}{dx^2} + \tilde{A}_1(n^{-1}) \frac{dy_n}{dx} + \tilde{A}_0(n^{-1}) y_n = 0,$$

де

$$\begin{aligned} y_n = \text{col}(\tilde{u}_n, \tilde{v}_n, \tilde{\omega}_n), \quad \tilde{A}_4(n^{-1}) = \text{diag}\{0, 0, 1\}, \quad \tilde{A}_2(n^{-1}) = \text{diag}\{1, 1, n^{-2}Q_3 - 2\}, \\ \tilde{A}_1(n^{-1}) = \begin{pmatrix} 0 & iP_1 & n^{-1}Q_1 \\ iP_2 & 0 & 0 \\ n^{-3}P_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\tilde{A}_0(n^{-1}) = \begin{pmatrix} a_1 + n^2 b_1 \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 + n^2 b_2 \lambda^2 & n^{-1} i Q_2 \\ 0 & n^{-3} i c^{-2} & 1 + b_3 \lambda^2 + n^{-2} a_3 + n^{-4} d \end{pmatrix}.$$

В останній системі, зробивши заміну  $n^{-1} = \varepsilon^2$  і помноживши ліву та праву частини отриманого рівняння на  $\varepsilon^4$ , дістанемо лінійну вироджену сингулярно збурену систему диференціальних рівнянь 4-го порядку

$$\varepsilon^4 A_4^{(0)} \frac{d^4 y_n}{dx^4} + \varepsilon^2 A_2(\varepsilon) \frac{d^2 y_n}{dx^2} + \varepsilon A_1(\varepsilon) \frac{dy_n}{dx} + A_0(\varepsilon) y_n = 0, \quad (1.3)$$

в якій

$$\begin{aligned} A_2(\varepsilon) &= \varepsilon^2 A_2^{(2)} + \varepsilon^6 A_2^{(6)}, \\ A_1(\varepsilon) &= \varepsilon^3 A_1^{(3)} + \varepsilon^7 A_1^{(7)} + \varepsilon^9 A_1^{(9)}, \\ A_0(\varepsilon) &= A_0^{(0)} + \varepsilon^4 A_0^{(4)} + \varepsilon^6 A_0^{(6)} + \varepsilon^8 A_0^{(8)} + \varepsilon^{10} A_0^{(10)} + \varepsilon^{12} A_0^{(12)} \end{aligned} \quad (1.4)$$

і

$$\begin{aligned} A_4^{(0)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & A_2^{(2)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \\ A_2^{(6)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_3 \end{pmatrix}, & A_1^{(3)} &= \begin{pmatrix} 0 & iP_1 & 0 \\ iP_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ A_1^{(7)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & Q_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & A_1^{(9)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ P_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ A_0^{(0)} &= \begin{pmatrix} b_1 \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & A_0^{(4)} &= \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + b_3 \lambda^2 \end{pmatrix}, \\ A_0^{(6)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & iQ_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & A_0^{(8)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}, \\ A_0^{(10)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & ic^{-2} & 0 \end{pmatrix}, & A_0^{(12)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Система рівнянь (1.3) є виродженою лінійною сингулярно збуреною системою диференціальних рівнянь 4-го порядку. Такі системи довільного  $m$ -го порядку детально досліджено в роботах [8–13]. Зокрема, в роботі [8] вивчено питання побудови асимптотичного розв'язку такої системи у випадку простого спектра відповідної граничної в'язки матриць, а в роботах [9, 11, 13] — у випадках кратного спектра відповідної граничної в'язки матриць. У роботі [12] розглянуто питання побудови асимптотичного розв'язку лінійної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь вищого порядку з використанням методу діаграм Ньютонів у випадку, коли умови теорем, отриманих у роботах [9, 10], не виконуються.

З використанням результатів, одержаних у [8–13], у цій статті дослідимо питання побудови асимптотичного розв'язку системи диференціальних рівнянь (1.3).

**2. Аналіз структури загального розв'язку.** Згідно з [8–13] асимптотичні розв'язки системи (1.3) будують залежно від спектра граничної в'язки матриць

$$P(\theta) = A_0^{(0)} + \theta A_1^{(0)} + \theta^2 A_2^{(0)} + \theta^3 A_3^{(0)} + \theta^4 A_4^{(0)}.$$

З використанням формули (1.5) в'язка матриць  $P(\theta)$  набирає вигляду

$$P(\theta) = \begin{pmatrix} b_1 \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & \theta^4 \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Згідно з роботою [8, с. 203] в'язка матриць (2.1) має одне власне значення  $\theta = 0$  (кратності 4), якому відповідає один скінченний елементарний дільник  $\theta^4$  (кратності 4) і два нескінченні  $\xi^4, \zeta^4$  (кратності 4 кожний).

Отже, система рівнянь (1.3) має дві групи розв'язків: розв'язки першої групи, які відповідають скінченному елементарному дільнику, і розв'язки другої групи, які відповідають двом нескінченним елементарним дільникам, в'язки матриць (2.1).

Оскільки система диференціальних рівнянь (1.3) є виродженою, то її фундаментальна система розв'язків складається менше, ніж з 12 частинних лінійно незалежних розв'язків. У роботі [9] встановлено, що фундаментальна система розв'язків виродженої системи диференціальних рівнянь (1.3) складається з  $12 - s$  її частинних лінійно незалежних розв'язків, де натуральне число  $s$  визначається як сума довжин усіх жорданових ланцюжків матриці  $A_4^{(0)}$  відносно операторів

$$\begin{aligned} L_1(\varepsilon) &= 4A_4^{(0)} \frac{d}{dt} + A_3(\varepsilon), \\ L_2(\varepsilon) &= 6A_4^{(0)} \frac{d^2}{dt^2} + 3A_3(\varepsilon) \frac{d}{dt} + A_2(\varepsilon), \\ L_3(\varepsilon) &= 4A_4^{(0)} \frac{d^3}{dt^3} + 3A_3(\varepsilon) \frac{d^2}{dt^2} + 2A_2(\varepsilon) \frac{d}{dt} + A_1(\varepsilon), \\ L_4(\varepsilon) &= A_4^{(0)} \frac{d^4}{dt^4} + A_3(\varepsilon) \frac{d^3}{dt^3} + A_2(\varepsilon) \frac{d^2}{dt^2} + A_1(\varepsilon) \frac{d}{dt} + A_0(\varepsilon). \end{aligned}$$

Так, відповідно до роботи [9], матриця  $A_4^{(0)}$  відносно операторів  $L_i(\varepsilon)$ ,  $i = \overline{1, 4}$ , має жорданів ланцюжок векторів завдовжки  $s$ , якщо існують ненульові вектори  $\bar{\varphi}_j$ ,  $j = \overline{1, s}$ ,

такі, що задовольняють співвідношення

$$A_4^{(0)}\bar{\varphi}_1 = 0, \quad A_4^{(0)}\bar{\varphi}_j + \sum_{i=1}^{\min(j-1,4)} L_i(\varepsilon)\bar{\varphi}_{j-i} = 0, \quad j = \overline{2, s},$$

а рівняння

$$A_4^{(0)}z + \sum_{i=1}^{\min(s,4)} L_i(\varepsilon)\bar{\varphi}_{s+1-i} = 0$$

не має розв'язку.

Використавши результат, отриманий в [9, с. 339], досить просто можна встановити, що матриця  $A_4^{(0)}$  відносно операторів  $L_i(\varepsilon)$ ,  $i = \overline{1, 4}$ , має 2 жорданові ланцюжки векторів завдовжки 2 кожний, тобто  $s = 4$ . Тому фундаментальна система розв'язків системи рівнянь (1.3) складається з 8 її частинних лінійно незалежних розв'язків.

**3. Побудова розв'язків першої групи.** Для побудови розв'язків першої групи системи диференціальних рівнянь (1.3) використаємо метод діаграм Ньютона та результати, отримані в роботі [12].

Згідно з [12] розв'язки першої групи системи (1.3) шукатимемо у вигляді

$$y_n(x, \varepsilon) = \bar{u}(\varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-1} \int_0^x \theta(\varepsilon) d\tau\right), \quad (3.1)$$

де  $\bar{u}(\varepsilon)$ ,  $\theta(\varepsilon)$  — шукані 3-вимірний вектор і скалярна функція відповідно.

Підставивши вектор-функцію (3.1) в систему диференціальних рівнянь (1.3) і використавши результати роботи [12], отримаємо рівняння розгалуження для визначення функції  $\theta(\varepsilon)$ :

$$\theta^4(\varepsilon) + \sum_{k=5}^{+\infty} \theta^k(\varepsilon)L_{k0} + \sum_{s=1}^{+\infty} \varepsilon^s L_{0s} + \sum_{s=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon^s L_{ks} [\theta^k] = 0. \quad (3.2)$$

При цьому

$$\bar{u}(\varepsilon) = \varphi - \sum_{s=1}^{+\infty} \varepsilon^s H\tilde{L}_{0s}\varphi - \sum_{k=1}^{+\infty} \theta^k(x, \varepsilon) H\tilde{L}_{k0}\varphi - \sum_{s=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon^s H\tilde{L}_{ks} [\theta^k]\varphi. \quad (3.3)$$

Згідно з [12] коефіцієнти рівностей (3.2), (3.3) визначаються за формулами

$$L_{0s} = \sum_{j=1}^s (-1)^{j-1} \left( W_{H\Gamma}^{(s)}[0, 0, 0, 0, j]\varphi, \psi \right), \quad s = 1, 2, \dots, \quad (3.4)$$

$$L_{k0} = \sum_{j=1}^{\min(k,4)} \left( \frac{\partial^j P(0)}{j! \partial \theta^j} \sigma^{k+1-j}(H_1, H_2, H_3, H_4)\varphi, \psi \right), \quad k = 5, 6, \dots, \quad (3.5)$$

$$L_{ks} [\theta^k] = \sum_{4i_4+3i_3+2i_2+i_1=k} \sum_{j=0}^s (-1)^{i_4+i_3+i_2+i_1+j-1} \left( W_{H\Gamma}^{(s)}[i_4, i_3, i_2, i_1, j]\varphi, \psi \right), \quad (3.6)$$

$$k = 1, 2, \dots, \quad s = 1, 2, \dots,$$

$$\tilde{L}_{0s} = \sum_{j=1}^s (-1)^{j-1} W_{H\Gamma}^{(s)}[0, 0, 0, 0, j], \quad s = 1, 2, \dots, \quad (3.7)$$

$$\tilde{L}_{k0} = \sum_{j=1}^{\min(k,4)} \frac{\partial^j P(0)}{j! \partial \theta^j} \sigma^{k+1-j}(H_1, H_2, H_3, H_4), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \tilde{L}_{ks}[\theta^k] = & \sum_{4i_4+3i_3+2i_2+i_1=k} \sum_{j=0}^s (-1)^{i_4+i_3+i_2+i_1+j-1} W_{H\Gamma}^{(s)}[i_4, i_3, i_2, i_1, j], \\ & k = 1, 2, \dots, \quad s = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.9)$$

У рівностях (3.4)–(3.9) згідно з [9]  $\varphi, \psi$  — елементи нуль-простору матриць  $P(0) = A_0^{(0)}$  і  $P^*(0)$ , спряженої до матриці  $P(0)$ , відповідно;  $H$  — узагальнена обернена матриця до матриці  $P(0)$ ,

$$H_1 = -H \left( A_1^{(0)} + 2 \cdot 0 A_2^{(0)} + 3 \cdot 0^2 A_3^{(0)} + 4 \cdot 0^3 A_4^{(0)} \right),$$

$$H_2 = -H \left( A_2^{(0)} + 3 \cdot 0 A_3^{(0)} + 6 \cdot 0^2 A_4^{(0)} \right),$$

$$H_3 = -H \left( A_3^{(0)} + 4 \cdot 0 A_4^{(0)} \right),$$

$$H_4 = -H A_4^{(0)}, \quad \sigma^1(H_1, H_2, H_3, H_4) = \text{diag} \{1, 1, 1\},$$

$$\sigma^i(H_1, H_2, H_3, H_4) = \sum_{j=1}^{\min(i-1,4)} H_j \sigma^{i-j}(H_1, H_2, H_3, H_4), \quad i = 2, 3, \dots,$$

$\widetilde{W}_{H\Gamma}^{(s)}[i_4, i_3, i_2, i_1, i_0]$  — сума всіх можливих добутоків операторів  $H\Gamma_k^{(s_{ki})}$ ,  $k = \overline{0,4}$ , сума верхніх індексів яких  $s_{k_i}$  дорівнює  $s$  ( $s_{k_i} \in N \cup \{0\}$ ,  $k = \overline{1,4}$ ,  $s_{0i} \in N$ ), а вирази  $W_{H\Gamma}^{(s)}[i_4, i_3, i_2, i_1, j]$  відрізняються від виразів  $\widetilde{W}_{H\Gamma}^{(s)}[i_4, i_3, i_2, i_1, j]$  лише відсутністю в усіх їхніх доданках першого множника  $H$ .

Оскільки  $\sigma^i(H_1, H_2, H_3, H_4) = \text{diag}\{0, 0, 0\}$ ,  $i = 2, 3, \dots$ , то згідно з (3.5) маємо

$$L_{k0} = 0, \quad k = 5, 6, \dots \quad (3.10)$$

Оператори  $\Gamma_k^{(s)}$ ,  $k = \overline{0,4}$ , визначаються за формулами

$$\begin{aligned} \Gamma_0^{(s)} = & A_0^{(s)} + \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^i \sum_{\gamma=1}^{5-i} C_{i+\gamma-1}^{i+\gamma-j-1} D_{i-j} [0^{\gamma-1}] A_{i+\gamma-1}^{(s-i)} \frac{d^j}{dx^j} + \\ & + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^{4-i} D_i [0^j] A_{i+j}^{(s-i)}, \quad s = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_k^{(s)}(\theta) &= \theta^k \frac{\partial^k P^{(s)}(0)}{k! \partial \theta^k} + \\ &+ \sum_{i=1}^{4-k} \sum_{j=1}^i \sum_{\gamma=1}^{5-k-i} C_{\gamma+k-1}^k C_{i+\gamma+k-1}^{i+\gamma+k-j-1} D_{i-j} \left[ \theta^k \cdot 0^{\gamma-1} \right] A_{i+\gamma+k-1}^{(s-i)} \frac{d^j}{dx^j} + \\ &+ \sum_{i=1}^{4-k} \sum_{j=1}^{5-k-i} C_{j+k-1}^k D_i \left[ \theta^k \cdot 0^{j-1} \right] A_{i+j+k-1}^{(s-i)}, \quad k = \overline{1, 3}, \quad s = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\Gamma_4^{(s)}(\theta) = \theta^4 \frac{\partial^4 P^{(s)}(0)}{4! \partial \theta^4}, \quad s = 0, 1, \dots, \quad (3.13)$$

де  $P^{(s)}(\theta) = A_0^{(s)} + \theta A_1^{(s)} + \theta^2 A_2^{(s)} + \theta^3 A_3^{(s)} + \theta^4 A_4^{(s)}$ ,  $D_i[\theta^j]$  — сума всіх можливих добутоків  $i$  операторів диференціювання  $D = \frac{d}{dx}$ , які діють на вирази, розміщені праворуч від них, та  $j$  функцій  $\theta$ , причому останнім множником у всіх доданках має бути  $\theta$ ; також покладаємо, що  $D_0[\theta^0] = 1$ .

Зокрема, для системи (1.3) з урахуванням (1.4), (1.5) маємо

$$\varphi = \text{col}(0, 0, 1), \quad \psi = \text{col}(0, 0, 1),$$

$$H = \text{diag} \left\{ \frac{1}{b_1 \lambda^2}, \frac{1}{b_2 \lambda^2}, 0 \right\},$$

$$H_1 = \text{diag}\{0, 0, 0\}, \quad H_2 = \text{diag}\{0, 0, 0\},$$

$$H_3 = \text{diag}\{0, 0, 0\}, \quad H_4 = \text{diag}\{0, 0, 0\},$$

$$\sigma^2(H_1, H_2, H_3, H_4) = \text{diag}\{0, 0, 0\},$$

$$\sigma^3(H_1, H_2, H_3, H_4) = \text{diag}\{0, 0, 0\},$$

$$\sigma^4(H_1, H_2, H_3, H_4) = \text{diag}\{0, 0, 0\}.$$

Враховуючи (1.4), (1.5), (3.10), (3.11), (3.12), оператори  $\Gamma_0^{(s)}$ ,  $\Gamma_k^{(s)}(\theta)$ ,  $k = \overline{1, 4}$ , визначаємо за формулами

$$\Gamma_0^{(s)} = A_0^{(s)} + A_1^{(s-1)} \frac{d}{dx} + A_2^{(s-2)} \frac{d^2}{dx^2}, \quad s = 1, 2, \dots, \quad (3.14)$$

$$\Gamma_1^{(s)}(\theta) = \theta A_1^{(s)} + 2\theta A_2^{(s-1)} \frac{d}{dx} + 4\theta A_4^{(s-3)} \frac{d^3}{dx^3}, \quad s = 0, 1, \dots, \quad (3.15)$$

$$\Gamma_2^{(s)}(\theta) = \theta^2 A_2^{(s)} + 6\theta^2 A_4^{(s-2)} \frac{d^2}{dx^2}, \quad s = 0, 1, \dots, \quad (3.16)$$

$$\Gamma_3^{(s)}(\theta) = 4\theta^3 A_4^{(s-1)} \frac{d}{dx}, \quad s = 0, 1, \dots, \quad (3.17)$$

$$\Gamma_4^{(s)}(\theta) = \theta^4 A_4^{(s)}, \quad s = 0, 1, \dots \quad (3.18)$$



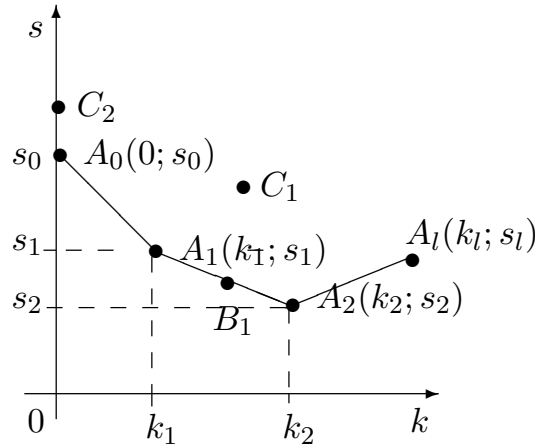


Рис. 1

Перейдемо тепер безпосередньо до побудови наближеного розв'язку рівняння (3.2). Шукатимемо його у вигляді

$$\theta(\varepsilon) = \theta_1\varepsilon^{m_1} + \theta_2\varepsilon^{m_2} + \dots + \theta_s\varepsilon^{m_s} + \dots, \tag{3.19}$$

де  $0 \leq m_1 < m_2 < \dots < m_s < \dots, s \in \mathbb{N}$ .

Невідомі сталі функції  $\theta_s$  і показники степенів  $m_s$  визначатимемо таким чином, щоб стала функція (3.19) задовольняла рівняння (3.2).

Підставимо (3.19) в рівняння (3.2) і врахуємо формулу (3.10). В результаті отримаємо

$$(\theta_1\varepsilon^{m_1} + \alpha(\varepsilon))^4 + \sum_{s=1}^{+\infty} \varepsilon^s L_{0s} + \sum_{s=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon^s L_{ks} \left[ (\theta_1\varepsilon^{m_1} + \alpha(\varepsilon))^k \right] = 0, \tag{3.20}$$

де  $\alpha(\varepsilon) = \theta_2\varepsilon^{m_2} + \dots + \theta_s\varepsilon^{m_s} + \dots$ .

Для визначення можливих значень  $\theta_1$  і  $m_1$  використаємо метод діаграм Ньютона [14, с. 46–53; 12].

Згідно з цим методом, щоб знайти  $\theta_1$  і  $m_1$ , кожному відмінному від нуля коефіцієнту  $L_{ks}[\theta]$  рівняння (3.20) поставимо у відповідність точку  $A(k; s)$  у прямокутній системі координат  $Oks$  (рис. 1). Навколо точки  $A_0(0; s_0)$ , яка знаходиться найближче до осі  $Ok$ , проти руху годинникової стрілки обертаємо пряму до моменту її зустрічі з деякою точкою  $A_1(k_1; s_1)$ . Потім пряму в тому ж самому напрямі обертаємо навколо точки  $A_1$  до моменту її зустрічі з точкою  $A_2(k_2; s_2)$ , і так далі. З'єднавши одержані точки, побудуємо ламану (рис. 1), яка називається першою діаграмою рівняння (3.20). Зауважимо, що нижче побудованої ламаної немає жодної точки з набору точок  $A(k; s)$ .

Зауважимо, що коли на осі  $Os$  немає точок, побудову діаграми потрібно починати з подібної точки прямої  $k = 1$ . Якщо ж і на прямій  $k = j, j < i$ , точки відсутні, то побудову діаграми потрібно починати з точок прямої  $k = i$ .

Розглянемо, наприклад, другу ланку  $A_1A_2$  діаграми (рис. 1). На ній, крім точок  $A_1, A_2$ , є також точка  $B_1$  набору точок  $A(k; s)$ . Відповідно до методу діаграм Ньютона [14, с. 48] число  $\rho = \frac{s_1 - s_2}{k_2 - k_1} = \frac{p}{q}$  називають коефіцієнтом нахилу ланки  $A_1A_2$ , де НСД  $(p, q) = 1$ . Число  $\rho$  дорівнює одному з можливих значень показника  $m_1$  в розвиненні (3.19). Тоді одне

зі значень невідомої функції  $\theta_1$  буде визначатися із визначального рівняння  $\sum' L_{ks}[\theta_1^k] = 0$  другої ланки  $A_1A_2$  діаграми (символом  $\sum'$  позначатимемо суму виразів  $L_{ks}[\theta_1^k]$  таких, що  $(k; s) \in A_1A_2$ ).

Якщо  $\theta_1$  — ненульовий простий корінь визначального рівняння ланки  $A_1A_2$ , то згідно з [14, с. 48; 12] цій ланці відповідатиме розв'язок рівняння (3.20), який зображається у вигляді розвинення

$$\theta(\varepsilon) = \theta_1 \varepsilon^\rho + \sum_{i \geq 2} \theta_i \varepsilon^{\frac{\rho+i-1}{q}}.$$

Якщо  $\theta_1$  — ненульовий кратний корінь визначального рівняння ланки  $A_1A_2$ , то згідно з [14, с. 49; 12] в розвиненні (3.19) зберігається тільки перший член, а для знаходження наступних членів потрібно використати нове рівняння розгалуження, зробивши в (3.2) заміну  $\theta(\varepsilon) = \theta_1 \varepsilon^\rho + \eta(\varepsilon)$ . Якщо відповідне визначальне рівняння матиме знову кратний корінь, то процедуру потрібно повторити, і так далі.

Аналогічні міркування потрібно провести для кожної ланки діаграми Ньютона. При цьому, як показано в [14, с. 46–52], для кожної ланки діаграми Ньютона можна побудувати таке число розв'язків рівняння розгалуження (3.2), яке дорівнює довжині проекції цієї ланки на вісь абсцис.

Перейдемо тепер до розв'язку нашої задачі. Спочатку визначимо всі можливі значення  $\theta_1$  і  $m_1$  з розвинення (3.19). Для цього побудуємо першу діаграму рівняння (3.2). З цією метою визначимо, які з коефіцієнтів  $L_{k0}$ ,  $L_{0s}$ ,  $L_{ks}[\theta^k]$  рівняння (3.2) будуть відмінні від нуля.

Використавши формули (3.4), (3.11), (3.12), (3.13), встановимо, що  $L_{01} = 0$ ,  $L_{02} = 0$ ,  $L_{03} = 0$ , а  $L_{04} = 1 + b_3 \lambda^2 \neq 0$ .

Також, використавши рівності (3.6), (3.11), (3.12), (3.13), дістанемо  $L_{11}[\theta] = 0$ ,  $L_{12}[\theta] = 0$ ,  $L_{21}[\theta^2] = 0$ ,  $L_{13}[\theta] = 0$ ,  $L_{22}[\theta^2] = 0$ ,  $L_{31}[\theta^3] = 0$ ,  $L_{40} = 1$ .

Враховуючи зроблені вище викладки, для визначення можливих значень  $\theta_1$  і  $m_1$  побудуємо першу діаграму рівняння розгалуження (3.20) (рис. 2). Ця діаграма складається з однієї ланки, коефіцієнт нахилу якої дорівнює 1, а проекція на вісь абсцис — 4. Тому, згідно з методом діаграм Ньютона, показник  $m_1 = 1$ , а функція  $\theta_1$  має 4 значення, кожному з яких відповідає цей показник. Значення функції  $\theta_1$  знаходимо з визначального рівняння

$$L_{04} + \theta_1^4 L_{40} = 0$$

або, враховуючи структуру  $L_{04}$ ,  $L_{40}$ ,

$$\theta_1^4 + 1 + b_3 \lambda^2 = 0. \quad (3.21)$$

З рівняння (3.21) отримаємо

$$\theta_1^{(j)} = \sqrt[4]{|1 + b_3 \lambda^2|} \left( \cos \frac{\arg(-1 - b_3 \lambda^2) + 2\pi(j-1)}{4} + i \sin \frac{\arg(-1 - b_3 \lambda^2) + 2\pi(j-1)}{4} \right), \quad j = \overline{1, 4}. \quad (3.22)$$

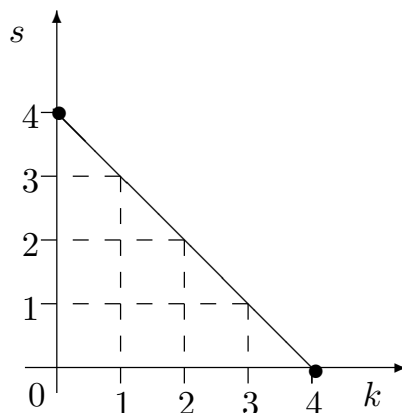


Рис. 2

Отже, згідно з [14] маємо 4 розв'язки рівняння (3.2):  $\theta^{(j)}(\varepsilon) = \theta_1^{(j)}\varepsilon + O(\varepsilon)$ ,  $j = \overline{1,4}$ .

Для того щоб знайти наближений розв'язок рівняння (3.20) з більшою точністю, визначимо можливі значення  $\theta_2$  і  $m_2$  з розвинень (3.19). Для цього зафіксуємо одне зі значень  $\theta_1^{(j)}$ ,  $j = \overline{1,4}$ , і в рівнянні (3.2) зробимо заміну  $\theta = \theta_1^{(j)}\varepsilon + \eta$ . В результаті отримаємо нове рівняння розгалуження

$$\left(\theta_1^{(j)}\varepsilon + \eta\right)^4 + \sum_{s=4}^{+\infty} \varepsilon^s L_{0s} + \sum_{s=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon^s L_{ks} \left[\left(\theta_1^{(j)}\varepsilon + \eta\right)^k\right] = 0. \quad (3.23)$$

Побудуємо діаграму рівняння (3.23), яку називають другою діаграмою рівняння (3.2). Для цього визначимо, які коефіцієнти  $L'_{ks}[\eta^k]$  нового рівняння розгалуження (3.23) будуть відмінні від нуля, де  $L'_{ks}[\eta^k]$  — коефіцієнти рівняння (3.23), які містять  $k$  сталих функцій  $\eta(\varepsilon)$ .

Спочатку встановимо, який перший із коефіцієнтів  $L'_{0s}$  буде відмінний від нуля. Відмітимо, що  $L'_{01} = 0$ ,  $L'_{02} = 0$ ,  $L'_{03} = 0$ , оскільки

$$L_{01} = 0, \quad L_{02} = 0, \quad L_{03} = 0,$$

$$L_{11} \left[\theta_1^{(j)}\varepsilon + \eta\right] = 0, \quad L_{12} \left[\theta_1^{(j)}\varepsilon + \eta\right] = 0, \quad L_{21} \left[\left(\theta_1^{(j)}\varepsilon + \eta\right)^2\right] = 0.$$

Зокрема, коефіцієнт  $L'_{03}$  складається з доданків, які містяться в коефіцієнтах  $L_{03}$ ,  $L_{12} \left[\theta_1^{(j)}\varepsilon + \eta\right]$ ,  $L_{21} \left[\left(\theta_1^{(j)}\varepsilon + \eta\right)^2\right]$ .

Коефіцієнт  $L'_{04}$  складається з доданків, які містяться в коефіцієнтах  $L_{04} = 1 + b_3\lambda^2$ ,  $L_{22} \left[\left(\theta_1^{(j)}\varepsilon + \eta\right)^2\right] = 0$ ,  $L_{13} \left[\theta_1^{(j)}\varepsilon + \eta\right] = 0$ ,  $L_{31} \left[\left(\theta_1^{(j)}\varepsilon + \eta\right)^3\right] = 0$  і  $\left(\theta_1^{(j)}\varepsilon + \eta\right)^4$ . Вилучивши їх, отримаємо  $L'_{04} = \left(\theta_1^{(j)}\varepsilon + \eta\right)^4 + 1 + b_3\lambda^2$ , а, врахувавши (3.22), дістанемо  $L'_{04} = 0$ .

Діючи аналогічним чином, встановимо, що  $L'_{05} = 0$ ,  $L'_{06} = 0$ ,  $L'_{07} = 0$ , оскільки

$$L_{05} = 0, \quad L_{14} \left[\theta_1^{(j)}\varepsilon + \eta\right] = 0, \quad L_{23} \left[\left(\theta_1^{(j)}\varepsilon + \eta\right)^2\right] = 0, \quad L_{32} \left[\left(\theta_1^{(j)}\varepsilon + \eta\right)^3\right] = 0,$$

$$\begin{aligned}
L_{41} \left[ \left( \theta_1^{(j)} \varepsilon + \eta \right)^4 \right] &= 0, & L_{06} &= 0, & L_{15} \left[ \theta_1^{(j)} \varepsilon + \eta \right] &= 0, & L_{24} \left[ \left( \theta_1^{(j)} \varepsilon + \eta \right)^2 \right] &= 0, \\
L_{33} \left[ \left( \theta_1^{(j)} \varepsilon + \eta \right)^3 \right] &= 0, & L_{42} \left[ \left( \theta_1^{(j)} \varepsilon + \eta \right)^4 \right] &= 0, & L_{51} \left[ \left( \theta_1^{(j)} \varepsilon + \eta \right)^5 \right] &= 0, & L_{07} &= 0, \\
L_{16} \left[ \theta_1^{(j)} \varepsilon + \eta \right] &= 0, & L_{25} \left[ \left( \theta_1^{(j)} \varepsilon + \eta \right)^2 \right] &= 0, & L_{34} \left[ \left( \theta_1^{(j)} \varepsilon + \eta \right)^3 \right] &= 0, \\
L_{43} \left[ \left( \theta_1^{(j)} \varepsilon + \eta \right)^4 \right] &= 0, & L_{52} \left[ \left( \theta_1^{(j)} \varepsilon + \eta \right)^5 \right] &= 0, & L_{61} \left[ \left( \theta_1^{(j)} \varepsilon + \eta \right)^6 \right] &= 0.
\end{aligned}$$

Коефіцієнт  $L'_{08}$  складається з доданків, які містяться в коефіцієнтах

$$\begin{aligned}
L_{08} = a_3 \neq 0, & \quad L_{17} \left[ \theta_1^{(j)} \varepsilon + \eta \right] = 0, & \quad L_{26} \left[ \left( \theta_1^{(j)} \varepsilon + \eta \right)^2 \right] &= \left( \theta_1^{(j)} \varepsilon + \eta \right)^2 Q_3, \\
L_{35} \left[ \left( \theta_1^{(j)} \varepsilon + \eta \right)^3 \right] &= 0, & \quad L_{44} \left[ \left( \theta_1^{(j)} \varepsilon + \eta \right)^4 \right] &= 0, & \quad L_{53} \left[ \left( \theta_1^{(j)} \varepsilon + \eta \right)^5 \right] &= 0, \\
L_{62} \left[ \left( \theta_1^{(j)} \varepsilon + \eta \right)^6 \right] &= 0, & \quad L_{71} \left[ \left( \theta_1^{(j)} \varepsilon + \eta \right)^7 \right] &= 0.
\end{aligned}$$

Вилучивши їх, отримаємо  $L'_{08} = a_3 + \left( \theta_1^{(j)} \right)^2 Q_3 \neq 0$ . Отже, на другій діаграмі рівняння (3.2) є точка  $A_0(0; 8)$ .

Потім встановимо, який перший із коефіцієнтів  $L'_{1s}[\eta]$  буде відмінним від нуля. Зауважимо, що  $L'_{11}[\eta] = 0$ ,  $L'_{12}[\eta] = 0$ , оскільки  $L_{11} \left[ \theta_1^{(j)} \varepsilon + \eta \right] = 0$ ,  $L_{12} \left[ \theta_1^{(j)} \varepsilon + \eta \right] = 0$ ,  $L_{21} \left[ \left( \theta_1^{(j)} \varepsilon + \eta \right)^2 \right] = 0$ .

Визначимо коефіцієнт  $L'_{13}[\eta]$ . Вираз  $L'_{13}[\eta]$  складається з доданків, які містяться в коефіцієнтах

$$L_{13} \left[ \theta_1^{(j)} \varepsilon + \eta \right] = 0, \quad L_{22} \left[ \left( \theta_1^{(j)} \varepsilon + \eta \right)^2 \right] = 0, \quad L_{31} \left[ \left( \theta_1^{(j)} \varepsilon + \eta \right)^3 \right] = 0$$

і доданка  $4 \left( \theta_1^{(j)} \right)^3 \eta$ . Вилучивши ці доданки, отримаємо  $L'_{13}[\eta] = 4 \left( \theta_1^{(j)} \right)^3 \eta$ . Отже, на другій діаграмі рівняння (3.2) є точка  $A_1(1; 3)$ .

Визначимо тепер, який перший із коефіцієнтів  $L'_{2s}[\eta^2]$  буде відмінним від нуля. Зауважимо, що коефіцієнт  $L'_{21}[\eta^2] = 0$ , оскільки  $L_{21} \left[ \left( \theta_1^{(j)} \varepsilon + \eta \right)^2 \right] = 0$ . Вираз  $L'_{22}[\eta^2]$  складається з доданків, які містяться в  $L_{22} \left[ \left( \theta_1^{(j)} \varepsilon + \eta \right)^2 \right]$ ,  $L_{31} \left[ \left( \theta_1^{(j)} \varepsilon + \eta \right)^3 \right]$  і доданка  $6 \left( \theta_1^{(j)} \right)^2 \eta^2$ . Тому  $L'_{22}[\eta^2] = 6 \left( \theta_1^{(j)} \right)^2 \eta^2$ .

Діючи аналогічно, встановимо, що  $L'_{31}[\eta^3] = 4\eta^3 \theta_1^{(j)}$ ,  $\eta^4 L'_{40} = \eta^4$ .

Отже, на другій діаграмі Ньютона рівняння (3.2) також є точки  $A_2(2; 2)$ ,  $A_3(3; 1)$ ,  $A_4(4; 0)$ .

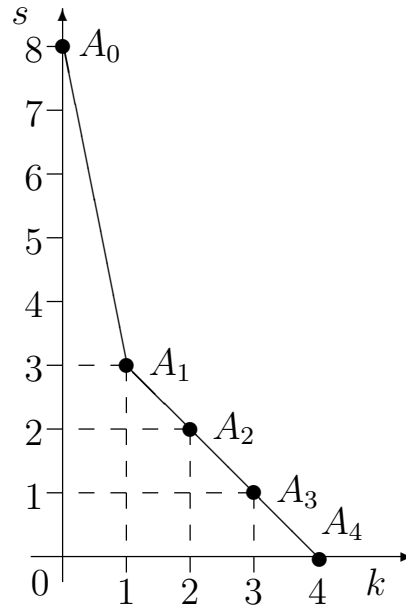


Рис. 3

У результаті побудуємо другу діаграму рівняння (3.2) (рис. 3). Ця діаграма складається з двох ланок  $A_0A_1$  і  $A_1A_4$ . Коefіцієнт нахилу ланки  $A_0A_1$  дорівнює 5, а ланки  $A_1A_4$  — 1. Оскільки для другої ланки  $A_1A_4$  цієї діаграми коefіцієнт нахилу дорівнює 1, що не більше від значення  $m_1 = 1$ , розглядатимемо тільки першу ланку  $A_0A_1$ , для якої  $m_2 = 5$ . Оскільки проекція ланки  $A_0A_1$  на вісь абсцис  $Ok$  дорівнює 1, то показнику  $m_2 = 5$  відповідатиме одне значення функції  $\theta_2$ . Значення  $\theta_2$  знаходитимемо з визначального рівняння

$$L'_{08} + L'_{13}[\theta_2] = 0$$

або, врахувавши структуру  $L'_{08}$ ,  $L'_{13}[\theta_2]$ , з рівняння

$$4(\theta_1^{(j)})^3 \theta_2 + a_3(\theta_1^{(j)})^2 Q_3 = 0. \quad (3.24)$$

З рівняння (3.24) дістанемо

$$\theta_2^{(j)} = -\frac{a_3 Q_3}{4\theta_1^{(j)}}, \quad j = \overline{1, 4}. \quad (3.25)$$

Згідно з [12, 14] маємо чотири наближені розв'язки рівняння (3.2):  $\theta^{(j)}(\varepsilon) = \theta_1^{(j)}\varepsilon + \theta_2^{(j)}\varepsilon^5 + O(\varepsilon^5)$ ,  $j = \overline{1, 4}$ , де значення  $\theta_1^{(j)}$ ,  $\theta_2^{(j)}$ ,  $j = \overline{1, 4}$ , визначаються за формулами (3.22), (3.25).

Для того щоб знайти наближений розв'язок рівняння (3.2) з більшою точністю, потрібно визначити можливі значення  $\theta_3$  і  $m_3$  з розвинень (3.19). Для цього в рівнянні (3.2) потрібно зробити заміну  $\theta = \theta_1^{(j)}\varepsilon + \theta_2^{(j)}\varepsilon^5 + \eta$  і з отриманого нового рівняння розгалуження, повторивши попередні міркування, визначити  $\theta_3$  і  $m_3$ . Використовуючи даний метод, можна побудувати наближений розв'язок рівняння (3.2) з будь-якою точністю.

Зауважимо, що оскільки  $\theta_1^{(j)}$ ,  $j = \overline{1, 4}$ , є простими коренями відповідного визначального рівняння (3.21), то згідно з [14, с. 49] розв'язки  $\theta^{(j)}(\varepsilon)$ ,  $j = \overline{1, 4}$ , рівняння (3.2) можна побудувати також у вигляді

$$\theta^{(j)}(\varepsilon) = \theta_1^{(j)}\varepsilon + \sum_{i=2}^{+\infty} \varepsilon^i \tilde{\theta}_i, \quad (3.26)$$

де невідомі коефіцієнти  $\tilde{\theta}_i$ ,  $i = 2, 3, \dots$ , визначатимемо так, щоб функції (3.26) задовольняли рівняння (3.2).

Знайшовши 4 наближені розв'язки  $\theta^{(j)}(\varepsilon) = \theta_1^{(j)}\varepsilon + \theta_2^{(j)}\varepsilon^5 + O(\varepsilon^5)$ ,  $j = \overline{1, 4}$ , рівняння (3.2), за формулою (3.3) визначимо відповідні значення векторів  $\bar{u}^{(j)}(\varepsilon)$ ,  $j = \overline{1, 4}$ , з точністю, наприклад,  $O(\varepsilon^6)$ . Для цього зробимо деякі додаткові обчислення. Використавши формули (3.7)–(3.9) та (3.14)–(3.18), знайдемо

$$\begin{aligned} & \tilde{L}_{0s}, \quad s = \overline{1, 6}, \quad \tilde{L}_{k0}, \quad k = \overline{1, 6}, \\ & \tilde{L}_{11} \left[ \theta_1^{(j)}\varepsilon + \theta_2^{(j)}\varepsilon^5 + O(\varepsilon^5) \right], \quad \tilde{L}_{12} \left[ \theta_1^{(j)}\varepsilon + \theta_2^{(j)}\varepsilon^5 + O(\varepsilon^5) \right], \\ & \tilde{L}_{21} \left[ \left( \theta_1^{(j)}\varepsilon + \theta_2^{(j)}\varepsilon^5 + O(\varepsilon^5) \right)^2 \right], \quad \tilde{L}_{13} \left[ \theta_1^{(j)}\varepsilon + \theta_2^{(j)}\varepsilon^5 + O(\varepsilon^5) \right], \\ & \tilde{L}_{22} \left[ \left( \theta_1^{(j)}\varepsilon + \theta_2^{(j)}\varepsilon^5 + O(\varepsilon^5) \right)^2 \right], \quad \tilde{L}_{31} \left[ \left( \theta_1^{(j)}\varepsilon + \theta_2^{(j)}\varepsilon^5 + O(\varepsilon^5) \right)^3 \right], \\ & \tilde{L}_{14} \left[ \theta_1^{(j)}\varepsilon + \theta_2^{(j)}\varepsilon^5 + O(\varepsilon^5) \right], \quad \tilde{L}_{23} \left[ \left( \theta_1^{(j)}\varepsilon + \theta_2^{(j)}\varepsilon^5 + O(\varepsilon^5) \right)^2 \right], \\ & \tilde{L}_{32} \left[ \left( \theta_1^{(j)}\varepsilon + \theta_2^{(j)}\varepsilon^5 + O(\varepsilon^5) \right)^3 \right], \quad \tilde{L}_{41} \left[ \left( \theta_1^{(j)}\varepsilon + \theta_2^{(j)}\varepsilon^5 + O(\varepsilon^5) \right)^4 \right], \\ & \tilde{L}_{15} \left[ \theta_1^{(j)}\varepsilon + \theta_2^{(j)}\varepsilon^5 + O(\varepsilon^5) \right], \quad \tilde{L}_{24} \left[ \left( \theta_1^{(j)}\varepsilon + \theta_2^{(j)}\varepsilon^5 + O(\varepsilon^5) \right)^2 \right], \\ & \tilde{L}_{33} \left[ \left( \theta_1^{(j)}\varepsilon + \theta_2^{(j)}\varepsilon^5 + O(\varepsilon^5) \right)^3 \right], \quad \tilde{L}_{42} \left[ \left( \theta_1^{(j)}\varepsilon + \theta_2^{(j)}\varepsilon^5 + O(\varepsilon^5) \right)^4 \right], \\ & \tilde{L}_{51} \left[ \left( \theta_1^{(j)}\varepsilon + \theta_2^{(j)}\varepsilon^5 + O(\varepsilon^5) \right)^5 \right]. \end{aligned}$$

Отже, в результаті отримаємо

$$\begin{aligned} & \tilde{L}_{01} = \text{diag}\{0, 0, 0\}, \quad \tilde{L}_{02} = \text{diag}\{0, 0, 0\}, \\ & \tilde{L}_{03} = \text{diag}\{0, 0, 0\}, \quad \tilde{L}_{04} = \Gamma_0^{(4)}, \\ & \tilde{L}_{05} = \text{diag}\{0, 0, 0\}, \quad \tilde{L}_{06} = \Gamma_0^{(6)}, \quad \tilde{L}_{10} = \text{diag}\{0, 0, 0\}, \\ & \tilde{L}_{20} = \text{diag}\{0, 0, 0\}, \quad \tilde{L}_{30} = \text{diag}\{0, 0, 0\}, \quad \tilde{L}_{40} = A_4^{(0)}, \\ & \tilde{L}_{k0} = \text{diag}\{0, 0, 0\}, \quad k = 5, 6, \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{L}_{11} \left[ \theta_1^{(j)} \varepsilon + \theta_2^{(j)} \varepsilon^5 + O(\varepsilon^5) \right] &= \text{diag}\{0, 0, 0\}, \\
\tilde{L}_{12} \left[ \theta_1^{(j)} \varepsilon + \theta_2^{(j)} \varepsilon^5 + O(\varepsilon^5) \right] &= \text{diag}\{0, 0, 0\}, \\
\tilde{L}_{21} \left[ \left( \theta_1^{(j)} \varepsilon + \theta_2^{(j)} \varepsilon^5 + O(\varepsilon^5) \right)^2 \right] &= \text{diag}\{0, 0, 0\}, \\
\tilde{L}_{13} \left[ \theta_1^{(j)} \varepsilon + \theta_2^{(j)} \varepsilon^5 + O(\varepsilon^5) \right] &= \Gamma_1^{(3)} \left( x, \theta_1^{(j)} \varepsilon + \theta_2^{(j)} \varepsilon^5 + O(\varepsilon^5) \right), \\
\tilde{L}_{22} \left[ \left( \theta_1^{(j)} \varepsilon + \theta_2^{(j)} \varepsilon^5 + O(\varepsilon^5) \right)^2 \right] &= \Gamma_2^{(2)} \left( x, \theta_1^{(j)} \varepsilon + \theta_2^{(j)} \varepsilon^5 + O(\varepsilon^5) \right), \\
\tilde{L}_{31} \left[ \left( \theta_1^{(j)} \varepsilon + \theta_2^{(j)} \varepsilon^5 + O(\varepsilon^5) \right)^3 \right] &= \Gamma_3^{(1)} \left( x, \theta_1^{(j)} \varepsilon + \theta_2^{(j)} \varepsilon^5 + O(\varepsilon^5) \right), \\
\tilde{L}_{14} \left[ \theta_1^{(j)} \varepsilon + \theta_2^{(j)} \varepsilon^5 + O(\varepsilon^5) \right] &= \text{diag}\{0, 0, 0\}, \\
\tilde{L}_{23} \left[ \left( \theta_1^{(j)} \varepsilon + \theta_2^{(j)} \varepsilon^5 + O(\varepsilon^5) \right)^2 \right] &= \text{diag}\{0, 0, 0\}, \\
\tilde{L}_{32} \left[ \left( \theta_1^{(j)} \varepsilon + \theta_2^{(j)} \varepsilon^5 + O(\varepsilon^5) \right)^3 \right] &= \text{diag}\{0, 0, 0\}, \\
\tilde{L}_{41} \left[ \left( \theta_1^{(j)} \varepsilon + \theta_2^{(j)} \varepsilon^5 + O(\varepsilon^5) \right)^4 \right] &= \text{diag}\{0, 0, 0\}, \\
\tilde{L}_{15} \left[ \theta_1^{(j)} \varepsilon + \theta_2^{(j)} \varepsilon^5 + O(\varepsilon^5) \right] &= \text{diag}\{0, 0, 0\}, \\
\tilde{L}_{24} \left[ \left( \theta_1^{(j)} \varepsilon + \theta_2^{(j)} \varepsilon^5 + O(\varepsilon^5) \right)^2 \right] &= \text{diag}\{0, 0, 0\}, \\
\tilde{L}_{33} \left[ \left( \theta_1^{(j)} \varepsilon + \theta_2^{(j)} \varepsilon^5 + O(\varepsilon^5) \right)^4 \right] &= \text{diag}\{0, 0, 0\}, \\
\tilde{L}_{42} \left[ \left( \theta_1^{(j)} \varepsilon + \theta_2^{(j)} \varepsilon^5 + O(\varepsilon^5) \right)^4 \right] &= \\
&= -\Gamma_3^{(1)} \left( x, \theta_1^{(j)} \varepsilon + \theta_2^{(j)} \varepsilon^5 + O(\varepsilon^5) \right) H\Gamma_1^{(3)} \left( x, \theta_1^{(j)} \varepsilon + \theta_2^{(j)} \varepsilon^5 + O(\varepsilon^5) \right) - \\
&\quad - \Gamma_1^{(3)} \left( x, \theta_1^{(j)} \varepsilon + \theta_2^{(j)} \varepsilon^5 + O(\varepsilon^5) \right) H\Gamma_3^{(1)} \left( x, \theta_1^{(j)} \varepsilon + \theta_2^{(j)} \varepsilon^5 + O(\varepsilon^5) \right) - \\
&\quad - \Gamma_2^{(2)} \left( x, \theta_1^{(j)} \varepsilon + \theta_2^{(j)} \varepsilon^5 + O(\varepsilon^5) \right) H\Gamma_2^{(2)} \left( x, \theta_1^{(j)} \varepsilon + \theta_2^{(j)} \varepsilon^5 + O(\varepsilon^5) \right), \\
\tilde{L}_{51} \left[ \left( \theta_1^{(j)} \varepsilon + \theta_2^{(j)} \varepsilon^5 + O(\varepsilon^5) \right)^5 \right] &= \text{diag}\{0, 0, 0\}.
\end{aligned}$$

У свою чергу

$$\begin{aligned}
H\tilde{L}_{04}\varphi &= \text{col}(0, 0, 0), & H\tilde{L}_{40}\varphi &= \text{col}(0, 0, 0), & H\tilde{L}_{06}\varphi &= \text{col}\left(0, \frac{iQ_2}{b_2\lambda^2}, 0\right), \\
H\tilde{L}_{22}\left[\left(\theta_1^{(j)}\varepsilon + \theta_2^{(j)}\varepsilon^5 + O(\varepsilon^5)\right)^2\right]\varphi &= \text{col}(0, 0, 0), \\
H\tilde{L}_{13}\left[\theta_1^{(j)}\varepsilon + \theta_2^{(j)}\varepsilon^5 + O(\varepsilon^5)\right]\varphi &= \text{col}(0, 0, 0), \\
H\tilde{L}_{31}\left[\left(\theta_1^{(j)}\varepsilon + \theta_2^{(j)}\varepsilon^5 + O(\varepsilon^5)\right)^3\right]\varphi &= \text{col}(0, 0, 0), \\
H\tilde{L}_{23}\left[\left(\theta_1^{(j)}\varepsilon + \theta_2^{(j)}\varepsilon^5 + O(\varepsilon^5)\right)^2\right]\varphi &= \text{col}(0, 0, 0), \\
H\tilde{L}_{15}\left[\theta_1^{(j)}\varepsilon + \theta_2^{(j)}\varepsilon^5 + O(\varepsilon^5)\right]\varphi &= \text{col}(0, 0, 0), \\
H\tilde{L}_{24}\left[\left(\theta_1^{(j)}\varepsilon + \theta_2^{(j)}\varepsilon^5 + O(\varepsilon^5)\right)^2\right]\varphi &= \text{col}(0, 0, 0), \\
H\tilde{L}_{33}\left[\left(\theta_1^{(j)}\varepsilon + \theta_2^{(j)}\varepsilon^5 + O(\varepsilon^5)\right)^3\right]\varphi &= \text{col}(0, 0, 0), \\
H\tilde{L}_{42}\left[\left(\theta_1^{(j)}\varepsilon + \theta_2^{(j)}\varepsilon^5 + O(\varepsilon^5)\right)^4\right]\varphi &= \text{col}(0, 0, 0), \\
H\tilde{L}_{41}\left[\left(\theta_1^{(j)}\varepsilon + \theta_2^{(j)}\varepsilon^5 + O(\varepsilon^5)\right)^2\right]\varphi &= \text{col}(0, 0, 0), \\
H\tilde{L}_{40}\varphi &= \text{col}(0, 0, 0).
\end{aligned}$$

Врахувавши зроблені вище викладки, одержимо

$$\bar{u}^{(j)}(\varepsilon) = \text{col}(0, 0, 1) - \varepsilon^6 \text{col}\left(0, \frac{iQ_2}{b_2\lambda^2}, 0\right) + O(\varepsilon^6), \quad j = \overline{1, 4}. \quad (3.27)$$

Отже, в результаті вдалося побудувати 4 розв'язки першої групи системи диференціальних рівнянь (1.3):

$$y_n^{(j)}(x, \varepsilon) = \bar{u}^{(j)} \exp\left(\varepsilon^{-1} \int_0^x \left(\theta_1^{(j)}\varepsilon + \theta_2^{(j)}\varepsilon^5 + O(\varepsilon^5)\right) d\tau\right), \quad j = \overline{1, 4}, \quad (3.28)$$

де сталі функції  $\theta_i^{(j)}$ ,  $i = \overline{1, 2}$ ,  $j = \overline{1, 4}$ , визначаються за формулами (3.22), (3.25), а вектори  $\bar{u}^{(j)}(\varepsilon)$ ,  $j = \overline{1, 4}$ , — за формулою (3.27).

**4. Побудова розв'язків другої групи.** Перейдемо тепер до побудови розв'язків другої групи системи диференціальних рівнянь (1.3). Результат, отриманий в роботі [12], стосується одновимірного випадку, коли гранична в'язка матриць  $P(\theta)$  має один кратний скінченний та нескінченний елементарні дільники, тому безпосередньо результати роботи [12] не можна застосувати для знаходження розв'язків другої групи системи (1.3). Проте ідеї,



викладені у цій роботі, а також у [11], можна використати, щоб побудувати розв'язки другої групи системи диференціальних рівнянь (1.3) у цьому багатовимірному випадку.

Тому, слідуючи [12], кожен із розв'язків другої групи, що відповідають 2 нескінченним елементарним дільникам граничної в'язки матриць  $P(0)$  кратності 4, шукатимемо у вигляді

$$y_n(x, \varepsilon) = \bar{v}(\varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-1} \int_0^x \frac{d\tau}{\xi(\varepsilon)}\right), \quad (4.1)$$

де  $\bar{v}(\varepsilon)$  — 3-вимірний вектор,  $\xi(\varepsilon)$  — скалярна стала функція, які потрібно визначити.

Підставивши вектор (4.1) у систему (1.3) і використавши формулу

$$\frac{d^k y_n}{dx^k} = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^i \varepsilon^{-j} C_k^i D_{i-j} \left[ \frac{1}{\xi^j} \right] \frac{d^{k-i} \bar{v}(\varepsilon)}{dx^{k-i}} \exp\left(\varepsilon^{-1} \int_0^x \frac{d\tau}{\xi(\varepsilon)}\right), \quad k = \overline{1, 3},$$

отриману в роботі [8], дістанемо

$$\sum_{k=0}^4 \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^i \varepsilon^{k-j} C_k^i D_{i-j} \left[ \frac{1}{\xi^j} \right] A_k(\varepsilon) \frac{d^{k-i} \bar{v}(\varepsilon)}{dx^{k-i}} = 0.$$

Повторивши міркування, викладені в роботі [12] для побудови розв'язків другої групи в одновимірному випадку, останню систему подамо у вигляді

$$A_4^{(0)} \bar{v}(\varepsilon) = \Phi(\xi, \varepsilon) \bar{v}(\varepsilon), \quad (4.2)$$

де

$$\Phi(\xi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^4 Q_k(\xi, \varepsilon),$$

а оператори  $Q_k(\xi, \varepsilon)$ ,  $k = \overline{0, 4}$ , з урахуванням рівності (1.5) визначаються за формулами

$$\begin{aligned} Q_0(\varepsilon) &= \text{diag}\{0, 0, 0\}, \\ Q_k(\xi, \varepsilon) &= \varepsilon^k \xi^4 \sum_{i=0}^k C_4^{4-i} D_{k-i} \left[ \frac{1}{\xi^{4-k}} \right] A_4^{(0)} \frac{d^i}{dx^i} + \\ &+ \xi^4 \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^i C_{i+4-k}^{j+4-k} D_j \left[ \frac{1}{\xi^{4-k}} \right] A_{i+4-k}(\varepsilon) \frac{d^{i-j}}{dx^{i-j}}, \quad k = \overline{1, 3}, \\ Q_4(\xi, \varepsilon) &= \varepsilon^k \xi^4 A_4^{(0)} \frac{d^4}{dx^4} + \xi^4 \sum_{i=0}^2 \varepsilon^i A_i(\varepsilon) \frac{d^i}{dx^i}. \end{aligned}$$

Так само оператори  $Q_k(\xi, \varepsilon)$ ,  $k = \overline{1, 4}$ , зображаються у вигляді

$$Q_k(\xi, \varepsilon) = \sum_{s \geq 0} \varepsilon^s Q_k^{(s)}(\xi), \quad k = \overline{0, 4},$$

де

$$Q_0^{(s)} = \text{diag}\{0, 0, 0\}, \quad s = 1, 2, \dots, \quad (4.3)$$

$$Q_k^{(s)}(\xi) = \xi^4 \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^i C_{i+4-k}^{j+4-k} D_j \left[ \frac{1}{\xi^{4-k}} \right] A_{i+4-k}^{(s-i)} \frac{d^{i-j}}{dx^{i-j}}, \quad k = \overline{1, 3}, \quad s = 0, 1, \dots, \quad (4.4)$$

$$Q_4^{(s)}(\xi) = \xi^4 \sum_{i=0}^4 A_i^{(s-i)} \frac{d^i}{dx^i}, \quad s = 0, 1, \dots \quad (4.5)$$

Система (4.2) сумісна тоді й тільки тоді, коли виконується умова

$$\left( \Phi(\xi, \varepsilon) \bar{v}(\varepsilon), \tilde{\psi}_j \right) = 0, \quad j = 1, 2, \quad (4.6)$$

де  $\tilde{\psi}_1 = \text{col}(1, 0, 0)$ ,  $\tilde{\psi}_2 = \text{col}(0, 1, 0)$  — базисні елементи нуль-простору матриці  $(A_4^{(0)})^*$ , спряженої до матриці  $A_4^{(0)}$ .

Слідуючи [11], введемо до розгляду оператор проектування  $\widehat{Q}$ , який відображає 3-вимірний векторний простір  $\widetilde{E}$  на його 2-вимірний підпростір  $\widetilde{E}_0$  таким чином:

$$\widehat{Q}b(x) = \left( b(x), \tilde{\psi}_1 \right) \tilde{\varphi}_1 + \left( b(x), \tilde{\psi}_2 \right) \tilde{\varphi}_2, \quad (4.7)$$

де  $\tilde{\varphi}_1 = \text{col}(1, 0, 0)$ ,  $\tilde{\varphi}_2 = \text{col}(0, 1, 0)$  — базисні елементи нуль-простору матриці  $A_4^{(0)}$ , а  $b(x)$  — довільний елемент простору  $\widetilde{E}$ .

Тоді умова сумісності (4.6) еквівалентна такій:

$$\widehat{Q}\Phi(\xi, \varepsilon) \bar{v}(\varepsilon) = \text{col}(0, 0)_{\langle \tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2 \rangle}. \quad (4.8)$$

При виконанні умови (4.8) вектор  $\bar{v}(\varepsilon)$  визначається за формулою

$$\bar{v}(\varepsilon) = -G\Phi(\xi, \varepsilon) \bar{v}(\varepsilon) + z,$$

де  $G$  — матриця узагальнено обернена до матриці  $A_4^{(0)}$ , а  $z = \text{col}(c_1, c_2)_{\langle \tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2 \rangle}$  — довільний вектор підпростору  $\widetilde{E}_0$ .

Рівність  $(\text{diag}\{1, 1, 1\} + G\Phi(\xi, \varepsilon)) \bar{v}(\varepsilon) = z$  формально задовольняється, якщо вектор  $\bar{v}(\varepsilon)$  подати у вигляді формального ряду

$$\bar{v}(\varepsilon) = z + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k (G\Phi(\xi, \varepsilon))^k z. \quad (4.9)$$

Тоді, врахувавши умову сумісності (4.8) і рівність (4.9), а також проаналізувавши міркування, викладені в роботі [12], для виведення рівняння розгалуження розв'язків другої групи можна зробити висновок, що результати, отримані для одновимірного випадку, можна легко переформулювати для даного двовимірного випадку.

Отже, шукана стала функція  $\xi(\varepsilon)$  повинна задовольняти рівняння розгалуження

$$\sum_{s=1}^{+\infty} \varepsilon^s N_{0s} + \sum_{k=1}^{+\infty} \xi^k N_{k0} + \sum_{s=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon^s N_{ks} \left[ \xi^k \right] = 0, \quad (4.10)$$

де коефіцієнти  $N_{0s}$ ,  $N_{k0}$ ,  $N_{ks}[\xi^k]$  визначаються за формулами

$$N_{0s} = \sum_{j=1}^s (-1)^{j-1} \widehat{Q} W_{GQ}^{(s)}[0, 0, 0, 0, j] z, \quad s = 1, 2, \dots, \quad (4.11)$$

$$N_{k0} = \sum_{j=1}^{\min(k,4)} \widehat{Q} A_{4-j}^{(0)} \sigma^{k+1-j}(G_1, G_2, G_3, G_4) z, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (4.12)$$

$$N_{ks}[\xi^k] = \sum_{4i_4+3i_3+2i_2+i_1=k} \sum_{j=0}^s (-1)^{i_4+i_3+i_2+i_1+j-1} \widehat{Q} \times W_{GQ}^{(s)}[i_4, i_3, i_2, i_1, j] z, \quad (4.13)$$

$$s = 1, 2, \dots, \quad k = 1, 2, \dots, \quad i_n \in N \cup \{0\}, \quad n = \overline{1,4}.$$

При цьому вектор  $\bar{v}(\varepsilon)$  зображається у вигляді

$$\bar{v}(\varepsilon) = z - \sum_{s=1}^{+\infty} \varepsilon^s G \widetilde{N}_{0s} z - \sum_{k=1}^{+\infty} \xi^k G \widetilde{N}_{k0} z - \sum_{s=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon^s G \widetilde{N}_{ks}[\xi^k] z. \quad (4.14)$$

Його коефіцієнти визначаються за формулами

$$\widetilde{N}_{0s} = \sum_{j=1}^s (-1)^{j-1} W_{GQ}^{(s)}[0, 0, 0, 0, j], \quad s = 1, 2, \dots, \quad (4.15)$$

$$\widetilde{N}_{k0} = \sum_{j=1}^{\min(k,4)} A_{4-j}^{(0)} \sigma^{k+1-j}(G_1, G_2, G_3, G_4), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (4.16)$$

$$\widetilde{N}_{ks}[\xi^k] = \sum_{4i_4+3i_3+2i_2+i_1=k} \sum_{j=0}^s (-1)^{i_4+i_3+i_2+i_1+j-1} W_{GQ}^{(s)}[i_4, i_3, i_2, i_1, j], \quad (4.17)$$

$$s = 1, 2, \dots, \quad k = 1, 2, \dots, \quad i_n \in N \cup \{0\}, \quad n = \overline{1,4}.$$

У формулах (4.11)–(4.13), (4.15)–(4.17)  $\widetilde{W}_{GQ}^{(s)}[i_4, i_3, i_2, i_1, i_0]$ , — сума всіх можливих добутків операторів  $GQ_k^{(s_{ki})}$ ,  $k = \overline{0,4}$ , сума верхніх індексів  $s_{ki}$  яких дорівнює  $s$  ( $s_{ki} \in N \cup \{0\}$ ),  $k = \overline{1,4}$ ,  $s_{0i} \in N$ ), а вирази  $W_{GQ}^{(s)}[i_4, i_3, i_2, i_1, j]$  відрізняються від виразів  $\widetilde{W}_{GQ}^{(s)}[i_4, i_3, i_2, i_1, j]$  лише відсутністю в усіх їхніх доданках першого множника  $G$ ,  $G_j = -GA_{4-j}^{(0)} = \text{diag}\{0, 0, 0\}$ ,  $j = \overline{1,4}$ .

Перейдемо тепер до побудови наближеного розв'язку рівняння (4.10).

Розв'язок рівняння (4.10) шукатимемо у вигляді

$$xi(\varepsilon) = \xi_1 \varepsilon^{m_1} + \xi_2 \varepsilon^{m_2} + \dots + \xi_s \varepsilon^{m_s} + \dots, \quad (4.18)$$

де  $0 \leq m_1 < m_2 < \dots < m_s < \dots$ ,  $s \in N$ .

Невідомі сталі функції  $\xi_s$  і показники степенів  $m_s$  визначатимемо таким чином, щоб функція (4.14) задовольняла рівняння (4.10).

Підставивши (4.14) в (4.10), отримаємо

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^{+\infty} \varepsilon^s N_{0s} + \sum_{k=1}^{+\infty} (\xi_1 \varepsilon^{m_1} + \alpha(\varepsilon))^k N_{k0} + \\ & + \sum_{s=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon^s N_{ks} \left[ (\xi_1 \varepsilon^{m_1} + \alpha(\varepsilon))^k \right] = \text{col}(0, 0)_{\langle \tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2 \rangle}, \end{aligned} \quad (4.19)$$

де  $\alpha(\varepsilon) = \xi_2 \varepsilon^{m_2} + \dots + \xi_s \varepsilon^{m_s} + \dots$ .

Для визначення можливих значень  $\xi_1$  і  $m_1$  використаємо метод діаграм Ньютона. Для цього побудуємо першу діаграму рівняння (4.19). З цією метою визначимо, які з коефіцієнтів  $N_{0s}$ ,  $N_{k0}$ ,  $N_{ks}[\xi^k]$  рівняння (4.10) будуть відмінні від нуль-вектора підпростору  $\tilde{E}_0$ .

Використавши формули (4.3) та (4.11), встановимо, що  $N_{0s} = \text{col}(0, 0)_{\langle \tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2 \rangle}$ ,  $s = 1, 2, \dots$ . Тому на першій діаграмі рівняння (4.19) не буде точок  $(0; s)$ ,  $s = 1, 2, \dots$ . Також неважко переконатися, враховуючи формули (1.5) і (4.12), що

$$N_{k0} = \text{col}(0, 0)_{\langle \tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2 \rangle}, \quad k = 1, 2, 3, 5, 6, \dots, \quad N_{40} = \text{col}(c_1 b_1 \lambda^2, c_2 b_2 \lambda^2)_{\langle \tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2 \rangle}.$$

Отже, на першій діаграмі Ньютона рівняння (4.19) є точка  $(4; 0)$ , а інші точки на осі абсцис відсутні.

Використавши формули (4.13), а також (4.3), (4.4), (1.5), можна досить просто встановити, що

$$N_{1s}[\xi] = \text{col}(0, 0)_{\langle \tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2 \rangle}, \quad s = 1, 2, \dots, \quad N_{21}[\xi^2] = \text{col}(0, 0)_{\langle \tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2 \rangle}.$$

Тому точок із відповідними координатами на діаграмі рівняння (4.10) не буде.

Обчислимо тепер коефіцієнт  $N_{22}[\xi^2]$  рівняння (4.10). Згідно з формулою (4.13) маємо

$$N_{22}[\xi^2] = \sum_{j=0}^2 (-1)^{j+1} \widehat{Q} W_{GQ}^{(2)}[0, 0, 0, 2, j] z + \sum_{j=0}^2 (-1)^j \widehat{Q} W_{GQ}^{(2)}[0, 0, 1, 0, j] z.$$

У сумах останньої рівності доданки при  $j = 2, 3$  будуть дорівнювати нуль-вектору підпростору  $\tilde{E}_0$ , оскільки вони міститимуть оператори  $Q_0^{(s)} = \text{diag}\{0, 0, 0\}$ ,  $s = 1, 2$ . Тому

$$N_{22}[\xi^2] = -\widehat{Q} \left( Q_1^{(1)}(\xi) G Q_1^{(1)}(\xi) + Q_1^{(0)}(\xi) G Q_1^{(2)}(\xi) + Q_1^{(2)}(\xi) G Q_1^{(0)}(\xi) \right) z + \widehat{Q} Q_2^{(2)}(\xi) z.$$

Використавши формули (4.4) і (1.5), матимемо  $N_{22}[\xi^2] = \widehat{Q} \xi^2 z$  або, згідно з (4.7),  $N_{22}[\xi^2] = \xi^2 z \neq \text{col}(0, 0)_{\langle \tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2 \rangle}$ .

Отже, на діаграмі рівняння (4.10) також є точка  $(2; 2)$ . Провівши аналогічні міркування, можна встановити, що  $N_{31}[\xi^3] = \text{col}(0, 0)_{\langle \tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2 \rangle}$ .

Враховувши зроблені вище викладки, побудуємо першу діаграму рівняння (4.10) (рис. 4). Цю діаграму було побудовано, починаючи з точок прямої  $k = 2$ . Діаграма складається з однієї ланки, коефіцієнт нахилу якої 1, а проєкція на вісь абсцис 2. Тому, згідно з методом діаграм Ньютона, показник  $m_1$  дорівнює 1, а значення функції  $\xi_1$ , яким відповідає показник  $m_1 = 1$ , знаходиться з визначального рівняння

$$N_{22}[\xi_1^2] + \xi_1^4 N_{40} = \text{col}(0, 0)_{\langle \tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2 \rangle}.$$

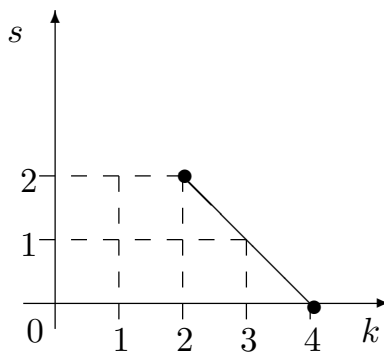


Рис. 4

Тому, враховуючи  $N_{22}[\xi_1^2] = \xi_1^2 z$ ,  $N_{40} = \text{col}(c_1 b_1 \lambda^2, c_2 b_2 \lambda^2)_{\langle \tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2 \rangle}$ , маємо

$$\xi_1^2 z + \xi_1^4 \text{col}(c_1 b_1 \lambda^2, c_2 b_2 \lambda^2)_{\langle \tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2 \rangle} = \text{col}(0, 0)_{\langle \tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2 \rangle}$$

або в базисі  $\langle \tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2 \rangle$  підпростору  $\tilde{E}_0$  одержуємо

$$\text{diag}\{1 + b_1 \lambda^2 \xi_1^2; 1 + b_2 \lambda^2 \xi_1^2\}_{\langle \tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2 \rangle} z = \text{col}(0, 0)_{\langle \tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2 \rangle}. \quad (4.20)$$

Система рівнянь (4.20) має ненульові розв'язки, якщо визначник матриці системи дорівнює нулю, тому значення  $\xi_1^2$  визначимо з умови

$$\det\left(\text{diag}\{1 + b_1 \lambda^2 \xi_1^2; 1 + b_2 \lambda^2 \xi_1^2\}_{\langle \tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2 \rangle}\right) = 0.$$

В результаті отримуємо, що  $\xi_1^2 = -\frac{1}{b_1 \lambda^2}$  або  $\xi_1^2 = -\frac{1}{b_2 \lambda^2}$ .

З останніх рівнянь одержуємо

$$\xi_1^{(j)} = \sqrt{\left|\frac{1}{b_1 \lambda^2}\right|} \left( \cos \frac{\arg\left(-\frac{1}{b_1 \lambda^2}\right) + 2\pi(j-1)}{2} + \right. \\ \left. + i \sin \frac{\arg\left(-\frac{1}{b_1 \lambda^2}\right) + 2\pi(j-1)}{2} \right), \quad j = 1, 2, \quad (4.21)$$

$$\xi_1^{(j)} = \sqrt{\left|\frac{1}{b_2 \lambda^2}\right|} \left( \cos \frac{\arg\left(-\frac{1}{b_2 \lambda^2}\right) + 2\pi(j-3)}{2} + \right. \\ \left. + i \sin \frac{\arg\left(-\frac{1}{b_2 \lambda^2}\right) + 2\pi(j-3)}{2} \right), \quad j = 3, 4, \quad (4.22)$$

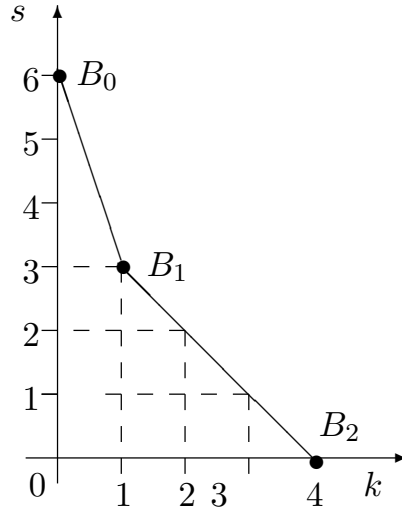


Рис. 5

При цьому, якщо  $b_1 \neq b_2$ , то значенням  $\xi_1^{(j)}$ ,  $j = 1, 2$ , які визначаються за формулою (4.21), відповідає вектор  $z_1 = \text{col}(1, 0)_{\langle \tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2 \rangle} = \tilde{\varphi}_1$ , а значенням  $\xi_1^{(j)}$ ,  $j = 3, 4$ , які визначаються за формулою (4.22), — вектор  $z_2 = \text{col}(0, 1)_{\langle \tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2 \rangle} = \tilde{\varphi}_2$ . Якщо ж  $b_1 = b_2$ , то серед значень  $\xi_1^{(j)}$ , які визначаються за допомогою формул (4.21), (4.22), є по два кратних значення, тому їм відповідає довільний вектор  $z = \text{col}(c_1, c_2)_{\langle \tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2 \rangle}$  підпростору  $\tilde{E}_0$ . Далі, для простоти викладок для значень  $\xi_1^{(1)} = \xi_1^{(3)}$  покладемо вектор  $z = z_1 = \text{col}(1, 0)_{\langle \tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2 \rangle}$ , а для значень  $\xi_1^{(2)} = \xi_1^{(4)}$  покладемо  $z = z_2 = \text{col}(0, 1)_{\langle \tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2 \rangle}$ .

Отже, згідно з [14] маємо 4 наближені розв’язки рівняння (4.10):  $\xi^{(j)}(\varepsilon) = \xi_1^{(j)}\varepsilon + O(\varepsilon)$ ,  $j = \overline{1, 4}$ .

Для того щоб знайти наближений розв’язок рівняння (4.10) з більшою точністю, потрібно визначити можливі значення  $\xi_2$  і  $m_2$  з розвинень (4.18). Для цього потрібно зафіксувати одне зі значень  $\xi_1^{(j)}$ ,  $j = \overline{1, 4}$ , і в рівнянні (4.10) зробити заміну  $\xi = \eta + \xi_1^{(j)}\varepsilon$ . В результаті отримаємо нове рівняння розгалуження

$$\left(\eta + \xi_1^{(j)}\varepsilon\right)^4 \text{col}(c_1 b_1 \lambda^2, c_2 b_2 \lambda^2)_{\langle \tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2 \rangle} + \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{s=1}^{+\infty} \varepsilon^s N_{ks} \left[ \left(\eta + \xi_1^{(j)}\varepsilon\right)^k \right] = 0. \quad (4.23)$$

З рівняння (4.23) можна визначити значення  $\xi_2$  і  $m_2$ . Для цього потрібно повторити міркування, зроблені в п. 3 при побудові розв’язків першої групи. В результаті встановимо, що на другій діаграмі Ньютона рівняння (4.10) є точки  $B_0(0; 6)$ ,  $B_1(1; 3)$ ,  $B_2(4; 0)$  (рис. 5). Ця діаграма складається з двох ланок  $B_0B_1$ ,  $B_1B_2$ . Зрозуміло, що нам підходить ланка  $B_0B_1$ , коефіцієнт нахилу якої дорівнює 3. Тому  $m_2 = 3$ , а значення  $\xi_2$  будемо знаходити з визначального рівняння

$$\begin{aligned} & \left(\xi_1^{(j)}\right)^3 \text{col}(c_1 iP_1, c_2 iP_2)_{\langle \tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2 \rangle} + 2\xi_2 \xi_1^{(j)} \text{col}(c_1, c_2)_{\langle \tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2 \rangle} + \\ & + 4\xi_2 \left(\xi_1^{(j)}\right)^3 \text{col}(c_1 b_1 \lambda^2, c_2 b_2 \lambda^2)_{\langle \tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2 \rangle} = \text{col}(0, 0)_{\langle \tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2 \rangle}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Розв'яжемо рівняння (4.24) залежно від значень коефіцієнтів  $b_1, b_2$ . Розглянемо спочатку випадок, коли  $b_1 \neq b_2$ . Тоді, якщо в рівнянні (4.24)  $j = 1, 2$ , тобто функція  $\xi_1^{(j)}$  визначається за формулою (4.21), то в рівності (4.24)  $c_1 = 1, c_2 = 0$ . Тому з рівняння (4.24) отримаємо

$$\xi_2^{(j)} = -\frac{iP_1(\xi_1^{(j)})^2}{2 + 4(\xi_1^{(j)})^2 b_1 \lambda^2}, \quad j = 1, 2.$$

Врахувавши формулу (4.21), одержимо

$$\xi_2^{(j)} = -\frac{iP_1}{2b_1 \lambda^2}, \quad j = 1, 2. \quad (4.25)$$

Якщо ж у рівнянні (4.24)  $j = 3, 4$ , тобто функція  $\xi_1^{(j)}$  визначається за формулою (4.22), то в рівності (4.24)  $c_1 = 0, c_2 = 1$ . Тому

$$\xi_2^{(j)} = -\frac{iP_2(\xi_1^{(j)})^2}{2 + 4(\xi_1^{(j)})^2 b_2 \lambda^2}, \quad j = 3, 4,$$

або, з урахуванням формули (4.22),

$$\xi_2^{(j)} = -\frac{iP_2}{2b_2 \lambda^2}, \quad j = 3, 4. \quad (4.26)$$

Якщо в рівнянні (4.24)  $b_1 = b_2$ , то, провівши аналогічні міркування, встановимо, що

$$\xi_2^{(j)} = -\frac{iP_1}{2b_1 \lambda^2}, \quad j = 1, 3, \quad \xi_2^{(j)} = -\frac{iP_2}{2b_1 \lambda^2}, \quad j = 2, 4. \quad (4.27)$$

Отже, діючи таким чином, можна побудувати наближений розв'язок рівняння (4.10) з будь-якою точністю, при цьому не важливо яким чином між собою співвідносяться коефіцієнти  $b_1$  і  $b_2$  системи (1.3).

Зауважимо також, що додаткова умова  $b_1 \neq b_2$  гарантує, що всі корені  $\xi_1^{(j)}$ ,  $j = \overline{1, 4}$ , які визначаються за формулами (4.20), (4.21), є простими, і надає можливість побудувати наближений розв'язок рівняння (4.10) за натуральними степенями малого параметра  $\varepsilon$  у вигляді формального ряду

$$\xi(\varepsilon) = \xi_1^{(j)} \varepsilon + \sum_{i \geq 2} \varepsilon^i \tilde{\xi}_i.$$

Знайшовши 4 наближені розв'язки  $\xi^{(j)}(\varepsilon) = \xi_1^{(j)} \varepsilon + \xi_2^{(j)} \varepsilon^3 + O(\varepsilon^3)$ ,  $j = \overline{1, 4}$ , рівняння (4.10), за формулою (4.14) визначимо відповідні значення векторів  $\bar{v}^{(j)}(\varepsilon)$ ,  $j = \overline{1, 4}$ , з точністю, наприклад,  $O(\varepsilon^4)$ . Для цього зробимо деякі додаткові обчислення. Використавши формули (4.15)–(4.17), отримаємо

$$\tilde{N}_{0s} = \text{diag}\{0, 0, 0\}, \quad s = 1, 2, \dots, \quad \tilde{N}_{k0} = \text{diag}\{0, 0, 0\}, \quad k \in N \setminus \{4\},$$

$$\tilde{N}_{40} = A_0^{(0)}, \quad \tilde{N}_{1s}[\xi] = \text{diag}\{0, 0, 0\}, \quad s = 1, 2, \dots,$$

$$\tilde{N}_{31}[\xi^3] = \text{diag}\{0, 0, 0\}, \quad \tilde{N}_{22}[\xi^2] = \xi^2 A_2^{(2)}.$$

Тоді будемо мати  $G\tilde{N}_{40} = GA_0^{(0)} = \text{diag}\{0, 0, 0\}$ ,  $G\tilde{N}_{22}[\xi^2] = \xi^2 GA_2^{(2)} = \text{diag}\{0, 0, -2\xi^2\}$ . Отже, незалежно від співвідношень між коефіцієнтами  $b_1$  і  $b_2$ , остаточно отримаємо

$$\begin{aligned}\bar{v}^{(j)}(\varepsilon) &= \text{col}(1, 0, 0) + O(\varepsilon^4), \quad j = \overline{1, 2}, \\ \bar{v}^{(j)}(\varepsilon) &= \text{col}(0, 1, 0) + O(\varepsilon^4), \quad j = \overline{3, 4}.\end{aligned}\quad (4.28)$$

В результаті вдалося побудувати 4 формальні розв'язки другої групи системи диференціальних рівнянь (1.3):

$$y_n^{(j)}(x, \varepsilon) = \bar{v}^{(j)}(\varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-1} \int_0^x \frac{d\tau}{\xi_1^{(j)} \varepsilon + \xi_1^{(j)} \varepsilon^3 + O(\varepsilon^3)}\right), \quad j = \overline{1, 4}, \quad (4.29)$$

де сталі функції  $\xi_k^{(j)}$ ,  $k = 1, 2$ ,  $j = \overline{1, 4}$ , визначаються за формулами (4.21), (4.22), (4.25), (4.26), якщо  $b_1 \neq b_2$ , а у випадку, коли  $b_1 = b_2$  — за формулами (4.21), (4.22), (4.27); вектори  $v^{(j)}(\varepsilon)$ ,  $j = \overline{1, 4}$ , визначаються за формулою (4.28).

Використовуючи методи робіт [14, 8–13], можна переконатися в тому, що побудовані в пп. 3 і 4 розв'язки першої та другої груп є лінійно незалежними при умові  $b_1 \neq b_2$ . Якщо ж  $b_1 = b_2$ , то серед коренів рівнянь (4.20), (4.21) є по два кратних, тому в такому випадку потрібно додатково обчислити ще кілька коефіцієнтів розвинень (4.18).

Справедливі такі теореми.

**Теорема 1.** Якщо коефіцієнти  $P_k$ ,  $Q_k$ ,  $k = \overline{1, 3}$ ,  $-a_1$ ,  $-a_2$ ,  $a_3$ ,  $-b_1$ ,  $-b_2$ ,  $b_3$ ,  $d$  системи (1.3) — додатні числа і  $b_1 \neq b_2$ , то фундаментальна система розв'язків системи (1.3) складається з 4 формальних розв'язків першої, які зображаються у вигляді (3.28) та 4 формальних розв'язків другої групи, які зображаються у вигляді (4.29). При цьому вектори  $\bar{u}^{(j)}$ ,  $j = \overline{1, 4}$ ,  $\bar{v}^{(j)}$ ,  $j = \overline{1, 4}$ , з рівностей (3.28), (4.29) визначаються за формулами (3.27), (4.28), а сталі функції  $\theta_k^{(j)}$ ,  $\xi_k^{(j)}$ ,  $k = 1, 2$ ,  $j = \overline{1, 4}$ , з цих рівностей за формулами (3.22), (3.25), (4.21), (4.22), (4.25), (4.26).

**Теорема 2.** Якщо коефіцієнти  $P_k$ ,  $Q_k$ ,  $k = \overline{1, 3}$ ,  $-a_1$ ,  $-a_2$ ,  $a_3$ ,  $-b_1$ ,  $-b_2$ ,  $b_3$ ,  $d$  системи (1.3) додатні числа і  $b_1 = b_2$ , то фундаментальна система розв'язків системи (1.3) складається з 4 формальних розв'язків першої, які зображаються у вигляді (3.28) та 4 формальних розв'язків другої групи, які зображаються у вигляді (4.29). При цьому вектори  $\bar{u}^{(j)}$ ,  $j = \overline{1, 4}$ ,  $\bar{v}^{(j)}$ ,  $j = \overline{1, 4}$ , з рівностей (3.28), (4.29) визначаються за формулами (3.27), (4.28), а сталі функції  $\theta_k^{(j)}$ ,  $\xi_k^{(j)}$ ,  $k = 1, 2$ ,  $j = \overline{1, 4}$ , з цих рівностей за формулами (3.22), (3.25), (4.21), (4.22), (4.27).

**5. Асимптотичні властивості формальних розв'язків.** Використовуючи роботи [8, 10, 14], можна переконатися, що побудовані в пп. 3, 4 формальні розв'язки (3.28) і (4.29) першої та другої груп є асимптотичними розвиненнями точних розв'язків системи (1.3) при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

При цьому справджуються такі теореми.

**Теорема 3.** Якщо виконуються умови теореми 1, то на відрізку  $\left[0; \frac{n\ell}{R}\right]$  для формальних розв'язків  $y_n^{(k)}(x, \varepsilon)$ ,  $k = \overline{1, 4}$ , першої групи системи (1.3), які визначаються за формулою (3.28), та формальних розв'язків  $y_n^{(s)}(x, \varepsilon)$ ,  $s = \overline{1, 4}$ , другої групи системи (1.3), які визначаються за формулою (4.29), існують такі точні розв'язки  $\tilde{y}_n^{(k)}(x, \varepsilon)$ ,  $k = \overline{1, 4}$ ,  $\tilde{y}_n^{(s)}(x, \varepsilon)$ ,



$s = \overline{1, 4}$ , цієї системи, для яких ці формальні розв'язки є асимптотичними розвиненнями при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Для достатньо малого  $\varepsilon$  справедливі такі нерівності:

$$\left\| y_n^{(k)}(x, \varepsilon) - \tilde{y}_n^{(k)}(x, \varepsilon) \right\| \leq c_1 \varepsilon^4, \quad k = \overline{1, 4}, \quad (5.1)$$

для розв'язків першої групи і

$$\left\| y_n^{(s)}(x, \varepsilon) - \tilde{y}_n^{(s)}(x, \varepsilon) \right\| \leq c_2 \varepsilon^2 \sup_{[0; \frac{nl}{R}]} \exp \left( \varepsilon^{-1} \int_{x_0}^x \frac{\operatorname{Re}(\xi_1^{(s)})}{|\xi_1^{(s)} + \xi_2^{(s)} \varepsilon^2|} d\tau \right), \quad s = \overline{1, 4}, \quad (5.2)$$

для розв'язків другої групи.

У нерівностях (5.1), (5.2)  $c_1, c_2$  — сталі, які не залежать від  $\varepsilon, n$  — натуральний параметр, значення  $\xi_1^{(s)}, \xi_2^{(s)}$ ,  $s = \overline{1, 4}$ , визначаються за формулами (4.21), (4.22), (4.25), (4.26).

**Теорема 4.** Якщо виконуються умови теореми 2, то на відрізку  $\left[0; \frac{nl}{R}\right]$  для формальних розв'язків  $y_n^{(k)}(x, \varepsilon)$ ,  $k = \overline{1, 4}$ , першої групи системи (1.3), які визначаються за формулою (3.28), та формальних розв'язків  $y_n^{(s)}(x, \varepsilon)$ ,  $s = \overline{1, 4}$ , другої групи системи (1.3), які визначаються за формулою (4.29), існують такі точні розв'язки  $\tilde{y}_n^{(k)}(x, \varepsilon)$ ,  $k = \overline{1, 4}$ ,  $\tilde{y}_n^{(s)}(x, \varepsilon)$ ,  $s = \overline{1, 4}$ , цієї системи, для яких ці формальні розв'язки є асимптотичними розвиненнями при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Для достатньо малого  $\varepsilon$  справедливі такі нерівності:

$$\left\| y_n^{(k)}(x, \varepsilon) - \tilde{y}_n^{(k)}(x, \varepsilon) \right\| \leq c_1 \varepsilon^4, \quad k = \overline{1, 4}, \quad (5.3)$$

для розв'язків першої групи і

$$\left\| y_n^{(s)}(x, \varepsilon) - \tilde{y}_n^{(s)}(x, \varepsilon) \right\| \leq c_2 \varepsilon^2 \sup_{[0; \frac{nl}{R}]} \exp \left( \varepsilon^{-1} \int_{x_0}^x \frac{\operatorname{Re}(\xi_1^{(s)})}{|\xi_1^{(s)} + \xi_2^{(s)} \varepsilon^2|} d\tau \right), \quad s = \overline{1, 4}, \quad (5.4)$$

для розв'язків другої групи.

У нерівностях (5.3), (5.4)  $c_1, c_2$  — сталі, які не залежить від  $\varepsilon, n$  — натуральний параметр, значення  $\xi_1^{(s)}, \xi_2^{(s)}$ ,  $s = \overline{1, 4}$ , визначаються за формулами (4.21), (4.22), (4.27).

**Зауваження.** У наведених оцінках фігурують експоненціальні множники, які будуть експоненціально малими, якщо відповідним чином вибирати нижню межу інтегрування в інтегралі, що міститься під знаком експоненти: якщо  $\operatorname{Re}(\xi_1^{(s)}) < 0$ , то покладаємо  $x_0 = 0$ , якщо ж  $\operatorname{Re}(\xi_1^{(s)}) > 0$ , то покладаємо  $x_0 = nl/R$ .

## Література

1. П. М. Огибалов, *Вопросы динамики и устойчивости оболочек*, Изд-во Моск. гос. ун-та, Москва (1963).
2. F. Pellicano, M. Amabili, *Stability and vibration of empty and fluid-filled circular cylindrical shells under static and periodic axial loads*, Int. J. Solids Structures, № 40, 3229–3252 (2003).
3. A. Ghorbanpour Arani, S. Golabi, A. Loghman, H. Daneshi, *Investigating elastic stability of cylindrical shell with an elastic core under axial compression by energy method*, J. Mech. Sci. Technol., № 21, 983–996 (2007).

4. Abdullah Heydaroglu Sofiyev, Mehmet Avcar, *The stability of cylindrical shells containing an FGM layer subjected to axial load on the Pasternak foundation*, Engineering, № 2, 228–236 (2010).
5. М. Л. Расулов, *Асимптотическое изображение фундаментальной матрицы решений одной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с двумя параметрами*, Дифференц. уравнения (1983).
6. G. D. Birkhoff, *On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter*, Trans. Amer. Math. Soc., **9**, 219–231 (1908).
7. Я. Д. Тамаркин, *О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды*, Тип. М. П. Фроловой, Петроград (1917).
8. С. П. Пафик, В. П. Яковець, *Побудова асимптотики розв'язків лінійних сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь вищих порядків з виродженнями*, Наук. часоп. Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. науки, Вип. 13, 201–217 (2012).
9. С. П. Пафик, В. П. Яковець, *Про структуру загального розв'язку та умови розв'язності задачі Коші для вироджених лінійних систем диференціальних рівнянь вищих порядків*, Укр. мат. журн., **65**, № 2, 296–306 (2013); **English translation:** Ukr. Math. J., **65**, No. 2, 328–340 (2013).
10. С. П. Пафик, *Асимптотика загального розв'язку лінійних сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь вищих порядків з виродженнями у випадку кратного спектра граничної в'язки матриць*, Динам. системи, **3(31)**, № 3-4, 255–274 (2014).
11. С. П. Пафик, В. П. Яковець, *Асимптотика загального розв'язку лінійних сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь вищих порядків з виродженнями у випадку кратного спектра граничної в'язки матриць*, Нелін. коливання, **17**, № 3, 379–398 (2014); **English translation:** J. Math. Sci., № 212, 305–325 (2016).
12. С. П. Пафик, В. П. Яковець, *Асимптотичний аналіз загального розв'язку лінійної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь вищих порядків із виродженнями*, Нелін. коливання, **18**, № 1, 79–101 (2015); **English translation:** J. Math. Sci. (N.Y.), № 215, 350–375 (2016).
13. S. P. Pafyk, *Asymptotics of the general solution of a linear singularly perturbed system of higher-order differential equations with degenerations*, Нелін. коливання, **21**, № 3, 368–396; J. Math. Sci. (N.Y.), № 243, 433–466 (2019).
14. А. М. Самойленко, М. І. Шкіль, В. П. Яковець, *Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями*, Вища шк., Київ (2000).

Одержано 06.08.20,  
після доопрацювання — 23.08.20