УДК 517.988.5+517.988.63

НЕЛІНІЙНІ АВТОНОМНІ РІЗНИЦЕВІ ОПЕРАТОРИ У ПРОСТОРІ ОБМЕЖЕНИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ, ЯКІ Є C^1-ДИФЕОМОРФІЗМАМИ

В. Ю. Слюсарчук

Нац. ун-т вод. госп-ва та природокористування
вул. Соборна, 11, Рівне, 33000, Україна
e-mail: V.E.Slyusarchuk@gmail.com

The necessary and sufficient conditions for the invertibility of differentiable nonlinear autonomous difference operators in the space of bounded two-sided sequences are obtained.

Отримано необхідні та достатні умови оборотності диференційовних нелінійних автономних різницевих операторів у просторі обмежених двосторонніх послідовностей.

У цій статті встановлюються необхідні та достатні умови, при виконанні яких нелінійні автономні різницеві оператори, що діють у просторі обмежених двосторонніх послідовностей, є C^1-дифеоморфізмами.

1. Теореми про оборотність диференційовних відображень. Спочатку наведемо допоміжні загальні результати про умови оборотності нелінійного C^1-відображення $F\colon X \to Y$, де X і Y — банахові простори з нормами $\|\cdot\|_X$ і $\|\cdot\|_Y$ відповідно.

1.1. Диференційовні відображення та C^1-дифеоморфізми. Розглянемо потрібні для подальшого викладу позначення та означення, запозичені з [1] і [2].

Нехай $L(X,Y)$ — банахів простір лінійних неперервних операторів $A\colon X \to Y$ з операторною нормою, $U \subset X$ і $V \subset Y$ — відкриті множини та $(Df)_x$ — похідна Фреше відображення $f\colon U \to V$ у точці $x \in U$. Відображення f називається C^1-*відображенням*, якщо f диференційовне в кожній точці $x \in U$ і природне відображення $Df\colon U \to L(X,Y)$ неперервне.

Відображення $f\colon U \to V$ називається C^1-*дифеоморфізмом*, якщо f гомеоморфно відображає U на V і відображення f та f^{-1} є C^1-відображеннями.

Відображення $f\colon X \to Y$ називається *локальним* C^1-*дифеоморфізмом у точці* $x \in X$, якщо існує такий окіл $U \subset X$ точки x, що звуження $f|_U$ відображення f на U встановлює C^1-дифеоморфізм між U та відкритою підмножиною простору Y.

1.2. Умови оборотності диференційовних відображень. Нехай A та B — довільні непорожні множини.

Відображення $g\colon A \to B$ називається *ін'єктивним*, якщо з $x \neq y$ випливає $g(x) \neq g(y)$. Це відображення називається *сюр'єктивним*, якщо для кожного $b \in B$ існує елемент $a \in A$, такий, що $g(a) = b$.

Справджуються такі твердження.

Теорема 1. *C^1-Відображення $F\colon X \to Y$ є C^1-дифеоморфізмом тоді та тільки тоді, коли:*

1) відображення F сюр'єктивне;

2) відображення F ін'єктивне;

3) відображення F є локальним C^1-дифеоморфізмом у кожній точці $x \in X$.

© В. Ю. Слюсарчук, 2020

Теорема 2. *C^1-Відображення $F\colon X \to Y$ є C^1-дифеоморфізмом тоді та тільки тоді, коли:*

1) відображення F сюр'єктивне;

2) відображення F ін'єктивне;

3) похідна $(DF)_x\colon X \to Y$ є неперервно оборотним оператором для кожної точки $x \in X$.

Ці рівносильні твердження автор отримав у [3] з використанням необхідних і достатніх умов існування оберненої функції [4].

1.3. Умови ін'єктивності C^1-відображення F. Очевидно, що для всіх $x_1, x_2 \in X$ і $\tau \in \mathbb{R}$

$$\frac{dF(x_1 + \tau(x_2 - x_1))}{d\tau} = (DF)_{x_1+\tau(x_2-x_1)}(x_2 - x_1)$$

та

$$\left(\int\limits_0^1 (DF)_{x_1+\tau(x_2-x_1)}\, d\tau\right)(x_2 - x_1) = F(x_2) - F(x_1). \tag{1}$$

Розглянемо оператор $\mathcal{I}_{x_1,x_2,F}\colon X \to Y$, який визначається рівністю

$$\mathcal{I}_{x_1,x_2,F} = \int\limits_0^1 (DF)_{x_1+\tau(x_2-x_1)}\, d\tau, \tag{2}$$

ядро $\ker \mathcal{I}_{x_1,x_2,F} = \big\{x \in X : \mathcal{I}_{x_1,x_2,F}x = 0\big\}$ цього оператора та множину

$$\mathcal{K}(X) = \big\{(x_1, x_2)\colon x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2\big\}.$$

Завдяки (1) і (2) справджується така теорема.

Теорема 3. *C^1-Відображення $F\colon X \to Y$ ін'єктивне тоді та тільки тоді, коли*

$$\ker \mathcal{I}_{x_1,x_2,F} = \{0\} \quad \text{для всіх} \quad (x_1, x_2) \in \mathcal{K}(X). \tag{3}$$

Зауваження 1. Виконання співвідношення (3) аналогічне виконанню співвідношення $\ker A = \{0\}$ для лінійного неперервного оператора $A\colon X \to Y$ (у теоремі Банаха про обернений оператор [5]). Якщо $F(x) = Ax$, то $(DF)_x = A$ для всіх $x \in X$ (оператор $A\colon X \to Y$ є C^1-відображенням), і тому $\mathcal{I}_{x_1,x_2,F}(x_2 - x_1) = A(x_2 - x_1)$. Отже, якщо $\mathcal{I}_{x_1,x_2,F}(x_2 - x_1) \neq 0$ для всіх $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, то $\ker A = \{0\}$, і навпаки.

Зауваження 2. Перевірка виконання умови сюр'єктивності для відображення F у теоремах 1 і 2 є складною задачею навіть у випадку лінійного F (див., наприклад, задачі про обмежені розв'язки лінійних диференціальних та різницевих рівнянь [6 – 9]). Вимога виконання цієї умови в теоремах 1 і 2 є природною вимогою (вона є і в формулюванні теореми Банаха про обернений оператор [5]). Для деяких класів відображень F твердження теореми 1 є правильним і без умови 1). Простим прикладом такого відображення є лінійний автономний різницевий оператор у випадку $\dim E < \infty$. Також ця теорема є узагальненням теореми Банаха про обернений оператор на випадок C^1-відображень.

1.4. Умови сюр'єктивності відображення F. Позначимо через $\mathcal{E}$ множину всіх відображень $A \in L(X, Y)$, кожне з яких має неперервне обернене A^{-1}, а через $B_X[0, r]$, де $r \in (0, +\infty)$, — замкнену кулю $\{x \in X : \|x\|_X \leqslant r\}$ в X.

Справджується теорема, що визначає достатні умови сюр'єктивності відображення F.

Теорема 4. *Нехай для кожного числа $H \geqslant 0$ існують такі число $r > 0$ і відображення $A \in \mathcal{E}$, для яких:*

1) відображення $F - A\colon B_X[0,r] \to Y$ є цілком неперервним;

2) виконується співвідношення

$$\sup_{x \in B_X[0,r]} \|Fx - Ax\|_Y \leqslant \frac{r}{\|A^{-1}\|_{L(Y,X)}} - H. \tag{4}$$

Тоді для кожного $y \in Y$ рівняння $Fx = y$ має хоча б один розв'язок $x \in X$.

Це твердження автор отримав у [10]. У випадку лінійного відображення F виконання співвідношення (4) є необхідним для сюр'єктивності цього відображення [10].

Інші умови сюр'єктивності відображення F наведено в [3].

Зазначимо, що в теоремі 4 умова 2) виконується, якщо простір X є скінченновимірним. Також у цій теоремі відображення F може не бути диференційовним.

2. Умови оборотності диференційовних нелінійних автономних різницевих операторів. Нехай $\mathbb{Z}$ — множина всіх цілих чисел, $\mathbb{N}$ — множина всіх натуральних чисел і E — довільний банахів простір із нормою $\|\cdot\|_E$. Позначимо через $\mathfrak{M}$ банахів простір обмежених двосторонніх послідовностей $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $x_n \in E$, з нормою

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathfrak{M}} = \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|x_n\|_E$$

і нульовим елементом $\mathbf{0}$.

У просторі $\mathfrak{M}$ визначимо оператор зсуву $S_m,\ m \in \mathbb{Z}$, формулою

$$(S_m\mathbf{x})_n = x_{n+m}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Елемент $\mathbf{y} \in \mathfrak{M}$ називається *майже періодичним* [11], якщо замикання множини $\{S_m\mathbf{y} : m \in \mathbb{Z}\}$ у просторі $\mathfrak{M}$ є компактною підмножиною цього простору.

Множина $\mathfrak{B}$ всіх майже періодичних елементів простору $\mathfrak{M}$ є підпростором цього простору з нормою

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathfrak{B}} = \|\mathbf{x}\|_{\mathfrak{M}}.$$

Оператор $A \in L(\mathfrak{M},\mathfrak{M})$ називається *майже періодичним*, якщо замикання множини $\{S_mAS_{-m} : m \in \mathbb{Z}\}$ у просторі $L(\mathfrak{M},\mathfrak{M})$ є компактним у цьому просторі.

Позначимо через $\mathfrak{S}$ множину всіх C^1-відображень $g\colon E \to E$, для кожного з яких похідна Фреше $(Dg)_x$ є рівномірно неперервною на кожній обмеженій множині $M \subset E$.

Розглянемо автономний різницевий оператор $\mathfrak{R}\colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$, що визначається формулою

$$(\mathfrak{R}\mathbf{x})_n = \sum_{k=0}^{m} g_k(x_{n-m}), \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{5}$$

де $\mathbf{x} \in \mathfrak{M},\ m \in \mathbb{N}$ і $g_k \in \mathfrak{S},\ k \in \{0,1,\ldots,m\}$.

При виконанні таких вимог до відображень $g_k,\ k = \overline{0,m}$, різницевий оператор $\mathfrak{R}$ є C^1-відображенням.

Справді, з урахуванням (1) і (2) для довільних $\mathbf{x},\mathbf{u} \in \mathfrak{M}$ і $n \in \mathbb{Z}$ отримуємо

$$\big(\mathfrak{R}(\mathbf{x}+\mathbf{u})\big)_n - (\mathfrak{R}\mathbf{x})_n =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} g_k(x_{n-k} + u_{n-k}) - \sum_{k=0}^{m} g_k(x_{n-k}) = \sum_{k=0}^{m} \big(g_k(x_{n-k} + u_{n-k}) - g_k(x_{n-k})\big) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} (Dg_k)_{x_{n-k}} u_{n-k} + \sum_{k=0}^{m} \big(g_k(x_{n-k} + u_{n-k}) - g_k(x_{n-k})\big) - \sum_{k=0}^{m} (Dg_k)_{x_{n-k}} u_{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} (Dg_k)_{x_{n-k}} u_{n-k} + \sum_{k=0}^{m} \int\limits_0^1 (Dg_k)_{x_{n-k}+\tau u_{n-k}}\, d\tau\, u_{n-k} - \sum_{k=0}^{m} (Dg_k)_{x_{n-k}} u_{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} (Dg_k)_{x_{n-k}} u_{n-k} + \sum_{k=0}^{m} \int\limits_0^1 \big((Dg_k)_{x_{n-k}+\tau u_{n-k}} - (Dg_k)_{x_{n-k}}\big)\, d\tau\, u_{n-k}.$$

Оскільки на підставі рівномірної неперервності похідних $(Dg_k)_x,\ k = \overline{0, m}$, на кожній обмеженій множині $M \subset E$ виконується співвідношення

$$\lim_{\|u\|_{\mathfrak{M}} \to 0} \frac{\sup\limits_{n\in\mathbb{Z}} \left\| \sum_{k=0}^{m} \int_0^1 \big((Dg_k)_{x_{n-k}+\tau x_{n-k}} - (Dg_k)_{x_{n-k}}\big)\, d\tau\, u_{n-k} \right\|_E}{\|u\|_{\mathfrak{M}}} = 0,$$

то згідно з означенням похідної Фреше (див. [12, с. 196]) похідна $(D\mathfrak{R})_{\mathbf{x}}$ різницевого оператора $\mathfrak{R}$ в точці $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ подається за допомогою співвідношення

$$\big((D\mathfrak{R})_{\mathbf{x}}\mathbf{u}\big)_n = \sum_{k=0}^{m} (Dg_k)_{x_{n-k}} u_{n-k}, \quad \mathbf{u} \in \mathfrak{M}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{6}$$

Завдяки включенням $g_k \in \mathfrak{S},\ k = \overline{0, m}$, ця похідна є неперервною по $\mathbf{x}$ на $\mathfrak{M}$. Тому оператор $\mathfrak{R}$ є C^1-відображенням.

Для подальшого нам також потрібний оператор $\mathcal{I}_{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathfrak{R}} : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$, який визначається співвідношенням

$$\mathcal{I}_{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathfrak{R}} = \int\limits_0^1 (D\mathfrak{R})_{\mathbf{x}_1 + \tau(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)}\, d\tau, \tag{7}$$

де $\mathbf{x}_1 = (x_{1,n})_{n\in\mathbb{Z}},\ \mathbf{x}_2 = (x_{2,n})_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathfrak{M}$. Цей оператор аналогічний оператору $\mathcal{I}_{x_1, x_2, F}$, що визначається рівністю (2).

Завдяки (6) і (7) для всіх $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, u \in \mathfrak{M}$

$$(\mathcal{I}_{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathfrak{R}}\mathbf{u})_n = \sum_{k=0}^{m} \int\limits_0^1 (Dg_k)_{x_{1,n-k} + \tau(x_{2,n-k} - x_{1,n-k})}\, d\tau\, u_{n-k}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Після проведеної підготовчої роботи наведемо умови оборотності різницевого оператора $\mathfrak{R}$.

Згідно з теоремами 1 – 3 справджується така теорема.

Теорема 5. *Нехай* $g_k \in \mathfrak{S},\ k = \overline{0, m}$. C^1-*Відображення* $\mathfrak{R} : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$, *що визначається співвідношенням (5), є* C^1-*дифеоморфізмом тоді та тільки тоді, коли:*

1) $\mathfrak{R}\mathfrak{M} = \mathfrak{M}$*;*

2) $\ker \mathcal{I}_{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathfrak{R}} = \{\mathbf{0}\}$ *для всіх* $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \mathcal{K}(\mathfrak{M})$*;*

3) для кожної точки $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}$ *відображення* $(D\mathfrak{R})_\mathbf{x}$*, що визначається співвідношенням (6), має обернений неперервний оператор* $\big((D\mathfrak{R})_\mathbf{x}\big)^{-1} \colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$.

Зауваження 3. Для нелінійного автономного оператора $\mathfrak{R} \colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ лінійні різницеві оператори $(D\mathfrak{R})_\mathbf{x} \colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{M},\ x \in C^n(\mathbb{R}, E)$, у випадку $x_n \not\equiv c,\ c \in E$, є неавтономними операторами. Для перевірки виконання умови 3) теореми 5 можна використати результати, викладені, наприклад, у [9, 13 – 15].

Зауваження 4. Завдяки включенням $g_k \in \mathfrak{S},\ k = \overline{0,m}$, і автономності оператора $\mathfrak{R}$ виконується співвідношення $\mathfrak{R}\mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}$. Також для кожного $\mathbf{x} \in \mathfrak{B}$ лінійний оператор $(D\mathfrak{R})_\mathbf{x} \colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ є майже періодичним і $(D\mathfrak{R})_\mathbf{x}\mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}$.

Отже, з урахуванням зауваження 4 та теорем 1–3 за допомогою заміни в теоремі 5 простору $\mathfrak{M}$ на $\mathfrak{B}$ отримаємо таку теорему.

Теорема 6. *Нехай* $g_k \in \mathfrak{S},\ k = \overline{0,m}$. C^1*-Відображення* $\mathfrak{R} \colon \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$*, що визначається співвідношенням (5), є* C^1*-дифеоморфізмом тоді та тільки тоді, коли:*

1) $\mathfrak{R}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}$*;*

2) $\ker \mathcal{I}_{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathfrak{D}} = \{\mathbf{0}\}$ *для всіх* $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \mathcal{K}(\mathfrak{B})$*;*

3) для кожної точки $\mathbf{x} \in \mathfrak{B}$ *відображення* $(D\mathfrak{R})_\mathbf{x}$*, що визначається співвідношенням (6), має обернений неперервний оператор* $((D\mathfrak{R})_\mathbf{x})^{-1} \colon \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$.

3. Умови сюр'єктивності оператора $\mathfrak{R}$. Будемо вважати, що банахів простір E скінченновимірний. Позначимо через $\mathcal{E}$ множину всіх лінійних неперервних різницевих операторів $\mathfrak{A} \colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$, кожний з яких подається у вигляді

$$(\mathfrak{A}\mathbf{x})_n = \sum_0^m A_k x_{n-k}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

де $\mathbf{x} \in \mathfrak{M},\ A_k \in L(E,E),\ k = \overline{0,m}$, і має обернений неперервний оператор $\mathfrak{A}^{-1}$.

Справджується теорема, що дає достатні умови сюр'єктивності оператора $\mathfrak{R}$ і є аналогічною теоремі 4:

Теорема 7. *Нехай для кожного числа* $H > 0$ *існують такі число* $r > 0$ *і оператор* $\mathfrak{A} \in \mathcal{E}$*, що*

$$\sup_{\|\mathbf{x}\|_\mathfrak{M} \le r} \|\mathfrak{R}\mathbf{x} - \mathfrak{A}\mathbf{x}\|_\mathfrak{M} \le \frac{r}{\|\mathfrak{A}^{-1}\|_{L(\mathfrak{M},\mathfrak{M})}} - H. \tag{8}$$

Тоді $\mathfrak{R}\mathfrak{M} = \mathfrak{M}$.

Ця теорема є окремим випадком загальної теореми автора про існування обмежених розв'язків нелінійних дискретних рівнянь [16].

4. Приклад C^1-відображення, що не є елементом множини $\mathfrak{S}$. Важливою вимогою в теоремах 5 і 6 є рівномірна неперервність похідних $(Dg_k)_x,\ k = \overline{0,m}$, на обмежених підмножинах банахового простору E.

У випадку скінченновимірного банахового простору E ця вимога для C^1-відображень $g_k \colon E \to E,\ k = \overline{0,m}$, виконується завдяки теоремі Кантора [17, с. 179].

Покажемо, що *у випадку нескінченновимірного простору* E C^1*-відображення* $g \colon E \to E$ *може не бути елементом множини* $\mathfrak{S}$.

Вважатимемо, що простір E збігається з банаховим простором c_0 збіжних до 0 послідовностей дійсних чисел $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ з нормою

$$\|x\|_{c_0} = \sup_{n\geq 1} |x_n|.$$

Будемо використовувати елементи

$$e_1 = (1, 0, 0, 0, \ldots),\ e_2 = (0, 1, 0, 0, \ldots),\ e_3 = (0, 0, 1, 0, \ldots), \ldots\ \in\ c_0.$$

Розглянемо довільне C^1-відображення $g_0 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, що задовольняє умови:

а) $g_0(x) = 0$ для всіх x з деякого околу U нуля;

б) $g_0'(1) = 1$.

Визначимо відображення $g \colon c_0 \to c_0$ рівністю

$$g(x) = \sum_{1\leq n} n g_0(x_n) e_n. \tag{9}$$

Покажемо, що:

1) $g \colon c_0 \to c_0$ — диференційовне в кожній точці $x \in c_0$ відображення;

2) похідна Фреше $(Dg)_x$ неперервна по x на c_0;

3) похідна Фреше $(Dg)_x$ є необмеженою на одиничній сфері.

Спочатку приділимо увагу властивості 1).

Розглянемо довільний елемент $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots) \in c_0$. Згідно з (9) і вимогами до відображення $g_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ справджуються рівності

$$\begin{aligned} g(x+u) - g(x) &= \sum_{1\leq n} n g_0(x_n + u_n) e_n - \sum_{1\leq n} n g_0(x_n) e_n = \\ &= \sum_{1\leq n} n\big(g_0(x_n + u_n) - g_0(x_n)\big) e_n = \\ &= \sum_{1\leq n} n g_0'(x_n) u_n\, e_n + \sum_{1\leq n} n\big(g_0(x_n + u_n) - g_0(x_n)\big) e_n - \sum_{1\leq n} n g_0'(x_n) u_n\, e_n = \\ &= \sum_{1\leq n} n g_0'(x_n) u_n\, e_n + \sum_{1\leq n} n\Big(\big(g_0(x_n + u_n) - g_0(x_n)\big) - g_0'(x_n) u_n\Big) e_n = \\ &= \sum_{1\leq n} n g_0'(x_n) u_n\, e_n + \sum_{1\leq n} n \left(\int\limits_0^1 \big(g_0'(x_n + \tau u_n) - g_0'(x_n)\big)\, d\tau \right) u_n\, e_n. \end{aligned} \tag{10}$$

Оскільки на підставі умови а) і рівномірної неперервності похідної $g_0'(x)$ на кожному відрізку $[a, b]$ виконується співвідношення

$$\lim_{\|u\|_{l_1}\to 0} \frac{\sum_{1\leq n} n \left| \left(\int_0^1 \big(g_0'(x_n + \tau u_n) - g_0'(x_n)\big)\, d\tau \right) u_n \right|}{\|u\|_{l_1}} = 0,$$

то з урахуванням рівностей (10) на підставі означення похідної Фреше [12, с. 196] похідна $(Dg)_x$ відображення $g\colon c_0 \to c_0$ в точці x подається за допомогою рівностей

$$((Dg)_x u)_n = \sum_{1\leq n} n g_0'(x_n) u_n\, e_n, \quad n \geq 1. \tag{11}$$

Отже, відображення $g\colon c_0 \to c_0$ диференційовне в кожній точці $x \in c_0$.

Далі покажемо неперервність похідної Фреше $(Dg)_x$ по x на c_0, тобто, що для кожного $x \in c_0$

$$\lim_{\tilde{x}\to x} \big\|(Dg)_{\tilde{x}} - (Dg)_x\big\|_{L(c_0,c_0)} = 0. \tag{12}$$

Згідно з (11) та означенням норми в c_0

$$\begin{aligned}\big\|(Dg)_{\tilde{x}} - (Dg)_x\big\|_{L(c_0,c_0)} &= \sup_{\|u\|_{c_0}=1} \left\|\sum_{1\leq n} n g_0'(\tilde{x}_n) u_n\, e_n - \sum_{1\leq n} n g_0'(x_n) u_n\, e_n\right\|_{c_0} = \\ &= \sup_{\|u\|_{c_0}=1} \left\|\sum_{1\leq n} n\big(g_0'(\tilde{x}_n) - g_0'(x_n)\big) u_n\, e_n\right\|_{c_0} \leq \\ &\leq \sum_{1\leq n} n\big|g_0'(\tilde{x}_n) - g_0'(x_n)\big|. \end{aligned} \tag{13}$$

Завдяки умові а) для кожного достатньо малого $\varepsilon > 0$ існує номер $n(\varepsilon)$ такий, що

$$\sum_{1\leq n} n\big|g_0'(\tilde{x}_n) - g_0'(x_n)\big| = \sum_{n=1}^{n(\varepsilon)} n\big|g_0'(\tilde{x}_n) - g_0'(x_n)\big|,$$

якщо

$$\|\tilde{x} - x\|_{c_0} < \varepsilon.$$

Тому на підставі рівномірної неперервності похідної $g_0'(x)$ на кожному відрізку $[a,b]$

$$\lim_{\tilde{x}\to x} \sum_{1\leq n} n\big|g_0'(\tilde{x}_n) - g_0'(x_n)\big| = 0$$

і, отже, з урахуванням (13) співвідношення (12) справджується.

Таким чином, властивість 2) також виконується.

Оскільки на підставі (11) та умови б) для кожних $n \in \mathbb{N}$ і $u \in c_0$

$$\big((Dg)_{e_n} u\big)_n = n g_0'(1) u_n e_n = n u_n e_n,$$

то

$$\big\|(Dg)_{e_n}\big\|_{L(c_0,c_0)} \geq n.$$

Отже, також виконується властивість 3), тобто похідна Фреше $(Dg)_x$ є необмеженою на одиничній сфері.

Звідси випливає, що похідна Фреше $(Dg)_x$ не може бути рівномірно неперервним по x відображенням на одиничній сфері.

Таким чином, C^1-відображення $g\colon c_0 \to c_0$, що визначається рівністю (9), не є елементом множини $\mathfrak{S}$.

5. Приклад різницевого оператора, що є C^1-дифеоморфізмом. Розглянемо різницевий оператор $\mathfrak{H} : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ у випадку $E = \mathbb{R}$, що визначається співвідношенням

$$(\mathfrak{H}\mathbf{x})_n = x_n - f(x_{n-1}), \qquad \mathbf{x} \in \mathfrak{M}, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{14}$$

де $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — неперервна функція. Наведемо умови, при виконанні яких цей оператор є C^1-дифеоморфізмом.

Справджується така теорема.

Теорема 8. *Нехай виконуються умови:*

1) функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є неперервно диференційовною та монотонною;

2) $f(0) = 0$ і $|f'(x)| \in [0, 1)$ для всіх $x \in \mathbb{R}$;

3) $\displaystyle\overline{\lim_{r \to +\infty}}\, r\left(1 - \max_{|x| \le r} |f'(x)|\right) = +\infty.$

Тоді оператор $\mathfrak{H} : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ є C^1-дифеоморфізмом.

Доведення. Покажемо, що виконуються умови теореми 5.

Спочатку покажемо, що

$$\mathfrak{H}\mathfrak{M} = \mathfrak{M}. \tag{15}$$

Зафіксуємо довільне число $H > 0$. Кожному числу $r > 0$ поставимо у відповідність лінійний різницевий оператор $\mathfrak{A}_r : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$, що визначається співвідношенням

$$(\mathfrak{A}_r\mathbf{x})_n = x_n - k_r x_{n-1}, \qquad \mathbf{x} \in \mathfrak{M}, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{16}$$

де

$$k_r = \frac{1}{2}\begin{cases} \max\limits_{|x| \le r} |f'(x)|, & \text{якщо} \quad f(a) > 0 \quad \text{для деякого} \quad a > 0, \\ -\max\limits_{|x| \le r} |f'(x)|, & \text{якщо} \quad f(a) < 0 \quad \text{для деякого} \quad a > 0. \end{cases}$$

Оскільки згідно з умовою 2) теореми

$$|k_r| < \frac{1}{2}, \tag{17}$$

то лінійний різницевий оператор $\mathfrak{A}_r$ має неперервний обернений $(\mathfrak{A}_r)^{-1}$, що визначається співвідношенням

$$\big((\mathfrak{A}_r)^{-1}\mathbf{y}\big)_n = \sum_{m=0}^{+\infty} (k_r)^m y_{n-m}, \qquad \mathbf{y} \in \mathfrak{M}, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{18}$$

у чому легко переконатися, використовуючи (16) – (18).

Із (18) випливає, що

$$\big\|(\mathfrak{A}_r)^{-1}\big\|_{L(\mathfrak{M},\mathfrak{M})} = \frac{1}{1 - |k_r|}. \tag{19}$$

Позначимо через $\mathcal{M}_H$ множину додатних чисел r, для кожного з яких виконується нерівність

$$H \le r\left(1 - \max_{|x| \le r} |f'(x)|\right). \tag{20}$$

Множина $\mathcal{M}_H$ є непорожньою на підставі умови 3) теореми. Завдяки нерівності (20) для кожного $r \in \mathcal{M}_H$

$$r\left(\max_{|x|\le r}|f'(x)| - |k_r|\right) \le r(1-|k_r|) - H. \tag{21}$$

Оскільки з урахуванням теореми Лагранжа про скінчені прирости [17, с. 226] та рівності $f(0)=0$ для всіх $r>0$

$$\max_{|x|\le r}\big|f(x)-k_r x\big| = \max_{|x|\le r}\big|(f(x)-f(0))-k_r x\big| =$$
$$= \max_{|x|\le r}\big|f'(\theta(x)x)x - k_r x\big| \le \max_{|x|\le r} x\big|f'(\theta(x)x)-k_r\big| \le$$
$$\le r\max_{|x|\le r}\big|f'(\theta(x)x)-k_r\big| \le r\max_{|x|\le r}|f'(x)-k_r| \le$$
$$\le r\left(\max_{|x|\le r}|f'(x)| - |k_r|\right)$$

(тут $\theta(x)$ — деяка функція зі значеннями в $[0,1]$), то на підставі нерівності (21) та рівності (19) для всіх $r \in \mathcal{M}_H$ виконується нерівність

$$\max_{|x|\le r}|f(x)-k_r x| \le \frac{r}{\|(\mathfrak{A}_r)^{-1}\|_{L(\mathfrak{M},\mathfrak{M})}} - H,$$

аналогічна нерівності (8). Звідси завдяки довільності вибору $H>0$ та теоремі 7 випливає рівність (15).

Отже, різницевий оператор $\mathfrak{H}$ є сюр'єктивним.

Покажемо, що цей оператор є ін'єктивним. Використаємо лінійний різницевий оператор $\mathcal{I}_{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathfrak{H}} : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$, що визначається рівністю

$$\mathcal{I}_{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathfrak{H}} = \int_0^1 (D\mathfrak{H})_{\mathbf{x}_1+\tau(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1)}\, d\tau,$$

де $\mathbf{x}_1 = (x_{1,n})_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathfrak{M}$, $\mathbf{x}_2 = (x_{2,n})_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathfrak{M}$, $(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2) \in \mathcal{K}(\mathfrak{M})$, і є аналогічною рівності (7). Завдяки (14) цей оператор подається у вигляді

$$(\mathcal{I}_{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathfrak{H}}\mathbf{u})_n = u_n - \int_0^1 f'\big(x_{1,n-1}+\tau(x_{2,n-1}-x_{1,n-1})\big)\,dt\; u_{n-1}, \qquad \mathbf{u}\in\mathfrak{M}, \quad n\in\mathbb{Z}.$$

На підставі перших двох умов теореми та включень $\mathbf{x}_i \in \mathfrak{M}$, $i=\overline{1,2}$,

$$\sup_{n\in\mathbb{Z},\,\tau\in[0,1]}\big|f'\big(x_{1,n-1}+\tau(x_{2,n-1}-x_{1,n-1})\big)\big| < 1.$$

Тому

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}}\left|\int_0^1 f'\big(x_{1,n-1}+\tau(x_{2,n-1}-x_{1,n-1})\big)\,dt\right| < 1. \tag{22}$$

Припустимо, що $\mathbf{u} \in \ker \mathcal{I}_{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathfrak{H}}$, тобто

$$\mathcal{I}_{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathfrak{H}}\mathbf{u} = \mathbf{0},$$

і

$$\mathbf{u} \neq \mathbf{0}. \tag{23}$$

Тоді

$$u_n \equiv \int\limits_0^1 f'\big(x_{1,n-1} + \tau(x_{2,n-1} - x_{1,n-1})\big)\,dt\; u_{n-1}$$

і на підставі (22) та (23) одержуємо

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathfrak{M}} < \|\mathbf{u}\|_{\mathfrak{M}},$$

що неможливо.

Отже, припущення про виконання нерівності (23) хибне і

$$\ker \mathcal{I}_{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathfrak{H}} = \{\mathbf{0}\} \quad \text{для всіх} \quad (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \mathcal{K}(\mathfrak{M}).$$

Тому за теоремою 3 різницевий оператор $\mathfrak{H}$ є ін'єктивним.

Далі розглянемо похідну Фреше $(D\mathfrak{H})_{\mathbf{x}}$ оператора $D\mathfrak{H}$ в точці $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}$. Згідно з (6) та (14)

$$((D\mathfrak{H})_{\mathbf{x}}\mathbf{u})_n = u_n - f'(x_{n-1})u_{n-1}, \qquad \mathbf{u} \in \mathfrak{M}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Покажемо, що оператор $(D\mathfrak{H})_{\mathbf{x}}$ для кожного $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}$ має неперервний обернений. Використаємо різницеве рівняння

$$u_n = f'(x_{n-1})u_{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Завдяки умові 2) теореми для кожного $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}$

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}} |f'(x_{n-1})| < 1.$$

Тому це рівняння експоненціально дихотомічне для кожного $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}$ [9] і, отже, для кожного $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}$ оператор $(D\mathfrak{H})_{\mathbf{x}}$ має неперервний обернений $((D\mathfrak{H})_{\mathbf{x}})^{-1}$.

Таким чином, за теоремою 5 різницевий оператор $\mathfrak{H}\colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ з урахуванням сюр'єктивності та ін'єктивності цього оператора й оборотності операторів $(D\mathfrak{H})_{\mathbf{x}}$, $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}$, є C^1-дифеоморфізмом.

Теорему 8 доведено.

Зауваження 5. У випадку невиконання умови 3 в теоремі 8 твердження цієї теореми є хибним. Справді, нехай в (14)

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{1 + |x|}\right)x.$$

Легко перевірити, що

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(1+|x|)^2}$$

і для $f(x)$ виконуються перші дві умови теореми 8. Однак, умова 3) цієї теореми не виконується, оскільки

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{r\to+\infty}}\, r\left(1 - \max_{|x|\le r}|f'(x)|\right) &= \overline{\lim_{r\to+\infty}}\, r\left(1 - \max_{|x|\le r}\left|1 - \frac{1}{(1+|x|)^2}\right|\right) = \\ &= \overline{\lim_{r\to+\infty}}\, r\left(1 - \left(1 - \frac{1}{(1+r)^2}\right)\right) = \\ &= \lim_{r\to+\infty}\frac{r}{(1+r)^2} = 0.\end{aligned}$$

У цьому випадку оператор $\mathfrak{H}$ не має неперервного оберненого. Дійсно, якби оператор $\mathfrak{H}$ мав неперервний обернений, то різницеве рівняння

$$x_n = \left(1 - \frac{1}{1+|x_{n-1}|}\right)x_{n-1} + 1, \quad n\in\mathbb{Z},$$

мало б єдиний сталий розв'язок $x\in\mathbb{R}$. Тоді

$$x = \left(1 - \frac{1}{1+|x|}\right)x + 1,$$

що неможливо з жодним $x\in\mathbb{R}$.

Таким чином, невиконання умови 3) теореми 8 не гарантує правильності твердження цієї теореми.

6. Додаткові зауваження та літературні вказівки. Теореми 1 і 2 є окремими випадками тверджень про C^k-відображення $F\colon X\to Y,\ k\in\mathbb{N}$, що є C^k-дифеоморфізмом [3].

Основні в статті теореми 5 і 6 про оборотність автономного різницевого оператора $\mathfrak{R}$ класу C^1 є новими.

Приклад C^1-відображення у випадку $E = c_0$ (п. 4), що не є елементом множини $\mathfrak{S}$, наведено вперше і отримано з використанням ідеї побудови неперервних і монотонних відображень, які діють у сепарабельному гільбертовому просторі H і є необмеженими на одиничній сфері цього простору [18, с. 41].

Теорему 8 про умови, при виконанні яких різницевий оператор $\mathfrak{P}$ є C^1-дифеоморфізмом, наведено вперше.

Умови сюр'єктивності та ін'єктивності різницевих операторів, що на підставі теорем 1, 2, 5 і 6 є важливими для оборотності цих операторів, визначалися в [19 – 29].

Література

1. С. Ленг, *Введение в теорию дифференцируемых многообразий*, Мир, Москва (1967).
2. М. Голубицкий, В. Гийемин, *Устойчивые отображения и их особенности*, Мир, Москва (1977).
3. В. Ю. Слюсарчук, *Необхідні і достатні умови оборотності нелінійних диференційовних відображень*, Укр. мат. журн., **68**, № 4, 563 – 576 (2016).

4. В. Ю. Слюсарчук, *Оборотність теореми про обернену функцію для диференційовних функцій*, Буковин. мат. журн., **2**, № 4, 112 – 113 (2014).
5. А. М. Колмогоров, С. В. Фомін, *Елементи теорії функцій і функціонального аналізу*, Вища шк., Київ (1974).
6. М. А. Красносельский, В. Ш. Бурд, Ю. С. Колесов, *Нелинейные почти периодические колебания*, Наука, Москва (1970).
7. Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн, *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве*, Наука, Москва (1970).
8. Ю. А. Митропольский, А. М. Самойленко, В. Л. Кулик, *Исследования дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова*, Наук. думка, Киев (1990).
9. В. Е. Слюсарчук, *Об экспоненциальной дихотомии решений дискретных систем*, Укр. мат. журн., **35**, № 1, 109 – 115 (1983).
10. В. Ю. Слюсарчук, *Метод локальної лінійної апроксимації в теорії нелінійних рівнянь*, Наук. вісн. Чернів. нац. ун-ту ім. Ю. Федьковича. Сер.: Математика, **2**, № 2-3, 157 – 163 (2012).
11. S. Bochner, *Beitrage zur Theorie der fastperiodischen, I Teil. Funktionen einer Variablen; II Teil. Funktionen mehrerer Variablen*, Math. Ann., **96**, 119 – 147; 383 – 409 (1927).
12. Л. А. Люстерник, В. И. Соболев, *Краткий курс функционального анализа*, Высш. шк., Москва (1982).
13. В. Е. Слюсарчук, *Об ограниченных и почти периодических решениях неявных разностных уравнений в банаховом пространстве*, Докл. АН УССР. Сер. А, № 6, 503 – 509 (1975).
14. В. Е. Слюсарчук, *Необходимые и достаточные условия обратимости равномерно c-непрерывных функционально-дифференциальных операторов*, Укр. мат. журн., **41**, № 2, 201 – 205 (1989).
15. А. Г. Баскаков, *Об обратимости и фредгольмовости разностных операторов*, Мат. заметки, **67**, вып. 6, 816 – 827 (2000).
16. В. Ю. Слюсарчук, *Метод локального лінійного наближення нелінійних дискретних рівнянь*, Укр. мат. журн., **71**, № 9, 1284 – 1296 (2019).
17. Г. М. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления, Т. 1*, в 3-х т., Наука, Москва (1966).
18. Ю. В. Трубников, А. И. Перов, *Дифференциальные уравнения с монотонными нелинейностями*, Наука и техника, Минск (1986).
19. В. Е. Слюсарчук, *Необходимые и достаточные условия липшицевой обратимости нелинейных разностных операторов в пространствах $l_p(\mathbb{Z},\mathbb{R}),\ 1 \leqslant p \leqslant \infty$,* Мат. заметки, **68**, № 3, 448 – 454 (2000).
20. В. Ю. Слюсарчук, *Метод локальної лінійної апроксимації в теорії обмежених розв'язків нелінійних різницевих рівнянь*, Нелін. коливання, **12**, № 3, 368 – 378 (2009).
21. В. Ю. Слюсарчук, *Експоненціально дихотомічні різницеві рівняння з неліпшицевими збуреннями*, Нелін. коливання, **14**, № 4, 536 – 555 (2011).
22. В. Ю. Слюсарчук, *Метод локального лінійного наближення нелінійних різницевих операторів слабко регулярними операторами*, Нелін. коливання, **15**, № 1, 122 – 126 (2012).
23. В. Ю. Слюсарчук, *Умови існування майже періодичних розв'язків нелінійних різницевих рівнянь з дискретним аргументом*, Нелін. коливання, **16**, № 3, 416 – 425 (2013).
24. В. Е. Слюсарчук, *Условия существования почти периодических решений нелинейных разностных уравнений в банаховом пространстве*, Мат. заметки, **97**, № 2, 277 – 285 (2015).
25. В. Ю. Слюсарчук, *Майже періодичні та періодичні розв'язки різницевих рівнянь у метричному просторі*, Нелін. коливання, **18**, № 1, 112 – 119 (2015).
26. В. Ю. Слюсарчук, *Майже періодичні та стійкі за Пуассоном розв'язки різницевих рівнянь у метричному просторі*, Укр. мат. журн., **67**, № 12, 1707 – 1714 (2015).
27. В. Е. Слюсарчук, *Почти периодические решения дискретных уравнений*, Изв. РАН. Сер. мат., **80**, № 2, 125 – 138 (2016).
28. В. Ю. Слюсарчук, *Розв'язність різницевих рівнянь із нерівномірно стискаючими операторами в просторі двосторонніх послідовностей*, Нелін. коливання, **20**, № 3, 401 – 410 (2017).
29. В. Ю. Слюсарчук, *Теореми про нерухому точку та різницеві рівняння з непорожньою множиною обмежених розв'язків*, Нелін. коливання, **20**, № 4, 537 – 548 (2017).

Одержано 21.01.20