

ОСЕСИМЕТРИЧНІ КОЛИВАННЯ ЗАМКНЕНОЇ У ВЕРШИНІ КОНІЧНОЇ ОБОЛОНКИ

В. А. Троценко, Ю. В. Троценко

Ін-т математики НАН України

вул. Терещенківська, 3, Київ, 01024, Україна

e-mail: trots@imath.kiev.ua

We develop a variational method for solving the spectral problem of free axially symmetric vibrations of a thin-walled conical shell with vertex. The construction of systems of basis functions for the approximation of displacements of the shell is based on the account of the formal structure of the fundamental system of integrals of the initial equations, which was established by the asymptotic integration of a singularly perturbed system of equations with a regular singular point. We give examples of calculation of specific conical shells, which illustrate the effectiveness of the proposed algorithm for solving the problem.

Розвинуто варіаційний метод розв'язування спектральної задачі про вільні осесиметричні коливання тонкостінної конічної оболонки з вершиною. Побудова систем базисних функцій для апроксимації переміщень оболонки базується на врахуванні формальної структури фундаментальної системи інтегралів вихідних рівнянь, яку було встановлено при асимптотичному інтегруванні сингулярно збуреної системи рівнянь із регулярною особливою точкою. Наведено приклади розрахунку конкретних конічних оболонок, які ілюструють ефективність запропонованого алгоритму розв'язування задачі.

Вступ. Визначення частот і форм власних коливань оболонок є основним етапом при їх динамічному розрахунку. Розробці методів розв'язування відповідних спектральних задач теорії оболонок присвячено значну кількість публікацій, з яких впливає, що найбільш широке застосування отримали метод скінченних елементів і метод, який базується на зведенні граничної задачі до послідовності задач Коші, для розв'язування яких застосовується чисельний метод типу Рунге – Кутта з використанням дискретної ортогоналізації розв'язків [1 – 3]. З аналітичних методів розв'язування згаданих задач найбільший розвиток отримали асимптотичний [4] та метод типу Бубнова – Гальоркіна [5].

Слід зазначити, що розглянуті чисельні методи дуже чутливі до значення відносної товщини оболонки. З її зменшенням доводиться істотно зменшувати крок дискретизації, що призводить до втрати стійкості обчислювального процесу до досягнення граничних значень для розв'язків. Це пов'язано з тим, що при малих значеннях товщини оболонки вихідна задача стає сингулярно збуреною спектральною задачею, для якої характерна наявність високих градієнтів у розв'язках, локалізованих у малому околі граничних точок. Апроксимація таких розв'язків класичними різницевиими співвідношеннями або скінченними рядами не приводить до позитивного результату.

Не дивлячись на привабливість отримання розв'язку в аналітичній формі за допомогою методу Рітца, останній не знайшов належного застосування при розв'язуванні спектральних задач теорії оболонок за умов їхнього сингулярного збурення. У роботі [6] на основі енергетичного методу вивчалися коливання товстостінної конічної оболонки. Застосування варіаційного методу при розв'язуванні сингулярно збурених задач про власні

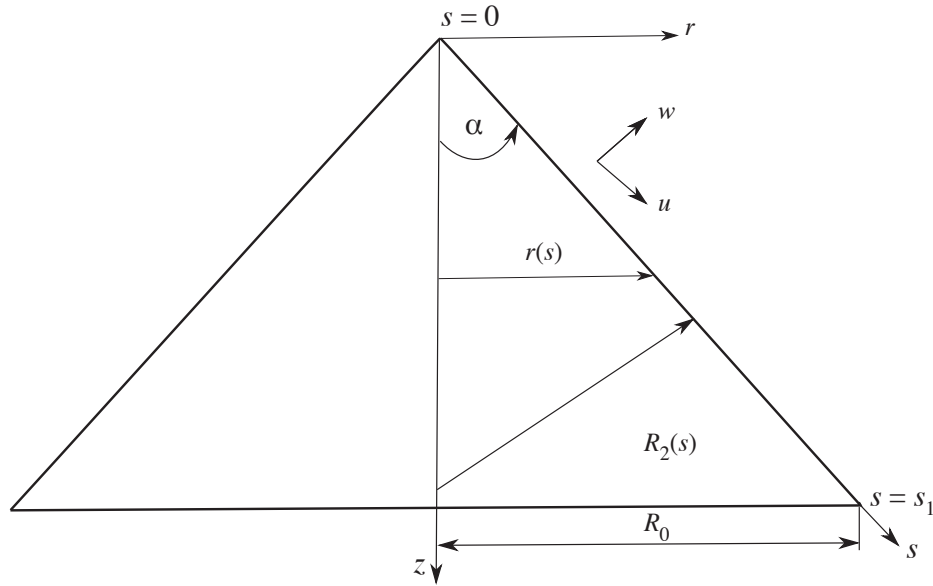


Рис. 1. Основні геометричні параметри конічної оболонки.

коливання куполоподібних оболонок і незамкнених в меридіональному напрямку оболонок обертання розглянуто в роботах [7–9].

Цю статтю присвячено подальшому розвитку методу Рітца, запропонованого в [7–9], для розв’язування задачі про осесиметричні коливання конічної оболонки з вершиною, що має примежові розв’язки. Клас допустимих функцій будується з урахуванням заздалегідь встановленої структури асимптотичного розкладу фундаментальної системи розв’язків вихідної системи рівнянь, що має особливості за малим параметром при старшій похідній та за незалежною змінною (регулярна особлива точка в полюсі оболонки).

1. Постановка задачі. Розглянемо осесиметричні коливання тонкостінної конічної оболонки обертання з кутом α між її віссю симетрії та твірною. Вважається, що оболонка обмежена однією паралеллю та має вершину. Як незалежну змінну виберемо довжину дуги твірної s , початок відліку якої знаходиться у вершині конуса ($0 \leq s \leq s_1$). Позначимо через R_1 і R_2 головні радіуси кривини поверхні оболонки, а через $r = r(s)$ — відстань від точки серединної поверхні оболонки до осі обертання. Тоді будемо мати

$$R_1 = \infty, \quad R_2 = s \tan \alpha, \quad r(s) = s \sin \alpha. \quad (1)$$

Проекції переміщень точок оболонки на напрямки твірної та зовнішню нормаль до неї позначимо через $u(s, t)$ і $w(s, t)$, де t — координата за часом (рис. 1).

Відповідно до технічної теорії оболонок [10] (у формулах для зміни кривизи утримуються лише нормальні переміщення оболонки) після відокремлення координати за часом та переходу до безрозмірних величин усталені осесиметричні коливання конічної оболонки з частотою ω описує система рівнянь

$$\begin{aligned} F_1(u, w) &= -\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s} \frac{d}{ds} (su) \right) - \frac{\nu}{s \tan \alpha} \frac{dw}{ds} + \frac{1}{s^2 \tan \alpha} w - \lambda^2 u = 0, \\ F_2(u, w) &= \frac{\nu}{s \tan \alpha} \frac{du}{ds} + \frac{1}{s^2 \tan \alpha} u + \frac{1}{s^2 \tan^2 \alpha} w + \mu^4 \Delta \Delta w - \lambda^2 w = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\Delta = \frac{1}{s} \frac{d}{ds} \left(s \frac{d}{ds} \right), \quad \mu^4 = c^2 = \frac{h^2}{12R_0^2}, \quad \lambda^2 = \frac{(1-\nu^2)\rho R_0^2 \omega^2}{E},$$

де h — товщина оболонки, R_0 — її характерний лінійний розмір, E , ν і ρ — модуль Юнга, коефіцієнт Пуассона та густина матеріалу оболонки відповідно.

Розв'язки системи рівнянь (2) шостого порядку зі змінними коефіцієнтами мають задовольняти відповідні однорідні граничні умови, що відображають умови кріплення на границі оболонки. У вершині оболонки при $s = 0$ будемо вимагати виконання умов обмеженості силових та геометричних характеристик її деформації.

Еквівалентне варіаційне формулювання вихідної спектральної задачі можна отримати з принципу можливих переміщень. При цьому варіаційне рівняння можна подати у вигляді

$$\delta I = \int_0^{s_1} (T_1 \delta \varepsilon_1 + T_2 \delta \varepsilon_2 + M_1 \delta \varkappa_1 + M_2 \delta \varkappa_2) r ds - \lambda^2 \int_0^{s_1} (u \delta u + w \delta w) r ds = 0, \quad (3)$$

де

$$\varepsilon_1 = \frac{du}{ds}, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{s} u + \frac{1}{s \tan \alpha} w, \quad \varkappa_1 = -\frac{d^2 w}{ds^2}, \quad \varkappa_2 = -\frac{1}{s} \frac{dw}{ds},$$

$$T_1 = \varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2, \quad T_2 = \varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1, \quad M_1 = c^2 (\varkappa_1 + \nu \varkappa_2), \quad M_2 = c^2 (\varkappa_2 + \nu \varkappa_1).$$

Після інтегрування за частинами в інтегралах, які включають у себе похідні від варіацій переміщень, варіаційне рівняння (3) набирає вигляду

$$\delta I = \int_0^{s_1} (F_1(u, w) \delta u + F_2(u, w) \delta w) r ds + \left(r T_1 \delta u + r Q_1 \delta w - r M_1 \frac{d \delta w}{ds} \right) \Big|_0^{s_1} = 0, \quad (4)$$

$$Q_1 = -c^2 \frac{d}{ds} (\Delta w).$$

Внаслідок довільності варіацій δu і δw на відрізку $[0, s_1]$ із цього рівняння випливають рівняння (2).

З умови рівності нулю позаінтегрального члена випливають граничні умови

$$\left[u = w = \frac{dw}{ds} \right]_{s=s_1} = 0 \quad (5)$$

для жорстко закріпленого торця оболонки та

$$[T_1 = Q_1 = M_1]_{s=s_1} = 0 \quad (6)$$

для випадку вільного торця оболонки.

Якщо в полюсі оболонки не накладено обмежень на її переміщення, то при $s = 0$ повинні виконуватися умови

$$[r T_1 = r Q_1 = r M_1]_{s=0} = 0. \quad (7)$$

Зазначимо, що граничні умови (5)–(7) забезпечують симетричність оператора замкнених у вершині конічних оболонок.

2. Формальна структура обмежених інтегралів вихідних рівнянь. Сформульована задача має дві характерні особливості, які необхідно враховувати при побудові її наближених розв'язків. Перша з них пов'язана з тим, що деякі коефіцієнти рівнянь (2) прямують до нескінченності при $s \rightarrow 0$, що передбачає певну асимптотичну поведінку шуканих обмежених розв'язків при підході до вершини оболонки. Друга особливість обумовлена наявністю для тонкостінних оболонок малого параметра c^2 при старшій похідній від функції $w(s)$. У цьому випадку розв'язки вихідної задачі будуть включати в себе як повільно змінну частину, так і складову типу примежового шару.

У зв'язку з цим встановимо формальну структуру фундаментальної системи регулярних інтегралів рівнянь (2), використовуючи при цьому аналітичну теорію асимптотичного інтегрування сингулярно збурених систем рівнянь.

Перші інтеграли рівнянь (2), які обмежені при $s = 0$, будемо шукати у вигляді прямого розкладу за параметром μ :

$$u(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{4k} u_k(s), \quad w(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{4k} w_k(s). \quad (8)$$

Для визначення функцій $u_k(s)$ і $w_k(s)$ підставимо розклади (8) у вихідні рівняння та прирівняємо до нуля коефіцієнти при різних степенях параметра μ . При $\mu = 0$ отримаємо вироджену систему рівнянь відносно функцій $u_0(s)$ і $w_0(s)$. Після деяких перетворень її можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} s \frac{du_0}{ds} &= f_{11}u_0 + f_{12}w_0, \\ s \frac{dw_0}{ds} &= f_{21}u_0 + f_{22}w_0, \end{aligned} \quad (9)$$

де

$$\begin{aligned} f_{11} &= -\frac{1}{\nu}, & f_{12} &= \frac{\lambda^2 s^2 \tan^2 \alpha - 1}{\nu \tan \alpha}, & f_{21} &= \frac{(1 - \nu^2 + \lambda^2 \nu^2 s^2) \tan \alpha}{g(s)}, \\ f_{22} &= \frac{1 - \nu^2 - \lambda^2 (1 - 2\nu) s^2 \tan \alpha}{g(s)}, & g(s) &= \nu (1 - \nu^2 - \lambda^2 s^2 \tan^2 \alpha). \end{aligned}$$

У рівняннях (9) всі коефіцієнти $f_{ij}(s)$ є аналітичними функціями при $s \in [0, s_1]$ та не обертаються в нуль при $s = 0$. З вигляду цієї системи рівнянь випливає, що точка $s = 0$ є регулярною особливою точкою [11]. Для побудови інтегралів цих рівнянь скористаємося узагальненим методом степеневих рядів.

Введемо до розгляду вектор-функцію $\vec{y} = \{y_1, y_2\}$, $y_1 = u_0(s)$, $y_2 = w_0(s)$. Тоді систему рівнянь (9) можна записати у векторно-матричній формі

$$s \frac{d\vec{y}}{ds} = F(s, \lambda) \vec{y}. \quad (10)$$

Матрицю $F(s, \lambda)$ можна навести у вигляді розкладу за парними степенями s :

$$F(s, \lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} F_{2i} s^{2i}, \quad (11)$$

де матриця F_{2i} має структуру

$$F_0 = \begin{vmatrix} f_{11}^{(0)} & f_{12}^{(0)} \\ f_{21}^{(0)} & f_{22}^{(0)} \end{vmatrix}, \quad F_2 = \begin{vmatrix} 0 & f_{12}^{(2)} \\ f_{21}^{(2)} & f_{22}^{(2)} \end{vmatrix}, \quad F_{2i} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ f_{21}^{(2i)} & f_{22}^{(2i)} \end{vmatrix}, \quad i = 2, 4, \dots$$

Коефіцієнти перших членів розкладів елементів матриці F мають вигляд

$$f_{11}^{(0)} = -\frac{1}{\nu}, \quad f_{12}^{(0)} = -\frac{1}{\nu \tan \alpha}, \quad f_{21}^{(0)} = \frac{\tan \alpha}{\nu}, \quad f_{22}^{(0)} = \frac{1}{\nu}.$$

Розв'язки системи (10) шукаємо у вигляді

$$y_i = s^\sigma \sum_{k=0}^{\infty} g_{ik} s^k, \quad i = 1, 2, \quad (12)$$

де σ і g_{ik} — невизначені постійні.

Підставивши ряди (11) та (12) в рівняння (10) та прирівнявши коефіцієнти при s^σ в обох частинах отриманої рівності, одержимо однорідну алгебраїчну систему відносно перших коефіцієнтів розкладів (12):

$$(F_0 - \sigma E) \vec{g}_0 = 0, \quad (13)$$

де E — одинична матриця, \vec{g}_0 — вектор з компонентами g_{i0} , $i = 1, 2$.

Прирівнявши коефіцієнти при $s^{\sigma+k}$, $k = 1, 2, \dots$, отримаємо неоднорідні алгебраїчні системи, що мають вигляд

$$[F_0 - (\sigma + k)E] \vec{g}_k = \vec{d}_k. \quad (14)$$

Тут $\vec{g}_k = \{g_{1k}, g_{2k}\}$, $k = 1, 2, \dots$, а \vec{d}_k — вектори з компонентами $d_i^{(k)}$, $\vec{d}_k = \{d_1^{(k)}, d_2^{(k)}\}$, які визначаються за формулами

$$d_i^{(k)} = -\sum_{q=1}^2 \sum_{j=0}^{k-1} g_{q,j} f_{i,q}^{(k-j)}, \quad i = 1, 2, \quad k = 1, 2, \dots \quad (15)$$

Таким чином, визначення показника σ та коефіцієнтів розкладів (12) звелось до розв'язування однорідної алгебраїчної системи (13) відносно вектора \vec{g}_0 та послідовності неоднорідних систем (14) відносно векторів \vec{g}_k , $k = 1, 2, \dots$, праві частини яких лінійно виражаються через $k - 1$ розв'язків попередніх алгебраїчних систем.

З умови існування нетривіального розв'язку системи (13) отримуємо характеристичне рівняння другого порядку відносно показника σ . Після ряду перетворень можна показати, що корені цього рівняння набувають значень

$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = 0. \quad (16)$$

Покладаючи в рівняннях (13) і (14) $\sigma = 0$ та розв'язуючи послідовності алгебраїчних рівнянь, можна переконатися, що перший розв'язок системи (10) набирає вигляду

$$y_1^{(1)} = \sum_{k=0}^{\infty} g_{1,2k}^{(1)} s^{2k}, \quad y_2^{(1)} = \sum_{k=0}^{\infty} g_{2,2k}^{(1)} s^{2k}. \quad (17)$$

При цьому перші коефіцієнти задовольняють співвідношення

$$g_{1,0}^{(1)} = -\frac{1}{\tan \alpha} g_{2,0}^{(1)}. \quad (18)$$

Тут і далі верхній індекс означає номер частинного розв'язку.

Розв'язок системи (10), що відповідає кореню характеристичного рівняння σ_2 , буде включати в себе логарифмічний множник і, таким чином, є необмеженим розв'язком при $s = 0$.

Вищі наближення в розкладах (8) не впливають на структуру нульового наближення.

Співвідношення (18) відіграє важливу роль у забезпеченні обмеженості деформацій при $s \rightarrow 0$ та показує, що зображення розв'язків для $u(s)$ та $w(s)$ не є незалежними.

Отже, прямий розклад за малим параметром (8) дає асимптотичне зображення одного регулярного розв'язку осесиметричних коливань конічної оболонки в околі її вершини. Відповідно до теорії задач із примежовим шаром [11, 12] два інші інтеграли вихідних рівнянь включають в себе експоненціальний множник. При цьому можна показати [4, 7], що ці розв'язки мають формальне зображення

$$\begin{aligned} u^{(j)}(s) &= \mu \gamma^{(j)}(s) \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \left[\sum_{i=0}^{\infty} u_{k,i}^{(j)}(s - s_1)^i \right], \\ w^{(j)}(s) &= \gamma^{(j)}(s) \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \left[\sum_{i=0}^{\infty} w_{k,i}^{(j)}(s - s_1)^i \right], \quad j = 2, 3, \end{aligned} \quad (19)$$

де $u_{k,i}^{(j)}$ і $w_{k,i}^{(j)}$ — невідомі коефіцієнти розкладів, j — індекс, що вказує номер знайденого частинного розв'язку,

$$\gamma^{(j)}(s) = \begin{cases} \exp^{\beta(s)} \cos \beta(s) & \text{при } j = 2, \\ \exp^{\beta(s)} \sin \beta(s) & \text{при } j = 3, \end{cases}$$

$$\beta(s) = \frac{1}{\mu \sqrt{2}} \int_{s_1}^s |b_0(t)|^{1/4} dt, \quad b_0(s) = \lambda - \frac{1 - \nu^2}{R_2^2(s)}, \quad b_0(s) < 0.$$

Остання нерівність означає, що будемо розглядати нижчу частину спектра частот. Ці розв'язки при малих значеннях параметра μ є сильно осцилюючими та експоненціально затухаючими при віддаленні від краю оболонки. Наявність множника $\gamma^{(j)}(s)$ в інтегралах (19) свідчить про те, що класичні методи для розв'язування задач з примежовим шаром не можуть однаково добре працювати у всій області зміни параметра μ . При малих показниках експонента добре обчислюється за допомогою ряду Тейлора, тоді як при великих показниках необхідно використовувати апроксимацію Паде.

При побудові інтегралів (19) вважалося, що оболонка має такі геометричні параметри, при яких можна знехтувати впливом функцій примежового шару на поведінку розв'язків в околі її полюса.

Отримані вище результати якісного характеру про поведінку лінійно незалежних розв'язків рівнянь можуть бути використані при побудові систем базисних функцій для розв'язування вихідної задачі методом Рітца.

3. Застосування методу Рітца для побудови наближеного розв'язку. Для знаходження структури загального розв'язку системи (2) складемо лінійну комбінацію інтегралів (17) і (19). Враховуючи зображення примежових функцій у формі Вішіка – Люстерніка [12, 13], загальний розв'язок можна навести у вигляді

$$[u, w] = R[u, w] + \exp^{\beta_0(s)} \cos \beta_0(s) \sum_{i=0}^{\infty} [u_{i,1}, w_{i,1}](s - s_1)^i + \\ + \exp^{\beta_0(s)} \sin \beta_0(s) \sum_{i=0}^{\infty} [u_{i,2}, w_{i,2}](s - s_1)^i, \quad (20)$$

$$\beta_0(s) = p(s - s_1), \quad p = \frac{1}{\mu\sqrt{2}} \sqrt[4]{|b_0(s_1)|}, \quad b_0(s_1) = \lambda - \frac{(1 - \nu^2)}{R_2^2(s_1)}.$$

Тут у квадратних дужках вказані функції та відповідні їм коефіцієнти розкладів, $R[u, w]$ — регулярна частина загального розв'язку (17).

Отже, зображення розв'язків у формі (20) включають в себе всі послідовні наближення при асимптотичному інтегруванні сингулярно збурених рівнянь. У подальшому невизначені коефіцієнти в розкладах (20) будемо знаходити з умов стаціонарності відповідного квадратичного функціонала та із задоволення розв'язками головних граничних умов.

Побудова систем координатних функцій здійснюється на основі задоволення загальним розв'язком (20) головних граничних умов задачі. Виходячи з цих умов, отримуємо деякі допоміжні співвідношення між коефіцієнтами в розкладах для шуканих функцій. Підставляючи ці співвідношення в загальний вигляд розв'язку, знаходимо системи базисних функцій для апроксимації розв'язків.

Проілюструємо цей підхід при побудові базисних функцій для знаходження розв'язку для $u(s)$. Відповідно з розкладами (20) функцію $u(s)$ можна подати у вигляді

$$u(s) = \sum_{k=0}^m a_k s^{2k} + g_c \sum_{k=0}^{m_p} b_k (s - s_1)^k + g_s \sum_{k=0}^{m_p} c_k (s - s_1)^k, \quad (21)$$

де

$$g_c = \exp^{p(s-s_1)} \cos p(s - s_1), \quad g_s = \exp^{p(s-s_1)} \sin p(s - s_1).$$

Не порушуючи повноти зображення (21), його регулярну частину, для зручності, у подальшому подамо у вигляді

$$R[u] = \sum_{k=0}^m \tilde{a}_k (s^2 - s_1^2)^k.$$

Нехай функція $u(s)$ задовольняє граничну умову $u(s_1) = 0$. При цьому з (21) отримаємо $\tilde{a}_0 = -b_0$. З урахуванням останнього співвідношення вираз (21) набирає вигляду

$$u(s) = (s^2 - s_1^2) \sum_{k=0}^m a_k s^{2k} + (g_c - 1)b_0 + g_c \sum_{k=1}^{m_p-1} b_k (s - s_1)^k + g_s \sum_{k=0}^{m_p} c_k (s - s_1)^k. \quad (22)$$

Таким чином, система координатних функцій для $u(s)$ має структуру

$$\{U_i(s)\}_{i=1}^N = \{U_1, \dots, U_m, U_{m+1}, \dots, U_{m+m_p}, U_{m+m_p+1}, \dots, U_{m+2m_p}\}. \quad (23)$$

Тут виділені три групи функцій, відокремлених між собою крапкою з комою. Перша група з m функцій являє собою регулярний базис, який складається зі степеневих функцій. Друга та третя група із m_p функцій пов'язані з апроксимацією примежових розв'язків у околі точки $s = s_1$, які включають в себе функції g_c і g_s відповідно. Далі, не порушуючи повноти зображення регулярного розв'язку, степеневі функції, що входять у них, замінимо відповідними поліномами Лежандра, зберігаючи при цьому їхню асимптотичну поведінку при $s \rightarrow 0$. Доцільність такої заміни обумовлена тим, що амплітудні значення поліномів Лежандра (на відмінну від степеневого базису) не зростають на відрізку їхньої ортогональності при збільшенні їхнього порядку. Окрім цього зазначені поліноми можуть бути легко обчислені без помітної похибки за допомогою відомих рекурентних співвідношень. Все це дозволяє значною мірою збільшити порівняно зі степеневим базисом кількість наближень у розкладах при збереженні стійкості обчислювального процесу. Це сприяє можливості розширення діапазону вхідних параметрів задачі, для яких можна проводити обчислення із заданою точністю.

Таким чином, явні вирази координатних функцій для апроксимації $u(s)$ при жорсткому закріпленні торця при $s = s_1$ мають вигляд

$$U_1 = (s^2 - s_1^2), \quad U_i = (s^2 - s_1^2) \left[P_{2i-2} \left(\frac{s}{s_1} \right) - P_{2i-2}(0) \right], \quad i = 2, 3, \dots, m,$$

$$U_{m+1} = g_c - 1, \quad U_{m+2} = g_c(s - s_1), \quad U_{m+j} = g_c(s - s_1)^{j-1}, \quad (24)$$

$$U_{m+m_p+1} = g_s, \quad U_{m+m_p+2} = g_s(s - s_1), \quad U_{m+m_p+j} = g_s(s - s_1)^{j-1}, \quad j = 3, 4, \dots, m_p,$$

де $P_j(s)$ — поліноми Лежандра.

Структура системи координатних функцій для розв'язку $w(s)$ співпадає зі структурою (23). При цьому базисні функції для розв'язків, що задовольняють умови $w(s_1) = \left. \frac{dw}{ds} \right|_{s=s_1} = 0$, можна подати у вигляді

$$W_1 = (s^2 - s_1^2)^2, \quad W_i = (s^2 - s_1^2)^2 \left[P_{2i-2} \left(\frac{s}{s_1} \right) - P_{2i-2}(0) \right], \quad i = 2, 3, \dots, m,$$

$$W_{m+1} = g_c - 1 - \frac{p}{2s_1} (s^2 - s_1^2), \quad W_{m+2} = g_c(s - s_1) - \frac{1}{2s_1} (s^2 - s_1^2), \quad (25)$$

$$W_{m+j} = g_c(s - s_1)^{j-1}, \quad W_{m+m_p+1} = g_s - \frac{p}{2s_1} (s^2 - s_1^2), \quad W_{m+m_p+2} = g_s(s - s_1),$$

$$W_{m+m_p+j} = g_s(s - s_1)^{j-1}, \quad j = 3, 4, \dots, m_p.$$

При побудові розв'язків необхідно також враховувати встановлену вище їхню асимптотичну поведінку в околі вершини оболонки. При $s \rightarrow 0$ відповідно до формули (18) повинна виконуватися умова для розв'язків $u(s)$ та $w(s)$:

$$u(0) = -\cot(\alpha)w(0). \quad (26)$$

Наведемо далі формульну схему розв'язку розглядуваної задачі з використанням регулярних базисів для шуканих функцій.

Варіаційне рівняння вихідної спектральної задачі зручно навести у вигляді

$$\begin{aligned} \delta I = & \int_0^{s_1} [\Psi_{11}(u, \delta u) + \Psi_{12}(w, \delta u) + \Psi_{12}(\delta w, u) + \Psi_{22}(w, \delta w)] r ds - \\ & - \lambda^2 \int_0^{s_1} (u \delta u + w \delta w) r ds = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Введені тут диференціальні оператори $\Psi_{i,j}(p, q)$ визначаються за формулами

$$\begin{aligned} \Psi_{11}(p, q) &= \left(\frac{dp}{ds} + \frac{\nu}{s} p \right) \frac{dq}{ds} + \left(\frac{\nu}{s} \frac{dp}{ds} + \frac{1}{s^2} p \right) q, \\ \Psi_{12}(p, q) &= \frac{\nu}{s \tan \alpha} p \frac{dq}{ds} + \frac{1}{s^2 \tan \alpha} pq, \\ \Psi_{22}(p, q) &= \frac{1}{s^2 \tan^2 \alpha} pq + c^2 \left[\frac{d^2 p}{ds^2} \frac{d^2 q}{ds^2} + \left(\frac{\nu}{s} \frac{d^2 p}{ds^2} + \frac{1}{s^2} \frac{dp}{ds} \right) \frac{dq}{ds} + \frac{\nu}{s} \frac{dp}{ds} \frac{d^2 q}{ds^2} \right]. \end{aligned}$$

Для розв'язування варіаційної задачі (27) відповідно до методу Рітца подамо шукані функції у вигляді відрізків узагальнених рядів

$$u(s) = \sum_{j=1}^m x_j U_j(s), \quad w(s) = \sum_{j=1}^m x_{j+m} W_j(s). \quad (28)$$

Асимптотика розв'язків (26) встановлює зв'язок між першими коефіцієнтами розкладів (28):

$$x_{m+1} = \gamma x_1, \quad \gamma = \frac{\tan \alpha}{s_1^2}. \quad (29)$$

Співвідношення (29) забезпечує скінченність деформацій при $s \rightarrow 0$.

Для отримання алгебраїчної системи відносно невідомих x_j підставимо розв'язки (28) у рівняння (27); тоді з урахуванням співвідношення (29) отримаємо однорідну алгебраїчну систему порядку $2m - 1$:

$$(A - \lambda^2 B) \vec{X} = 0, \quad \vec{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+2}, \dots, x_{2m-1}\} \quad (30)$$

з симетричними матрицями A та B .

Симетричність матриці A впливає з симетричності оператора, породженого диференціальними рівняннями (2) та визначеного на класі функцій, що задовольняють граничні умови задачі та встановлені властивості поведінки розв'язків в околі регулярної особливості точки.

Із варіації функціонала, наведеного у вигляді (27), можна досить просто отримати вирази для елементів матриці A . При цьому елементи $a_{i,j}$ верхньої частини відносно головної діагоналі матриці A мають вигляд

$$a_{1,1} = \int_0^{s_1} [\Psi_{11}(U_1, U_1) + 2\gamma \Psi_{12}(W_1, U_1) + \gamma^2 \Psi_{22}(W_1, W_1)] r ds,$$

$$\begin{aligned}
 a_{1,j} &= \int_0^{s_1} [\Psi_{11}(U_j, U_1) + \gamma \Psi_{12}(W_1, U_j)] r ds, \\
 a_{1,m+j-1} &= \int_0^{s_1} [\Psi_{12}(W_j, U_1) + \gamma \Psi_{22}(W_j, W_1)] r ds, \quad j = 2, 3, \dots, m, \\
 a_{i,j} &= \int_0^{s_1} \Psi_{11}(U_j, U_i) r ds, \quad a_{m+i-1,m+j-1} = \int_0^{s_1} \Psi_{22}(W_j, W_i) r ds, \quad i = 2, 3, \dots, m, \quad j \geq i, \\
 a_{i,m+j-1} &= \int_0^{s_1} \Psi_{12}(W_j, U_i) r ds, \quad i, j = 2, 3, \dots, m.
 \end{aligned}$$

Далі ненульові елементи $b_{i,j}$ відповідної частини матриці B обчислюються за формулами

$$\begin{aligned}
 b_{1,1} &= \int_0^{s_1} (U_1^2 + \gamma^2 W_1^2) r ds, \quad b_{1,j} = \int_0^{s_1} U_j U_1 r ds, \\
 b_{1,m+j-1} &= \gamma \int_0^{s_1} W_j W_1 r ds, \quad j = 2, 3, \dots, m, \\
 b_{i,j} &= \int_0^{s_1} U_i U_j r ds, \quad b_{m+i-1,m+j-1} = \int_0^{s_1} W_i W_j r ds, \quad i = 2, 3, \dots, m, \quad j \geq i.
 \end{aligned}$$

Оскільки координатними функціями є многочлени, то при обчисленні інтегралів доцільно використовувати квадратурну формулу Гауса.

Якщо розглядати коливання конічної оболонки з вільним торцем при $s = s_1$, то шукані розв'язки повинні задовольняти граничні умови (6). Ці умови є природними граничними умовами для відповідного функціонала, оскільки вони будуть автоматично виконуватися на класі функцій, що надають йому екстремум.

Відповідно до цього регулярні координатні функції для апроксимації розв'язків $u(s)$ та $w(s)$ набирають вигляду

$$\begin{aligned}
 U_1 &= 1, \quad U_j = P_{2j-2}\left(\frac{s}{s_1}\right) - P_{2j-2}(0), \\
 W_1 &= 1, \quad W_j = U_j, \quad j = 2, 3, \dots, m.
 \end{aligned} \tag{31}$$

При цьому у співвідношеннях (29) необхідно покласти $\gamma = -\tan(\alpha)$.

4. Деякі результати розрахунків. Наявність малого параметра при старшій похідній є характерною особливістю рівнянь теорії тонких оболонок. Ця особливість визначає можливість застосування наближених методів їхнього розв'язування. Малий параметр у системі (2) приводить до того, що розглядувана задача переходить у розряд сингулярно збурених

спектральних задач. Це викликає суттєві труднощі при її чисельному розв'язуванні. Для їхнього подолання в опублікованих роботах використовувалися спеціальні методи. Так, у роботі [14] використано метод гасіння швидко зростаючих розв'язків, у роботі [3] — метод ортогоналізації С. К. Годунова. Ці методи дозволяють розширити область припустимих значень відносної товщини оболонки, але в той же час втрачають свою ефективність при достатньо малих її значеннях. Несприятливі для апроксимації швидко змінні розв'язки виділяються в явній формі у запропонованому методі Рітца [7–9].

Другою особливістю розглядуваної задачі є те, що деякі коефіцієнти рівнянь (2) при $s \rightarrow 0$ мають сингулярності. При чисельному інтегруванні цих рівнянь у літературі є різні рекомендації наближеного характеру, які дозволяють певною мірою вирішити цю проблему. Зокрема, пропонується вважати, що в полюсі оболонки є отвір малого радіуса r_0 з відповідними граничними умовами на контурі [2]. Такий підхід дозволяє з певною точністю обчислювати частоти коливань оболонки, але не дає можливості визначення її напружено-деформовного стану.

У даній роботі попередньо встановлюється формальна структура обмеженого розв'язку вихідних рівнянь в околі полюса оболонки, використовуючи аналітичну теорію систем диференціальних рівнянь із регулярною особливою точкою. На цій підставі побудовано координатні функції для апроксимації шуканих розв'язків.

Далі оцінимо можливості регулярного базису при розв'язуванні розглядуваної задачі з використанням методу Рітца. Наведемо результати розрахунку частот, форм власних коливань, зусиль та моментів, які виникають у серединній поверхні конкретної конічної оболонки з закріпленим торцем. Як характерний лінійний розмір оберемо радіус торця оболонки R_0 і покладемо коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,3$. Введемо до розгляду параметр $\delta = R_0/h$. Кут піврозтвору конуса α в усіх розрахунках дорівнює 45° .

У табл. 1 наведено перші п'ять безрозмірних частот λ_i для різних значень параметра δ залежно від числа наближень m у розкладах (28).

Значення нормального прогину w , меридіонального зусилля T_1 , згинального моменту M_1 та перерізувальної сили Q_1 у точці $s = 1,25$ для першої форми коливань оболонки залежно від числа наближень m у розкладах (28) наведено у табл. 2. Тут і далі довільна постійна при розв'язуванні однорідної алгебраїчної системи (30) визначалася з умови $w(s_1/2) = 1$.

Як і слід було очікувати, зменшення товщини оболонки приводить до необхідності збільшення кількості наближень у методі Рітца. Аналогічна збіжність спостерігається в усіх точках інтервалу інтегрування вихідних рівнянь.

Дані табл. 2 свідчать про те, що запропонований алгоритм з використанням регулярних координатних функцій забезпечує поточкову збіжність не лише самих розв'язків, але й їхніх перших трьох похідних у широкому діапазоні відносних товщин оболонки. При подальшому зменшенні товщини оболонки ($\delta > 2000$) для отримання розв'язків такої точності запропонований алгоритм стає неефективним, оскільки при збільшенні порядку алгебраїчної системи може відбутися втрата стійкості обчислювального процесу до досягнення граничних значень обчислюваних характеристик деформованої оболонки.

Розширення регулярного класу допустимих функцій функціями типу примежового шару призводить до зниження порядку алгебраїчної системи та дозволяє проводити обчислення при подальшому зменшенні товщини оболонки [8, 9].

Нижче на рис. 2 зображено поведінку функцій w , T_1 , M_1 та Q_1 для першої форми коливань оболонки залежно від аргументу s/s_1 при різних значеннях параметра δ .

Табл. 1. Значення перших п'яти безрозмірних частот λ_i коливань оболонки із закріпленим торцем залежно від кількості членів m у розкладах (28)

m	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
$\delta = 100$					
8	0,86784	0,98669	1,12998	1,24647	1,49808
10	0,86757	0,98437	1,12225	1,23145	1,42129
12	0,86756	0,98422	1,12118	1,22813	1,41129
14	0,86756	0,98422	1,12115	1,22765	1,40900
16	0,86756	0,98422	1,12114	1,22765	1,40869
18	0,86756	0,98422	1,12114	1,22765	1,40869
$\delta = 1000$					
12	0,74580	0,79123	0,84997	0,91620	1,01340
14	0,74557	0,79031	0,84529	0,89731	0,96288
16	0,74554	0,78998	0,84243	0,88810	0,94582
18	0,74554	0,78990	0,84176	0,88634	0,94051
20	0,74554	0,78989	0,84168	0,88601	0,93825
22	0,74554	0,78989	0,84167	0,88594	0,93756
24	0,74554	0,78989	0,84167	0,88593	0,93743
26	0,74554	0,78989	0,84167	0,88593	0,93741
28	0,74554	0,78989	0,84167	0,88593	0,93741
$\delta = 2000$					
16	0,72762	0,76078	0,80064	0,83802	0,88464
18	0,72759	0,76042	0,79815	0,83173	0,87508
20	0,72758	0,76034	0,79772	0,83057	0,87004
22	0,72758	0,76034	0,79765	0,82992	0,86677
24	0,72758	0,76034	0,79762	0,82972	0,86598
26	0,72758	0,76034	0,79762	0,82969	0,86585
28	0,72758	0,76034	0,79761	0,82969	0,86583
30	0,72758	0,76034	0,79761	0,82969	0,86582
32	0,72758	0,76034	0,79761	0,82969	0,86582

Всі розглядувані функції мають немонотонний характер. Найбільшу змінність зусилля T_1 та моменти M_1 мають в околі закріпленого торця оболонки і при $s \rightarrow 0$ експоненціально затухають, наближаючись до своїх малих граничних значень.

Таким чином, у полюсі оболонки виконуються граничні умови (7).

Основні гіпотези тонких оболонок (і зокрема Кірхгофа – Лява) базуються на припущенні, що відношенням h/R , $R = \min(R_1, R_2)$, можна знехтувати по відношенню до одиниці. Товстою називають таку оболонку, для якої це припущення не виконується. Для конічної

Табл. 2. Значення w , T_1 , M_1 , Q_1 у точці $s = 1.25$ для першої форми коливань залежно від кількості членів m у розкладах (28)

m	w	T_1	M_1	Q_1
$\delta = 100$				
8	0,80976E+00	0,78604E-01	0,24689E-03	-0,52622E-02
10	0,79840E+00	0,77232E-01	0,23750E-03	-0,52981E-02
12	0,79735E+00	0,76752E-01	0,23392E-03	-0,51925E-02
14	0,79732E+00	0,76667E-01	0,23462E-03	-0,52221E-02
16	0,79728E+00	0,76662E-01	0,23470E-03	-0,52230E-02
18	0,79728E+00	0,76661E-01	0,23470E-03	-0,52235E-02
20	0,79728E+00	0,76661E-01	0,23470E-03	-0,52235E-02
$\delta = 1000$				
12	0,10910E+01	0,20922E+00	-0,75553E-06	0,15192E-03
14	0,10903E+01	0,21150E+00	-0,14651E-05	0,18441E-03
16	0,10896E+01	0,21171E+00	-0,16437E-05	0,19259E-03
18	0,10897E+01	0,21176E+00	-0,17558E-05	0,19989E-03
20	0,10896E+01	0,21180E+00	-0,18073E-05	0,20245E-03
22	0,10898E+01	0,21182E+00	-0,18208E-05	0,20252E-03
24	0,10898E+01	0,21181E+00	-0,18224E-05	0,20235E-03
26	0,10898E+01	0,21181E+00	-0,18224E-05	0,20231E-03
28	0,10898E+01	0,21181E+00	-0,18224E-05	0,20231E-03
$\delta = 2000$				
18	0,84297E+00	0,19898E+00	-0,35565E-06	0,16166E-04
20	0,84235E+00	0,19890E+00	-0,30794E-06	0,14242E-04
22	0,84195E+00	0,19885E+00	-0,29536E-06	0,14239E-04
24	0,84192E+00	0,19886E+00	-0,29177E-06	0,14063E-04
26	0,84191E+00	0,19886E+00	-0,28954E-06	0,14015E-04
28	0,84189E+00	0,19886E+00	-0,28877E-06	0,14054E-04
30	0,84189E+00	0,19886E+00	-0,28864E-06	0,14070E-04
32	0,84189E+00	0,19886E+00	-0,28862E-06	0,14072E-04
34	0,84189E+00	0,19886E+00	-0,28862E-06	0,14072E-04

оболонки маємо $R = R_2 = s \tan \alpha$, тому двовимірна теорія оболонок в околі вершини конуса не придатна.

Для досягнення необхідної точності розв'язку не слід наближатися до вершини оболонки на відстань s^* , де $h/(s^* \tan \alpha) \ll 1$.

З метою з'ясування поведінки розв'язків в околі полюса конічної оболонки введемо до розгляду переміщення, спроектовані на нормаль до її осі обертання і на саму вісь Oz .

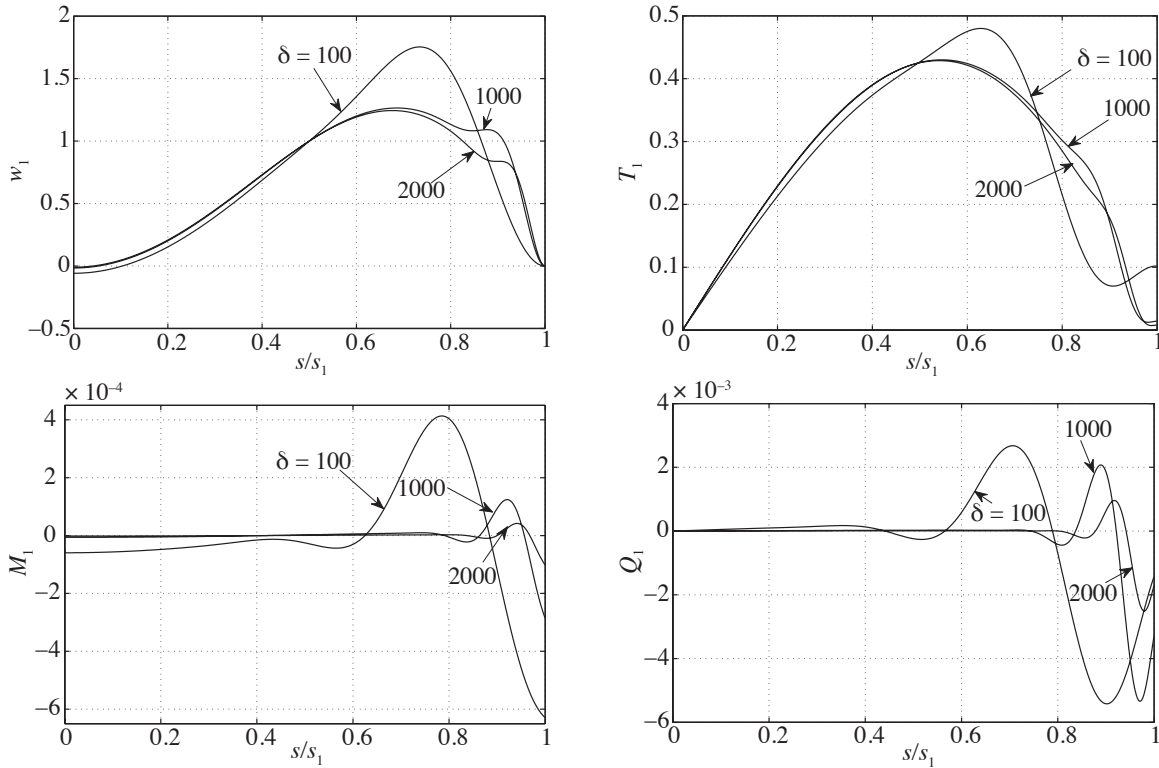


Рис. 2. Поведінка функцій w , T_1 , M_1 та Q_1 для першої форми коливань оболонки залежно від аргументу s/s_1 при різних значеннях параметра δ . (Значення функцій M_1 та Q_1 при $\delta = (1000; 2000)$ для наочності збільшено в десять разів.)

Відповідні переміщення позначимо через Δ_r та Δ_z ; вони виражаються через функції u і w таким чином:

$$\Delta_r = u \sin \alpha + w \cos \alpha, \quad \Delta_z = u \cos \alpha - w \sin \alpha. \quad (32)$$

У табл. 3 наведено значення Δ_z та Δ_r для перших двох нижчих форм коливань залежно від змінної s при різних значеннях параметра δ .

Дані табл. 3 свідчать про те, що оболонка в околі її вершини наближено рухається як єдине ціле в напрямку осі Oz (з урахуванням затухання напруженого стану при наближенні до вершини).

Таким чином, зазначені особливості деформування конічної оболонки в околі її полюса є певним виправданням застосування двовимірної теорії для розрахунку її коливань.

Наведемо порівняння результатів за запропонованим алгоритмом із наведеними в літературі даними при розв'язуванні розглядуваної задачі. В роботі [6] на основі тривимірної теорії пружності з використанням варіаційного методу наведено безрозмірні частоти коливань конічної оболонки з вершиною. При цьому як базисні функції для апроксимації переміщень оболонки були вибрані степеневі функції, а для подолання труднощів, пов'язаних із наявністю сингулярності, вважається, що в полюсі оболонки є отвір із малим радіусом.

У табл. 4 наведено значення перших чотирьох власних значень

$$\lambda_i^* = \sqrt{2\lambda_i^2(1+\nu)/(1-\nu^2)}$$

Табл. 3. Переміщення оболонки в околі її вершини

s	$\lambda = \lambda_1$		$\lambda = \lambda_2$	
	Δ_z	Δ_r	Δ_z	Δ_r
$\delta = 100$				
0,000	0,827E-01	0,000E-00	0,720E+00	0,000E-00
0,002	0,827E-01	0,772E-05	0,720E+00	0,166E-04
0,004	0,827E-01	0,309E-04	0,720E+00	0,666E-04
0,006	0,826E-01	0,695E-04	0,720E+00	0,150E-03
0,008	0,826E-01	0,124E-03	0,720E+00	0,266E-03
0,010	0,825E-01	0,193E-03	0,719E+00	0,416E-03
0,012	0,824E-01	0,278E-03	0,719E+00	0,599E-03
$\delta = 1000$				
0,000	0,228E-01	0,000E+00	-0,188E-01	0,000E+00
0,002	0,228E-01	0,806E-05	-0,188E-01	0,817E-05
0,004	0,227E-01	0,322E-04	-0,188E-01	0,327E-04
0,006	0,227E-01	0,725E-04	-0,188E-01	0,735E-04
0,008	0,226E-01	0,129E-03	-0,189E-01	0,131E-03
0,010	0,226E-01	0,201E-03	-0,190E-01	0,204E-03
0,012	0,225E-01	0,290E-03	-0,191E-01	0,294E-03

розглядуваної спектральної задачі, отриманих у даній роботі (перший рядок) і в роботі [6] (другий рядок) при різних значеннях кута піврозтвору α° та відносної товщини h/R_0 конуса. У третьому рядку наведено відносну похибку отриманого в даній роботі розв'язку, виражену в процентах.

Дані таблиці свідчать про те, що перші чотири частоти при відносній товщині $h/R = 0,03564$, обчислені за двовимірною технічною теорією оболонок, не перевищують похибку 2,36%. Зі зменшенням номера частоти ця похибка зменшується. При подальшому збільшенні (зменшенні) товщини оболонки похибка зростає (падає) відповідно.

Таким чином, цей приклад підтверджує правомірність використання двовимірної теорії при розрахунку конічної тонкостінної оболонки з вершиною.

5. Висновки. В роботі запропоновано алгоритм розрахунку осесиметричних коливань замкненої у вершині конічної оболонки обертання з використанням технічної теорії тонких оболонок. Побудова систем координатних функцій у методі Рітца здійснюється з урахуванням попередньо встановленої структури фундаментальної системи обмежених розв'язків вихідних рівнянь, які мають особливості, пов'язані з наявністю малого параметра при старшій похідній та сингулярності в полюсі оболонки. При цьому в базисних функціях виділяються дві групи. Перша група являє собою регулярний базис, побудований на класі степеневих функцій. Причому розклади для розв'язків $u(s)$ та $w(s)$ виявляються взаємозв'язаними, що забезпечує скінченність деформацій у полюсі оболонки. Друга група включає в себе примежові функції у вигляді добутків експоненціальної, тригонометричної

Табл. 4. Порівняння перших чотирьох безрозмірних частот λ_i^* , отриманих за запропонованим алгоритмом та алгоритмом роботи [6] для оболонки з жорстко закріпленим торцем

λ_i^*	$\alpha^\circ; h/R_0$				
	[15; 0,1405]	[30; 0,03564]	[45; 0,01470]	[60; 0,006954]	[75; 0,002898]
λ_1^*	0,986	1,719	1,528	1,082	0,560
	1,056	1,747	1,537	1,084	0,561
	6,63%	1,60%	0,59%	0,19%	0,18%
λ_2^*	2,070	1,885	1,742	1,251	0,650
	2,233	1,915	1,752	1,254	0,651
	7,30%	1,57%	0,57%	0,24%	0,15%
λ_3^*	2,130	2,214	1,999	1,481	0,774
	2,284	2,247	2,014	1,484	0,775
	6,74%	1,47%	0,75%	0,20%	0,13%
λ_4^*	2,541	2,654	2,273	1,694	0,892
	2,782	2,718	2,309	1,698	0,894
	8,66%	2,36%	1,56%	0,24%	0,22%

та степеневій функції. Ця група базисних функцій призначена для апроксимації розв'язків із великими градієнтами в околі граничного контуру оболонки.

Результати розрахунків із використанням лише регулярного базису показують, що він забезпечує збіжність у рівномірній метриці не лише самих розв'язків, але й їхніх перших трьох похідних при параметрах $\delta = R_0/h \leq 2000$. При подальшому збільшенні параметра δ (або з метою зменшення розмірності розв'язуваних алгебраїчних систем при $\delta \leq 2000$) необхідно до регулярного базису додавати координатні функції другої групи.

Дані розрахунків свідчать про те, що в малому околі вершини оболонки її напружений стан затухає, а сама оболонка рухається як єдине ціле в напрямку її осі обертання.

Запропонований підхід розв'язування задачі дозволяє визначати зусилля, моменти та перерізуючі сили в усіх точках серединної поверхні кінцевої оболонки; отже, його можна використовувати для аналізу її динамічної міцності.

Література

1. A. W. Leissa, *Vibrations of shells*, US Govt Print. Office, Washington DC, rpt. in ASA (1993).
2. А. В. Кармишин, В. А. Лясковец, В. И. Мяченков, А. Н. Фролов, *Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций*, Москва, Машиностроение (1975).
3. С. К. Годунов, *О численном решении краевых задач для систем линейных дифференциальных уравнений*, *Успехи мат. наук*, **16**, вып. 3(99), 171 – 174 (1961).
4. А. Л. Гольденвейзер, В. Б. Лидский, П. Е. Товстик, *Свободные колебания тонких упругих оболочек*, Москва, Наука (1979).
5. В. П. Шмаков, *Избранные труды по гидроупругости и динамике упругих конструкций*, Москва, Изд-во МГТУ им. Баумана (2011).

6. J. H. Kang, *Vibration analysis of complete conical shells with variable thickness*, Int. J. Struct. Stab. Dyn., **14**, № 4, 1–24 (2014).
7. В. А. Троценко, Ю. В. Троценко, *Решение задачи о собственных колебаниях незамкнутой оболочки вращения в условиях ее сингулярного возмущения*, Нелін. коливання, **8**, № 3, 415–432 (2005).
8. В. А. Троценко, Ю. В. Троценко, *Равномерно сходящийся метод Рунца в задаче об осесимметричных колебаниях оболочки вращения в форме купола*, Акуст. вісн., **11**, № 2, 45–57 (2008).
9. Ю. В. Троценко, *О построении координатных функций для метода Рунца при расчете неосесимметричных собственных колебаний оболочки вращения в форме купола*, Нелін. коливання, **18**, № 4, 555–574 (2015).
10. В. З. Власов, *Общая теория оболочек и ее приложения в технике*, Москва; Ленинград, Гостехиздат (1949).
11. В. Вазов, *Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений*, Москва, Мир (1968).
12. М. И. Вишик, Л. А. Люстерник, *Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром*, Успехи мат. наук, **12**, вып. 5(77), 3–122 (1957).
13. А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов, *Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений*, Москва, Наука (1973).
14. M. S. Zarghamee, H. R. Robinson, *A numerical method for analysis of free vibration of spherical shell*, AIAA J., **5**, № 7, 1256–1261 (1967).

Одержано 29.05.20,
після доопрацювання — 01.07.20