УДК 517.9

ПРО ІНВАРІАНТНІ ТОРИ КВАЗІЛІНІЙНИХ ЗЛІЧЕННИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ, ВИЗНАЧЕНИХ НА НЕСКІНЧЕННОВИМІРНИХ ТОРАХ

Ю. В. Теплінський

Кам'янець-Поділ. нац. ун-т ім. І. Огієнка
вул. Огієнка, 61, Кам'янець-Подільський, 32300, Україна
e-mail: triton1950@ukr.net

A countable quasilinear system of differential equations defined on an infinite-dimensional torus is considered. The problem is to find sufficient conditions under which the given system of equations has an invariant torus in the space of bounded number sequences whose generating function can be approximated with any given precision by a generating function of the invariant torus for some countable linear system defined on a finite-dimensional torus. This allows one to approximate with any given precision a one-parameter family of solutions almost periodic in the Bohr sense of a given system of equations by a family of quasiperiodic solutions of the above-mentioned linear system uniformly in the parameter.

Розглянуто зліченну квазілінійну систему диференціальних рівнянь, визначену на нескінченновимірному торі. Задача полягає у знаходженні достатніх умов, при яких задана система рівнянь має інваріантний тор у просторі обмежених числових послідовностей, породжуючу функцію якого можна з наперед заданою точністю наблизити породжуючою функцією інваріантного тора деякої зліченної лінійної системи, визначеної на скінченновимірному торі. Це дає можливість із наперед заданою точністю наблизити однопараметричну сім'ю майже періодичних у сенсі Бора розв'язків заданої системи рівнянь сім'єю квазіперіодичних розв'язків вказаної лінійної системи рівномірно відносно параметра.

1. Вступ. Добре відомо, що значна кількість прикладних задач потребує дослідження проблем існування коливних розв'язків диференціальних систем, що є їхніми математичними моделями. Коливними рухами динамічних систем за В. В. Немицьким [1] називають їхні рекурентні рухи, до класу яких зокрема належать квазіперіодичні та майже періодичні рухи [2, 3]. Широко відомі фундаментальні теореми Амеріо і Фавара [4], що стосуються існування майже періодичних розв'язків нелінійних та лінійних систем, визначених у скінченновимірних просторах. Пізніше теорія Амеріо – Фавара удосконалювалася і розвивалася багатьма відомими математиками, зокрема для рівнянь у нескінченновимірних просторах. Нарешті стало зрозумілим, що питання існування таких розв'язків тісно пов'язане з існуванням у таких систем інваріантних торів, для побудови яких зручно застосовувати метод функції Гріна – Самойленка [5 – 7]. Розвитку цього методу для еволюційних рівнянь різного вигляду у банаховому просторі обмежених числових послідовностей присвячено, наприклад, монографії А. М. Самойленка та Ю. В. Теплінського [6, 8, 9].

У цій статті розглядається квазілінійна система диференціальних рівнянь, яка визначена на декартовому добутку множини з простору обмежених послідовностей дійсних чисел та нескінченновимірного тору. Задача полягає у відшуканні достатніх умов, при яких задана система рівнянь має інваріантний тор у просторі обмежених числових послідовностей, породжуючу функцію якого можна з наперед заданою точністю наблизити породжуючою функцією інваріантного тору деякої зліченної лінійної системи, визначеної на скінченновимірному торі. Це дає можливість із наперед заданою точністю наблизити однопараметричну сім'ю майже періодичних у сенсі Бора розв'язків даної системи рівнянь сім'єю квазіперіодичних розв'язків указаної лінійної системи рівномірно відносно параметра.

2. Постановка задачі. Розглянемо квазілінійну систему диференціальних рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega, \qquad \frac{dx}{dt} = A(\varphi)x + \varepsilon f(\varphi, x), \tag{1}$$

де ε — додатний числовий параметр, вектор частот $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots) \in \mathbf{m}$, $\omega_i > 0$ при всіх натуральних i, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots)$, $A(\varphi) = (a_{i,j}(\varphi))_{i,j=1}^{\infty}$ — нескінченна матриця з дійсними елементами, $\mathbf{m}$ — простір обмежених послідовностей дійсних чисел,

$$\|\omega\| = \sup_i\{\omega_i\} = \omega_0 < \infty, \qquad x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in \mathbf{m}, \qquad \|\omega\| = \sup_i\{|x_i|\},$$

$f(\varphi, x) = \big(f_1(\varphi, x), f_2(\varphi, x), \dots, f_n(\varphi, x), \dots\big)$ — векторна функція з дійсними координатами, причому матриця $A(\varphi)$ та функція $f(\varphi, x)$ 2π-періодичні відносно φ_i, $i = 1, 2, 3, \dots$, що дає можливість визначити їх на нескінченновимірному торі $\mathbf{\Theta}_\infty$ та декартовому добутку $\mathbf{\Theta}_\infty \times D$, $D = \{x \in \mathbf{m} \mid \|x\| \le d = \mathrm{const} < \infty\}$ відповідно і вважати неперервними на своїх областях визначення. Вважатимемо також, що

$$\sup_i \sum_{j=1}^{\infty} \sup_{\varphi \in \mathbf{\Theta}_\infty} |a_{ij}(\varphi)| = A = \mathrm{const} < \infty.$$

Підставивши розв'язок першого рівняння системи (1) $\varphi = \omega t + \phi$ з початковою умовою $\varphi(0) = \phi \in \mathbf{\Theta}_\infty$ у друге її рівняння, одержимо систему

$$\frac{dx}{dt} = A(\omega t + \phi)x + \varepsilon f(\omega t + \phi, x), \tag{2}$$

залежну від $\phi \in \mathbf{\Theta}_\infty$ як від параметра, $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots)$.

Основна задача полягає в одержанні достатніх умов, при яких система рівнянь (1) має інваріантний тор.

Нагадаємо, що інваріантним тором системи рівнянь (1) називають поверхню $\mathbf{T}$ в просторі $\mathbf{m}$, визначену відображенням $u(\phi) : \mathbf{\Theta}_\infty \to \mathbf{m}$, а саме:

$$x = u(\phi) = \{u_1(\phi), u_2(\phi), \dots, u_n(\phi), \dots\}, \quad \phi \in \mathbf{\Theta}_\infty,$$

при умові, що функція $u(\phi) \in C^0(\mathbf{\Theta}_\infty)$, обмежена на $\mathbf{\Theta}_\infty$, функції $u_i(\omega t + \phi)$, $i = 1, 2, 3, \dots$, неперервно диференційовні по $t \in R^1$ і

$$\frac{du(\omega t + \phi)}{dt} = A(\omega t + \phi)u(\omega t + \phi) + \varepsilon f(\omega t + \phi, u(\omega t + \phi)) \tag{3}$$

для всіх $t \in R^1$, $\phi \in \mathbf{\Theta}_\infty$, де векторну функцію $u(\omega t + \phi)$ диференціюємо в покоординатному сенсі.

3. Основна частина. Норми вектора $u(\varphi)$ та матриці $A(\varphi)$ визначимо рівностями

$$\|u(\varphi)\| = \sup_i\{|u_i(\varphi)|\}, \qquad \|\varphi\| = \sup_i\{|\varphi_i|\},$$

$$\|A(\varphi)\| = \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}(\varphi)|, \qquad \|f(\varphi, x)\| = \sup_i\{|f_i(\varphi, x)|\},$$

$$\|u(\varphi)\|_0 = \sup_{\phi\in\mathbf{\Theta}_\infty} \|u(\varphi)\|, \qquad \|A(\varphi)\|_0 = \sup_{\phi\in\mathbf{\Theta}_\infty} \|A(\varphi)\|.$$

Очевидно, що

$$\|A(\varphi)\| \leq \|A(\varphi)\|_0 \leq \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} \sup_{\varphi\in\mathbf{\Theta}_\infty} |a_{ij}(\varphi)| = A.$$

Вважатимемо, що при всіх $\phi \in \mathbf{\Theta}_\infty,\ x \in D$ виконуються нерівності $\|f(\varphi, x)\| \leq F$ та $\|\phi\| \leq 2\pi,$ де F — додатна стала.

У [6] доведено, що при вказаних вище умовах однорідна система рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = A(\omega t + \phi)x, \tag{4}$$

що відповідає системі (2), має матрицант $\Omega_\tau^t(\phi) = (\omega_{ij}(t, \tau, \phi))_{i,j=1}^{\infty}$.

Лема 1. *Нехай матрицант системи рівнянь (4) задовольняє умови*

$$\begin{gathered} \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} \sup_{(t,\tau,\phi)\in R^1\times R^1\times\mathbf{\Theta}_\infty} \big|\omega_{ij}(t, \tau, \varphi)\big| < \infty, \\ \big\|\Omega_\tau^t(\phi)\big\| \leq K\exp\{-\gamma|t-\tau|\}, \end{gathered} \tag{5}$$

де K та γ — додатні сталі, що не залежать від $t,\ \tau,\ \phi$. Тоді він неперервний у сенсі норми $\|\cdot\|$ по змінній $\tau \in R^1$ рівномірно відносно $\phi \in \mathbf{\Theta}_\infty$.

Доведення. Розглянемо випадок, коли $\tau < \tau + \Delta\tau < t$, де $\Delta\tau$ — приріст аргументу τ. З очевидної рівності

$$\Omega_{\tau+\Delta\tau}^t(\phi) - \Omega_\tau^t(\phi) = \int_\tau^t A(\omega t + \phi) = \big\{\Omega_{\tau+\Delta\tau}^t(\phi) - \Omega_\tau^t(\phi)\big\}dt - \int_\tau^{t+\Delta\tau} A(\omega t + \phi)\Omega_{\tau+\Delta\tau}^t(\phi)dt$$

випливає нерівність

$$\big\|\Omega_{\tau+\Delta\tau}^t(\phi) - \Omega_\tau^t(\phi)\big\| \leq A\int_\tau^t \big\|\Omega_{\tau+\Delta\tau}^t(\phi) - \Omega_\tau^t(\phi)\big\|dt + AK\Delta\tau,$$

з якої одержуємо оцінку

$$\big\|\Omega_{\tau+\Delta\tau}^t(\phi) - \Omega_\tau^t(\phi)\big\| \leq AK\Delta\tau\exp\{A(t-\tau)\}.$$

Якщо ж $\tau + \Delta\tau < \tau < t,$ то остання оцінка набирає вигляду

$$\left\|\Omega^t_{\tau+\Delta\tau}(\phi) - \Omega^t_\tau(\phi)\right\| \le AK|\Delta\tau| \exp\{A(t-\tau)\}.$$

Випадок, коли $\tau > t,$ розглядається аналогічно. Всі ці випадки можна об'єднати однією нерівністю

$$\left\|\Omega^t_{\tau+\Delta\tau}(\phi) - \Omega^t_\tau(\phi)\right\| \le AK|\Delta\tau| \exp\{A|t-\tau|\},$$

яка й завершує доведення леми 1.

Лема 2. *Нехай виконуються умови (5) і матриця $A(\phi)$ є ліпшицевою на $\mathbf{\Theta}_\infty$ з коефіцієнтом $L_1 = \mathrm{const} > 0,$ тобто*

$$\left\|A(\phi) - A(\overline{\phi})\right\| \le \left\|\phi - \overline{\phi}\right\| \quad \forall\{\phi, \overline{\phi}\} \subset \mathbf{\Theta}_\infty.$$

Тоді матрицант $\Omega^t_\tau(\phi)$ неперервний у сенсі норми $\|\cdot\|$ відносно параметра $\phi \in \mathbf{\Theta}_\infty.$

Доведення. Легко переконатися, що справджується рівність

$$\Omega^t_\tau(\phi) + \Delta\phi) - \Omega^t_\tau(\phi) = \int\limits_\tau^t A(\phi + \Delta\phi)\big\{\Omega^t_\tau(\phi + \Delta\phi) - \Omega^t_\tau(\phi)\big\}dt +$$

$$+ \int\limits_\tau^t \big\{A(\phi + \Delta\phi) - A(\phi)\big\}\Omega^t_\tau(\phi)dt,$$

з якої при $\tau < t$ випливає нерівність

$$\left\|\Omega^t_\tau(\phi) + \Delta\phi) - \Omega^t_\tau(\phi)\right\| \le A\int\limits_\tau^t \left\|\Omega^t_\tau(\phi) + \Delta\phi) - \Omega^t_\tau(\phi)\right\|dt + \frac{KL_1}{\gamma}\|\Delta\phi\|.$$

Звідси одержуємо оцінку

$$\left\|\Omega^t_\tau(\phi) + \Delta\phi) - \Omega^t_\tau(\phi)\right\| \le \frac{KL_1}{\gamma}\|\Delta\phi\| \exp\{A(t-\tau)\}.$$

Розглянувши додатково випадок, коли $\tau \ge t,$ приходимо до загальної оцінки

$$\left\|\Omega^t_\tau(\phi) + \Delta\phi) - \Omega^t_\tau(\phi)\right\| \le \frac{KL_1}{\gamma}\|\Delta\phi\| \exp\{A|t-\tau|\},$$

яка й завершує доведення леми 2, але є досить незручною, оскільки її права частина містить τ і $t.$ У доведенні наступної теореми ми усунемо цей недолік.

Теорема 1. *Нехай система рівнянь (2) така, що:*

1. Функція $f(\varphi, x)$ є ліпшицевою на множині $\mathbf{\Theta}_\infty \times D$ відносно (φ, x) з коефіцієнтом $L = \mathrm{const} > 0,$ тобто

$$\left\|f(\varphi, x) - f(\overline{\varphi}, \overline{x})\right\| \le L\big\{\|\varphi - \overline{\varphi}\| + \|x - \overline{x}\|\big\} \quad \forall\{\varphi, \overline{\varphi}\} \subset \mathbf{\Theta}_\infty, \quad \{x, \bar{x}\} \subset D.$$

2. Виконуються умови леми 2.

3. Параметр ε задовольняє нерівність

$$\varepsilon < \min\left\{\frac{\gamma}{KL}; \frac{\gamma d}{KF}; \frac{1}{L}\right\}.$$

Тоді система рівнянь (1) визначає інваріантний тор $\mathbf{T}$.

Доведення. Друга умова теореми забезпечує існування для системи рівнянь (4) функції Гріна – Самойленка задачі про лінійні розширення динамічних систем на торах, що має вигляд

$$G_0(\tau, \phi) = \begin{cases} \Omega^0_\tau(\phi), & \text{якщо} \quad \tau \le 0, \\ 0, & \text{якщо} \quad \tau > 0. \end{cases}$$

Розглянемо тепер лінеаризовану систему рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = A(\omega t + \phi)x + \varepsilon f(\omega t + \phi, 0). \tag{6}$$

За умов теореми 1 виконуються очевидні аналоги наведених в [6] достатніх умов, при яких ця лінійна відносно x система має інваріантний тор $\mathbf{T^0}$, породжений функцією

$$u^0(\phi) = \varepsilon \int\limits_{-\infty}^{0} \Omega^0_\tau(\phi) f(\omega\tau + \phi, 0) d\tau,$$

причому $\left\|u^0(\phi)\right\| \le \dfrac{\varepsilon KF}{\gamma} < d$. Цей тор вкритий траєкторіями розв'язків $x^0(t, \phi)$ рівняння (6), що залежать від параметра $\phi \in \mathbf{\Theta}_\infty$ і визначаються рівностями

$$x^0(t, \phi) = u^0(\omega t + \phi) = \varepsilon \int\limits_{-\infty}^{t} \Omega^t_\tau(\phi) f(\omega\tau + \phi, 0) d\tau.$$

Покажемо, що функція $u^0(\phi)$ неперервна відносно $\phi \in \mathbf{\Theta}_\infty$, тобто $u^0(\phi) \in C^0(\mathbf{\Theta}_\infty)$.

Очевидно, що $\forall\{\phi, \bar\phi\} \subset \mathbf{\Theta}_\infty$ різниця $X(t) = \Omega^t_\tau(\phi) - \Omega^t_\tau(\bar\phi)$ є обмеженим матричним розв'язком неоднорідного рівняння

$$\frac{dX(t)}{dt} = A(\omega t + \phi)X(t) + \left\{A(\omega t + \phi) - A(\omega t + \bar\phi)\right\}\Omega^t_\tau(\bar\phi).$$

Але, як неважко переконатися, матрична функція

$$Z(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} \Omega^t_s(\phi)\left\{A(\omega s + \phi) - A(\omega s + \bar\phi)\right\}\Omega^s_\tau(\bar\phi) ds \tag{7}$$

теж є його обмеженим розв'язком, звідки з урахуванням умови (5) випливає, що $X(t) = Z(t)$ при всіх $t \in R^1$. Це дозволяє одержати оцінку

$$\left\|\Omega^0_\tau(\phi) - \Omega^0_\tau(\bar\phi)\right\| = \|Z(0)\| \le \frac{K^2 L_1}{\gamma}\|\phi - \bar\phi\|.$$

Врахувавши другу з умов (5), одержуємо оцінку

$$\big\|\Omega_\tau^0(\phi)-\Omega_\tau^0(\bar\phi)\big\| \le \left(\frac{2K^3L_1}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} \|\phi-\bar\phi\|^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{\gamma}{2}|\tau|\right\}.$$

Тепер можемо записати ланцюжок нерівностей

$$\big\|u^0(\phi)-u^0(\bar\phi)\big\| \le \varepsilon\int\limits_{-\infty}^{0} \big\|\Omega_\tau^0(\phi)-\Omega_\tau^0(\bar\phi)\big\| \|f(\omega\tau+\phi,0)\| d\tau +$$

$$+\,\varepsilon\int\limits_{-\infty}^{0} \big\|\Omega_\tau^0(\bar\phi)\big\| \big\|f(\omega\tau+\phi,0)-f(\omega\tau+\bar\phi,0)\big\| d\tau \le$$

$$\le \varepsilon\left\{\frac{2F}{\gamma}\left(\frac{2K^3L_1}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} \|\phi-\bar\phi\|^{\frac{1}{2}} + L\|\phi-\bar\phi\|\right\}. \qquad (8)$$

Зрозуміло, що система

$$\frac{dx}{dt} = A(\omega t+\phi)x + \varepsilon f(\omega t+\phi, u^0(\omega t+\phi))$$

також має інваріантний тор $\mathbf{T^1}$, породжений функцією

$$u^1(\phi) = \varepsilon\int\limits_{-\infty}^{0} \Omega_\tau^0(\phi) f(\omega\tau+\phi, u^0(\omega\tau+\phi)) d\tau,$$

причому $\|u^1(\phi)\| < d$ і справджуються співвідношення

$$\big\|u^1(\phi)-u^1(\bar\phi)\big\| \le \varepsilon\int\limits_{-\infty}^{0} \big\|\Omega_\tau^0(\phi)-\Omega_\tau^0(\bar\phi)\big\| \big\|f(\omega\tau+\phi, u^0(\omega\tau+\phi))\big\| d\tau +$$

$$+\,\varepsilon\int\limits_{-\infty}^{0} \big\|\Omega_\tau^0(\bar\phi)\big\| \|f(\omega\tau+\phi, u^0(\omega\tau+\phi)) - f(\omega\tau+\bar\phi, u^0(\omega\tau+\bar\phi))| d\tau \le$$

$$\le \varepsilon(1+\varepsilon L)\left\{\frac{2F}{\gamma}\left(\frac{2K^3L_1}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} \|\phi-\bar\phi\|^{\frac{1}{2}} + L\|\phi-\bar\phi\|\right\} =$$

$$= (1+\varepsilon L)\big\|u^0(\phi)-u^0(\bar\phi)\big\|.$$

Цілком аналогічно переконуємося, що система

$$\frac{dx}{dt} = A(\omega t+\phi)x + \varepsilon f(\omega t+\phi, u^1(\omega t+\phi))$$

також визначає інваріантний тор $\mathbf{T^2}$, породжений функцією

$$u^2(\phi) = \varepsilon \int\limits_{-\infty}^{0} \Omega_\tau^0(\phi) f(\omega\tau + \phi, u^1(\omega\tau + \phi)) d\tau,$$

$\|u^2(\phi)\| < d$ і справджуються співвідношення

$$\left\|u^2(\phi) - u^2(\bar\phi)\right\| \le \varepsilon \int\limits_{-\infty}^{0} \left\|\Omega_\tau^0(\phi) - \Omega_\tau^0(\bar\phi)\right\| \left\|f(\omega\tau + \phi, u^1(\omega\tau + \phi))\right\| d\tau +$$

$$+ \varepsilon \int\limits_{-\infty}^{0} \left\|\Omega_\tau^0(\bar\phi)\right\| \left\|f(\omega\tau + \phi, u^1(\omega\tau + \phi)) - f(\omega\tau + \bar\phi, u^1(\omega\tau + \bar\phi))\right\| d\tau \le$$

$$\le (1 + \varepsilon L + (\varepsilon L)^2) \left\|u^0(\phi) - u^0(\bar\phi)\right\|.$$

Продовживши цей процес, методом повної математичної індукції легко показати, що при будь-якому натуральному n система рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = A(\omega t + \phi)x + \varepsilon f(\omega t + \phi, u^{n-1}(\omega t + \phi)) \tag{9}$$

визначає інваріантний тор $\mathbf{T^n}$, породжений функцією

$$u^n(\phi) = \varepsilon \int\limits_{-\infty}^{0} \Omega_\tau^0(\phi) f(\omega\tau + \phi, u^{n-1}(\omega\tau + \phi)) d\tau$$

та вкритий траєкторіями розв'язків $x^n(t, \phi)$ системи (9), які визначаються рівностями

$$x^n(t, \phi) = u^n(\omega t + \phi) = \varepsilon \int\limits_{-\infty}^{t} \Omega_\tau^t(\phi) f(\omega\tau + \phi, u^{n-1}(\omega\tau + \phi)) d\tau.$$

При цьому $\|u^n(\phi)\| < d$ і

$$\left\|u^n(\phi) - u^n(\bar\phi)\right\| \le (1 + \varepsilon L + (\varepsilon L)^2 + \ldots + (\varepsilon L)^n) \left\|u^0(\phi) - u^0(\bar\phi)\right\|. \tag{10}$$

Використавши оцінку

$$\left\|f(\omega\tau + \phi, 0) - f(\omega\tau + \bar\phi, 0)\right\| \le (2LF)^{\frac{1}{2}} \|\phi - \bar\phi\|^{\frac{1}{2}},$$

із співвідношень (8) одержуємо, що

$$\left\|u^0(\phi) - u^0(\bar\phi)\right\| \le \varepsilon\lambda_0 \|\phi - \bar\phi\|^{\frac{1}{2}},$$

де

$$\lambda_0 = \frac{1}{\gamma} \left\{ 2F \left(\frac{2K^3 L_1}{\gamma} \right)^{\frac{1}{2}} + (2LF)^{\frac{1}{2}} \right\} = \text{const} > 0.$$

Отже, функція $u^0(\phi)$ відносно ϕ задовольняє умову Гельдера з показником $\dfrac{1}{2}$, а тому таку ж властивість мають функції $u^n(\phi)$ при всіх натуральних n. Оскільки за третьою умовою теореми $\varepsilon L < 1$, то

$$\left\|u^n(\phi) - u^n(\bar{\phi})\right\| \leq \frac{\varepsilon\lambda_0}{1-\varepsilon L}\|\phi - \bar{\phi}\|^{\frac{1}{2}}.$$

Таким чином,

$$\{u^n(\phi)\}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots, \tag{11}$$

є рівностепенево відносно n неперервною послідовністю рівномірно неперервних по $\phi \in$ $\in \mathbf{\Theta}_\infty$ функцій. Це означає, що для всіх $t \in R^1$, $\phi \in \mathbf{\Theta}_\infty$ справджується рівність

$$\frac{du^n(\omega t + \phi)}{dt} = A(\omega t + \phi)u^n(\omega t + \phi) + \varepsilon f(\omega t + \phi, u^n(\omega t + \phi)). \tag{12}$$

Покажемо, що послідовність (11) при $n \to \infty$ збігається до деякої функції $u(\phi) : \mathbf{\Theta}_\infty \to$ $\to \mathbf{m}$ рівномірно відносно $\phi \in \mathbf{\Theta}_\infty$. Легко побачити, що для цього достатньо переконатися у рівномірній збіжності ряду

$$u^0(\phi) + \sum_{i=1}^{\infty}(u^i(\phi) - u^{i-1}(\phi)). \tag{13}$$

Виконуються нерівності

$$\left\|u^0(\phi)\right\|_0 \leq \frac{KF\varepsilon}{\gamma},$$

$$\|u^1(\phi) - u^0(\phi)\|_0 \leq \frac{K^2LF\varepsilon^2}{\gamma^2} = C^* = \mathrm{const} > 0,$$

які ведуть до індуктивної оцінки

$$\left\|u^n(\phi) - u^{n-1}(\phi)\right\|_0 \leq \left(\frac{KL\varepsilon}{\gamma}\right)^{n-1} C^*.$$

Позначимо дріб $\dfrac{KL\varepsilon}{\gamma}$ через p. За третьою умовою теореми $p < 1$. Тоді послідовність (11) фундаментальна в просторі $\mathbf{m}$ при кожному $\phi \in \mathbf{\Theta}_\infty$. Дійсно, нехай $n > k$. Тоді

$$\left\|u^n(\phi) - u^k(\phi)\right\| \leq \left\|u^n(\phi) - u^{n-1}(\phi)\right\| + \ldots + \left\|u^{k+1}(\phi) - u^k(\phi)\right\| \leq$$

$$\leq C^* \sum_{i=n-1}^{k} p^i \leq C^* \sum_{i=k}^{\infty} p^i = C^* \frac{p^k}{1-p} \to 0$$

при $k \to \infty$, тобто вказана послідовність фундаментальна. З повноти простору $\mathbf{m}$ випливає її збіжність при кожному $\phi \in \mathbf{\Theta}_\infty$. Очевидно, що ця збіжність рівномірна відносно $\phi \in \mathbf{\Theta}_\infty$, оскільки ряд (13) мажорується збіжним числовим рядом

$$\left\|u^0(\phi)\right\|_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left\|u^n(\phi) - u^{n-1}(\phi)\right\|_0, \tag{14}$$

сума якого дорівнює $\dfrac{KF\varepsilon}{\gamma} + \dfrac{C^*}{1-p}$. Залишається довести тотожність (3). Для цього достатньо перейти до границі при $n \to \infty$ у тотожності (12). 2π-періодичність функції $u(\phi)$ відносно $\phi_i,\ i = 1, 2, 3, \ldots,$ є очевидною.

На завершення доведення надамо оцінку точності наближення функції $u(\phi)$ функцією $u^k(\phi)$. Залишкові члени рядів (13) та (14) позначимо через $R_k(\phi)$ та $R_k^0(\phi)$ відповідно. Неважко переконатися, що виконуються нерівності

$$\|R_k(\phi)\| \leq \left\|R_k^0(\phi)\right\|_0 \leq C^* \frac{p^k}{1-p},$$

з яких випливає, що $\left\|u(\phi) - u^k(\phi)\right\| \leq C^* \dfrac{p^k}{1-p}$ при всіх $\phi \in \mathbf{\Theta}_\infty$. Аналогічна оцінка $\left\|x(t,\phi) - x^k(t,\phi)\right\| \leq C^* \dfrac{p^k}{1-p}$ виконується і для розв'язків $x(t,\phi)$ та $x^k(t,\phi)$ систем рівнянь (2) та (9) відповідно.

Теорему 1 доведено.

Тепер повернемося до системи рівнянь (9) і розглянемо відповідну їй укорочену відносно ϕ до m-го порядку визначену на m-вимірному торі $\mathbf{\Theta}_m$ систему рівнянь вигляду

$$\frac{dx}{dt} = A_0\big(\omega^{(m)}t + \phi^{(m)}\big)x + \varepsilon f_0\big(\omega^{(m)}t + \phi^{(m)}, u^{n-1}(\omega^{(m)}t + \phi^{(m)})\big), \tag{15}$$

де

$$\varphi^{(m)} = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m), \qquad \omega^{(m)} = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m), \qquad \phi^{(m)} = (\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_m),$$
$$A_0(\varphi^{(m)}) = A(\varphi^{(m)}, 0, 0, \ldots), \qquad f_0(\varphi^{(m)}, x) = f(\varphi^{(m)}, 0, 0, \ldots, x).$$

З умови (5) випливає, що матрицант $\Omega_\tau^t(\phi^{(m)})$ однорідної системи

$$\frac{dx}{dt} = A_0\big(\omega^{(m)}t + \phi^{(m)}\big)x$$

задовольняє нерівність

$$\left\|\Omega_\tau^t(\phi^{(m)})\right\| \leq K \exp\{-\gamma|t-\tau|\},$$

де K та γ — додатні сталі, що не залежать від $t,\ \tau$ та будь-якого натурального числа m. Тоді система (15) має інваріантний тор $\mathbf{T}^{n,m}$, що породжується функцією

$$u^n(\phi^{(m)}) = \varepsilon \int\limits_{-\infty}^{0} \Omega_\tau^0(\phi^{(m)}) f_0\big(\omega^{(m)}\tau + \phi^{(m)}, u^{n-1}(\omega^{(m)}\tau + \phi^{(m)})\big)d\tau,$$

і сім'ю розв'язків $x^n(t,\phi^{(m)})$, які залежать від параметра $\phi^{(m)} \in \mathbf{\Theta}_m$, траєкторії яких належать цьому інваріантному тору:

$$x^n(t,\phi^{(m)}) = u^n\big(\omega^{(m)}t + \phi^{(m)}\big) = \varepsilon \int\limits_{-\infty}^{t} \Omega_\tau^t(\phi^{(m)}) f_0\big(\omega^{(m)}\tau + \phi^{(m)}, u^{n-1}(\omega^{(m)}\tau + \phi^{(m)})\big)d\tau.$$

Говорять, що матриця $A(\varphi)$ задовольняє посилену умову Коші – Ліпшиця відносно φ з коефіцієнтом $\varepsilon(m)$, якщо

$$\big\|A\big(\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_m,\varphi_{m+1},\varphi_{m+2},\ldots\big)-A\big(\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_m,\overline{\varphi_{m+1}},\overline{\varphi_{m+2}},\ldots\big)\big\|\le$$
$$\le L_1(m)\sup\big\{|\varphi_{m+1}-\overline{\varphi_{m+1}}|,|\varphi_{m+2}-\overline{\varphi_{m+2}}|,\ldots\big\}, \tag{16}$$

де $m=0,1,2,\ldots;\ L_1(m)\to 0$ при $m\to\infty$, а $(\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_m,\varphi_{m+1},\varphi_{m+2},\ldots)$ та $(\varphi_1,\varphi_2,\ldots$ $\ldots,\varphi_m,\ \overline{\varphi_{m+1}},\ \overline{\varphi_{m+2}},\ldots)$ — довільні точки з $\mathbf{\Theta}_\infty$, перші m відповідних координат яких попарно співпадають.

Зазначимо також, що функція $f(\varphi,x)$ задовольняє посилену умову Коші – Ліпшиця відносно φ, якщо

$$\big\|f(\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_m,\varphi_{m+1},\varphi_{m+2},\ldots;x)-f(\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_m,\overline{\varphi_{m+1}},\overline{\varphi_{m+2}},\ldots;x)\big\|\le$$
$$\le L(m)\sup\big\{|\varphi_{m+1}-\overline{\varphi_{m+1}}|,|\varphi_{m+2}-\overline{\varphi_{m+2}}|,\ldots\big\}+L\|x-\bar{x}\| \tag{17}$$

при будь-яких $\{x,\bar{x}\}\subset D$, а $L(m)\to 0$ при $m\to\infty$. Очевидно, що при $m=0$ ці умови перетворюються у звичайні умови Коші – Ліпшиця, які були використані при доведенні теореми 1, якщо покласти $L_1(0)=L_1$ та $L(0)=L$. Зауважимо, що вперше посилену умову Коші – Ліпшиця застосував К. П. Персидський [10].

Сформулюємо тепер основний результат цієї статті.

Теорема 2. *Припустимо, що для системи рівнянь (1) виконуються такі умови:*

1) справджується оцінка (5);

2) виконуються нерівності (16) та (17);

3) параметр ε задовольняє нерівність

$$\varepsilon<\min\left\{\frac{\gamma}{KL(0)};\frac{\gamma d}{KF};\frac{1}{L(0)}\right\};$$

4) $\gamma>1$;

5) $\sum_{i=1}^{\infty}k_i\omega_i\neq 0$ для всіх ненульових цілочислових векторів $(k_1,k_2,k_3,\ldots)$.

Тоді система рівнянь (3) має сім'ю майже періодичних у сенсі Бора розв'язків $x(t,\phi)$, залежних від параметра $\phi\in\mathbf{\Theta}_\infty$, кожний з яких рівномірно відносно ϕ можна наблизити з наперед заданою точністю квазіперіодичним розв'язком $x^n(t,\phi^{(m)})$ системи рівнянь (15).

Доведення. Нагадаємо, що векторну функцію називають майже періодичною або квазіперіодичною, якщо такими є всі її координати. Зрозуміло, що умова 5 теореми 2 забезпечує квазіперіодичність функцій $x^n(t,\phi^{(m)})$ при всіх $\phi^{(m)}\in\mathbf{\Theta}_m$ та $m\in\{1,2,3,\ldots\}$. Покажемо тепер, що послідовність функцій $\{u^n(\phi^{(m)})\}$ при $m\to\infty$ збігається до функції $u^n(\phi)$ в сенсі норми рівномірно відносно $\phi^{(m)}\in\mathbf{\Theta}_m$. Співвідношення (10) приводить до оцінки

$$\big\|u^n(\phi)-u^n(\phi^{(m)})\big\|\le\frac{1}{1-\varepsilon L(0)}\big\|u^0(\phi)-u^0(\phi^{(m)})\big\|, \tag{18}$$

а рівність (7) — до співвідношень

$$\big\|\Omega_\tau^0(\phi)-\Omega_\tau^0(\phi^{(m)})\big\|\le\left\|\int\limits_{-\infty}^{0}\Omega_s^0(\phi)\big\{A(\omega s+\phi)-A_0(\omega^{(m)}s+\phi^{(m)})\big\}\Omega_\tau^s(\phi^{(m)})ds\right\|\le$$

$$\leq \int_{-\infty}^{0} K^2 \exp\big\{-\gamma|s| - \gamma|s-\tau|\big\} L_1(m)(\omega_0|s| + 2\pi)ds \leq$$

$$\leq L_1(m)K^2 \left\{ \int_{\infty}^{\tau} \exp\{-\gamma|s| - \gamma|s-\tau| \right\} (\omega_0|s| + 2\pi)ds +$$

$$+ \int_{\tau}^{0} \exp\big\{ -\gamma|s| - \gamma|s-\tau|\big\}(\omega_0|s| + 2\pi)ds\big\} \leq$$

$$\leq L_1(m)K^2(\omega_0 + 2\pi)\times$$

$$\times \left\{ \int_{\infty}^{\tau} \exp\{-2\gamma s - \gamma\tau - s\}ds + \int_{\tau}^{0} \exp\{-\gamma\tau - s\}ds \right\} \leq$$

$$\leq L_1(m)K^2(\omega_0 + 2\pi) \left\{ \frac{\exp\{(\gamma-1)\tau\}}{2\gamma - 1} + \exp\{(\gamma-1)\tau\} \right\} =$$

$$= L_1(m)\frac{2\gamma K^2(\omega_0 + 2\pi)}{2\gamma - 1} \exp\{(\gamma-1)\tau\}. \tag{19}$$

З нерівностей (8) та (19) маємо

$$\big\|u^0(\phi) - u^0(\phi^{(m)})\big\| \leq \varepsilon \int_{-\infty}^{0} \big\|\Omega^0_\tau(\phi) - \Omega^0_\tau(\phi^{(m)})\big\| \|f(\omega\tau + \phi, 0)\| d\tau +$$

$$+ \varepsilon \int_{-\infty}^{0} \|\Omega^0_\tau(\phi^{(m)})\| \|f(\omega\tau + \phi, 0) - f(\omega^{(m)}\tau + \phi^{(m)}, 0)\| d\tau \leq$$

$$\leq \varepsilon \int_{-\infty}^{0} L_1(m)\frac{2\gamma K^2(\omega_0 + 2\pi)}{2\gamma - 1} \exp\{(\gamma-1)\tau\} F d\tau +$$

$$+ \varepsilon \int_{-\infty}^{0} K \exp\{\gamma\tau\} \big\|f(\omega\tau + \phi, 0) - f(\omega^{(m)}\tau + \phi^{(m)}, 0)\big\| d\tau \leq$$

$$\leq \varepsilon L_1(m)\frac{2\gamma F K^2(\omega_0 + 2\pi)}{(2\gamma-1)(\gamma-1)} + L(m)\frac{\varepsilon K(\omega_0 + 2\pi)}{\gamma - 1} =$$

$$= \frac{\varepsilon K(\omega_0 + 2\pi)}{\gamma - 1} \left\{ L_1(m)\frac{2\gamma F K}{(2\gamma - 1)} + L(m) \right\}.$$

Ввівши позначення

$$\frac{\varepsilon K(\omega_0 + 2\pi)}{\gamma - 1} = \alpha = \mathrm{const} > 0, \qquad \frac{2\gamma F K}{(2\gamma - 1)} = \beta = \mathrm{const} > 0,$$

$$\frac{1}{1 - \varepsilon L(0)} = \sigma = \text{const} > 0,$$

з нерівності (18) одержимо, що

$$\left\| u^n(\phi) - u^n(\phi^{(m)}) \right\| \leq \alpha\sigma(L_1(m) + L(m)) \to 0,$$

де $x^n(t,\phi)$ — майже періодична, а $x^n(t,\phi^{(m)})$ — квазіперіодична функції. Таким чином, справджується рівність

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty} x^n(t,\phi^{(m)})\right) = x(t,\phi),$$

що закінчує доведення теореми, оскільки $x(t,\phi)$ — майже періодичний розв'язок системи рівнянь (2).

4. Висновок. Робота має теоретичний характер. Дійсно, знаючи константи, наведені в умовах теорем 1 і 2, можна вказати, при яких числових значеннях ε ці теореми мають сенс. Можна також розрахувати значення n та m, при яких функція $x^n(t,\phi^{(m)})$ наближає функцію $x(t,\phi)$ із наперед заданою точністю, причому у виборі таких пар натуральних чисел є безліч варіантів. Але записати систему рівнянь (15) і знайти її розв'язок $x^n(t,\phi^{(m)})$ є складною задачею. При умові, що в системі рівнянь (1) $x \in R^1$, ця задача спрощується. У іншому випадку доведеться розв'язувати додаткову задачу про укорочення системи (1) не лише відносно φ, але й відносно x.

Література

1. В. В. Немыцкий, *Колебания в автономных системах. Пятая летняя математическая школа*, Наук. думка, Киев (1968).
2. П. Г. Боль, *Избранные труды*, Изд-во АН Латв.ССР, Рига (1961).
3. Б. М. Левитан, *Почти-периодические функции*, Гостехиздат, Москва (1953).
4. Б. П. Демидович, *Лекции по математической теории устойчивости*, Наука, Москва (1967).
5. А. М. Самойленко, *Элементы математической теории многочастотных колебаний*, Наука, Москва (1987).
6. A. M. Samoilenko, Yu. V. Teplinskii, *Countable systems of differential equations*, VSP, Utrecht (2003).
7. Ю. А. Митропольский, А. М. Самойлено, В. Л. Кулик, *Исследования дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова*, Наук. думка, Киев (1990).
8. A. M. Samoilenko, Y. V. Teplinsky, *Elements of mathematical theory of evolutionary equations in Banach spaces*, World Scientific Series on Nonlinear Science. Series A: Monographs and Treatises, **86**, World Sci. Publ. Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ (2013).
9. Ю. В. Теплінський, *Інваріантні тори диференціально-різницевих рівнянь у просторах обмежених числових послідовностей*, Кам'янець-Поділ. нац. ун-т ім. І. Огієнка, Кам'янець-Подільський (2015).
10. К. П. Персидский, *Бесконечные системы дифференциальных уравнений*, Дифференциальные уравнения в нелинейных пространствах, Наука, Алма-Ата (1976).

Одержано 29.12.20