УДК 517.9

ПРО РОЗВ'ЯЗКИ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ МАТРИЧНОГО ІНТЕГРАЛЬНО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ З ВИРОДЖЕНИМ ЯДРОМ*

С. М. Чуйко, О. В. Чуйко, В. О. Кузьміна

Донбас. держ. пед. ун-т
вул. Лозановича, 14, кв. 31, Слов'янськ, Донецька обл., 84112, Україна
e-mail: chujko-slav@ukr.net

We find necessary and sufficient conditions for the existence of solutions of the linear boundary-value problem for a Fredholm-type matrix integro-differential system with degenerate kernel in the critical case. We also determine the structure of the generalized Green operator of this problem.

Знайдено необхідні й достатні умови розв'язності, а також конструкцію узагальненого оператора Гріна лінійної крайової задачі для матричної інтегрально-диференціальної системи типу Фредгольма з виродженим ядром у критичному випадку.

1. Постановка задачі. Досліджено задачу про побудову розв'язків [1, 2]

$$Z(t) \in \mathbb{D}^2_{\alpha\times\beta}[a;b] := \mathbb{D}^2[a;b] \otimes \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}, \qquad Z'(t) \in \mathbb{L}^2_{\alpha\times\beta}[a;b] := \mathbb{L}^2[a;b] \otimes \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$$

матричної інтегрально-диференціальної системи типу Фредгольма з виродженим ядром

$$Z'(t) = \Phi(t)\int_a^b \big[A(s)Z(s) + B(s)Z'(s)\big]\,\Psi(t)\,ds + F(t), \tag{1}$$

які задовольняють крайову умову

$$\mathcal{L}Z(\cdot) = \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{\mu\times\nu}. \tag{2}$$

Тут

$$\Phi(t) \in \mathbb{L}^2_{\alpha\times\gamma}[a;b], \qquad A(t), B(t) \in \mathbb{L}^2_{\gamma\times\alpha}[a;b], \qquad \Psi(t) \in \mathbb{L}^2_{\beta\times\beta}[a;b], \qquad F(t) \in \mathbb{L}^2_{\alpha\times\beta}[a;b];$$

$\mathcal{L}Z(\cdot)\colon \mathbb{D}^2_{\alpha\times\beta}[a;b] \to \mathbb{R}^{\mu\times\nu}$ — лінійний обмежений матричний функціонал. Взагалі кажучи, припускаємо, що $\alpha, \beta, \gamma, \mu, \nu \in \mathbb{N}$ — довільні натуральні числа. Матрична крайова задача (1), (2) узагальнює традиційні постановки задач для інтегрально-диференціальної системи типу Фредгольма [1, 2]. Розв'язок матричної інтегрально-диференціальної системи (1) подамо у вигляді

$$Z(t) = \int_a^t \Phi(s)\,C_0\,\Psi(s)\,ds + C_1 + \mathcal{F}(t), \qquad \mathcal{F}(t) := \int_a^t F(s)\,ds,$$

* Роботу виконано за фінансової підтримки Міністерства освіти і науки України (номер державної реєстрації 0118U003390).

де

$$C_0 := \int_a^b \left[A(s)Z(s) + B(s)Z'(s)\right]\, ds \in \mathbb{R}^{\gamma\times\beta}, \qquad C_1 \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$$

— невідомі сталі матриці, для знаходження яких одержуємо матричне рівняння типу Сильвестра [3]

$$C_0 - \int_a^b A(t) \int_a^t \Phi(s) C_0 \Psi(s)\, ds\, dt - \int_a^b A(t) C_1\, dt - \int_a^b A(s)\Phi(s)C_0\Psi(s)\, ds = \mathcal{B}, \tag{3}$$

де

$$\mathcal{B} := \int_a^b \left[A(s)\mathcal{F}(s) + B(s)F(s)\right] ds \in \mathbb{R}^{\gamma\times\beta}$$

— стала матриця.

2. Узагальнений оператор Гріна задачі Коші. Визначимо оператор [3]

$$\mathcal{A} = \mathcal{M}\mathcal{B} \colon \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{mn}$$

як оператор, який ставить у відповідність матриці $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ вектор-стовпець $\mathcal{M}\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{mn}$, складений з n стовпців матриці $\mathcal{B}$, а також обернений оператор

$$\mathcal{M}^{-1}\mathcal{A} \colon \mathbb{R}^{mn} \to \mathbb{R}^{m\times n},$$

який ставить у відповідність вектору $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{mn}$ матрицю $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Позначимо $\Theta^{(j)} \in \mathbb{R}^{\gamma\times\beta}$, $j = 1, 2, \ldots, \beta\cdot\gamma$ — природний базис [4] простору $\mathbb{R}^{\beta\times\gamma}$, а також

$$\Xi^{(j)} \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}, \quad j = 1, 2, \ldots,$$

$\alpha\cdot\beta$ — природний базис простору $\mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$. При цьому задача про знаходження розв'язку рівняння (1) приводить до задачі про знаходження векторів $\xi \in \mathbb{R}^{\beta\gamma}$ і $\zeta \in \mathbb{R}^{\alpha\beta}$, компоненти яких визначають розвинення матриць

$$C_0 = \sum_{j=1}^{\beta\gamma} \Theta^{(j)}\xi_j, \qquad C_1 = \sum_{j=1}^{\alpha\beta} \Xi^{(j)}\zeta_j, \quad \xi_j, \zeta_j \in \mathbb{R}^1, \qquad c := \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\alpha\beta+\beta\gamma}.$$

У нових позначеннях рівняння (3) набирає вигляду

$$\mathcal{D}c = \mathcal{M}\mathcal{B}, \qquad \mathcal{D} := [\mathcal{D}_0; \mathcal{D}_1], \tag{4}$$

де

$$\mathcal{D}_0 := \left[\mathcal{D}_0^{(j)}\right]_{j=1}^{\beta\gamma} \in \mathbb{R}^{\beta\gamma\times\beta\gamma},$$

$$\mathcal{D}_0^{(j)} := \mathcal{M}\Theta^{(j)} - \int_a^b A(s)\Phi(s)\Theta^{(j)}\Psi(s)\, ds - \mathcal{M}\int_a^b A(t)\int_a^t \Phi(s)\Theta^{(j)}\Psi(s)\, ds\, dt,$$

а також

$$\mathcal{D}_0 := \left[\mathcal{D}_0^{(j)}\right]_{j=1}^{\alpha\beta} \in \mathbb{R}^{\beta\gamma\times\alpha\beta}, \qquad \mathcal{D}_1^{(j)} := -\mathcal{M}\int\limits_a^b A(t)\Xi^{(j)}\,dt$$

— сталі матриці. Позначимо через $P_{\mathcal{D}^*} \in \mathbb{R}^{\beta\gamma\times\beta\gamma}$ і $P_{\mathcal{D}} \in \mathbb{R}^{(\alpha+\gamma)\beta\times(\alpha+\gamma)\beta}$ матриці-ортопроектори

$$P_{\mathcal{D}^*}\colon \mathbb{R}^{\beta\gamma} \to \mathbb{N}\left(\mathcal{D}^*\right), \qquad P_{\mathcal{D}}\colon \mathbb{R}^{\alpha\beta+\beta\gamma} \to \mathbb{N}\left(\mathcal{D}^*\right).$$

За умови [1, 3, 5]

$$P_{\mathcal{D}^*}\mathcal{M}\mathcal{B} = 0, \tag{5}$$

і лише задовольняючи цю умову, загальний розв'язок рівняння (4)

$$c = \mathcal{D}^+\mathcal{M}\mathcal{B} + P_{\mathcal{D}_\rho}c_\rho, \quad c_\rho \in \mathbb{R}^\rho,$$

визначає загальний розв'язок

$$C_0 = C_0(\mathcal{B}) + C_0(c_\rho), \qquad C_0(\mathcal{B}) := \mathcal{M}^{-1}\big[\xi(\mathcal{B})\big], \qquad C_0(c_\rho) := \mathcal{M}^{-1}\big[\xi(c_\rho)\big],$$
$$C_1 = C_1(\mathcal{B}) + C_1(c_\rho), \qquad C_1(\mathcal{B}) := \mathcal{M}^{-1}\big[\zeta(\mathcal{B})\big], \qquad C_1(c_\rho) := \mathcal{M}^{-1}\big[\zeta(c_\rho)\big]$$

матричного рівняння типу Сильвестра (3), де

$$\xi(\mathcal{B}) := \begin{pmatrix} I_{\beta\gamma} & O \end{pmatrix}\mathcal{D}^+\mathcal{M}\mathcal{B}, \qquad \xi(c_\rho) := \begin{pmatrix} I_{\beta\gamma} & O \end{pmatrix}P_{\mathcal{D}_\rho}c_\rho,$$
$$\zeta(\mathcal{B}) := \begin{pmatrix} O & I_{\alpha\beta} \end{pmatrix}\mathcal{D}^+\mathcal{M}\mathcal{B}, \qquad \zeta(c_\rho) := \begin{pmatrix} O & I_{\alpha\beta} \end{pmatrix}P_{\mathcal{D}_\rho}c_\rho,$$

матриця $P_{\mathcal{D}_\rho} \in \mathbb{R}^{(\alpha+\gamma)\beta\times\rho}$ складена з ρ лінійно незалежних стовпців матриці-ортопроектора $P_{\mathcal{D}}$.

Лема. *За умови (5) загальний розв'язок*

$$Z(t, c_\rho) = W(t, c_\rho) + \mathcal{K}\big[F(s)\big](t), \quad c_\rho \in \mathbb{R}^\rho,$$

задачі Коші $Z(a) = C_1(c_\rho)$ *для рівняння (1) визначає узагальнений оператор Гріна матричної задачі Коші*

$$\mathcal{K}\big[F(s)\big](t) := \int\limits_a^t \Phi(s)C_0(\mathcal{B})\Psi(s)\,ds + C_1(\mathcal{B}) + \mathcal{F}(t),$$

де

$$W(t, c_\rho) := C_1(c_\rho) + \int\limits_a^t A(s)\Phi(s)C_0(c_\rho)\Psi(s)\,ds, \quad c_\rho \in \mathbb{R}^\rho,$$

— *загальний розв'язок задачі Коші* $Z(a) = 0$ *для однорідної частини рівняння (1).*

3. Узагальнений оператор Гріна інтегрально-диференціальної крайової задачі. Позначимо

$$\Theta_\rho^{(j)} \in \mathbb{R}^\rho, \quad j = 1, 2, \ldots, \rho,$$

— природний базис простору $\mathbb{R}^\rho$. Підставляючи розв'язок рівняння (1) у крайову умову (2), приходимо до задачі про знаходження розв'язку

$$c_\rho = \sum_{j=1}^{\rho} \Theta_\rho^{(j)} \xi_j \in \mathbb{R}^\rho, \quad \xi_j \in \mathbb{R}^1, \quad j = 1, 2, \ldots, \rho,$$

матричного рівняння типу Сильвестра [3, 6, 7]

$$LW(\cdot, c_\rho) + L\mathcal{K}\big[F(s)\big](\cdot) = \mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{\mu\times\nu}. \tag{6}$$

У критичному випадку $P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0$ за умови (5) та [3, 7]

$$P_{\mathcal{Q}_d^*}\mathcal{M}\big\{\mathfrak{A} - L\mathcal{K}\big[F(s)\big](\cdot)\big\} = 0, \tag{7}$$

розв'язок матричного рівняння (5) визначає вектор $c_\rho = c_\rho(c_r) + c_\rho(\mathcal{A}, F)$, де

$$c_\rho(\mathcal{A}, F) := \mathcal{Q}^+\mathcal{M}\big\{\mathfrak{A} - L\mathcal{K}\big[F(s)\big](\cdot)\big\}, \qquad c_\rho(c_r) := P_{\mathcal{Q}_r} c_r, \quad c_r \in \mathbb{R}^r,$$

і $P_{\mathcal{Q}^*}$ — $(\mu\nu \times \mu\nu)$-вимірна матриця-ортопроектор

$$P_{\mathcal{Q}^*} : \mathbb{R}^{\mu\nu} \to N\left(\mathcal{Q}^*\right),$$

де

$$\mathcal{Q} := [\mathcal{Q}_i]_{j=1}^{\rho} \in \mathbb{R}^{\mu\nu\times\rho}, \qquad \mathcal{Q}_j := \mathcal{M}\left\{L\mathcal{M}^{-1}\left[W(\cdot, \Theta_\rho^{(j)})\right]\right\}, \quad j = 1, 2, \ldots, \rho,$$

матриця $P_{\mathcal{Q}_r}$, утворена з r лінійно незалежних стовпців $(\rho\times\rho)$-вимірної матриці-ортопроектора $P_{\mathcal{Q}}$, матриця $P_{\mathcal{Q}_d^*}$ складена з d лінійно незалежних рядків матриці-ортопроектора $P_{\mathcal{Q}^*}$. Таким чином, у критичному випадку, за умов (5) і (7) розв'язок матричної інтегрально-диференціальної системи типу Фредгольма з виродженим ядром (1), який задовольняє крайову умову (2):

$$Z(t, c_r) = W(t, c_r) + G\big[F(s); \mathfrak{A}\big](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r,$$

визначає узагальнений оператор Гріна

$$G\big[F(s); \mathfrak{A}\big](t) := W(t, c_\rho(\mathcal{A}, F)) + \mathcal{K}\big[F(s)\big](t)$$

та загальний розв'язок однорідної частини крайової задачі (1), (2):

$$W(t, c_r) := C_1(c_\rho(c_r)) + \int_a^t A(s)\Phi(s)C_0(c_\rho(c_r))\Psi(s)\, ds,$$

де

$$W(t, c_\rho(\mathcal{A}, F)) := C_1(c_\rho(\mathcal{A}, F)) + \int_a^t A(s)\Phi(s)C_0(c_\rho(\mathcal{A}, F))\Psi(s)\, ds.$$

Отже, доведено таку достатню умову розв'язності матричної інтегрально-диференціальної крайової задачі для системи типу Фредгольма з виродженим ядром (1), (2).

Теорема. *У критичному випадку* ($P_{Q^*} \neq 0$) *за умов (5) і (7) розв'язок матричної інтегрально-диференціальної системи типу Фредгольма з виродженим ядром (1), який задовольняє крайову умову (2):*

$$Z(t, c_r) = W(t, c_r) + G\big[F(s); \mathfrak{A}\big](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r,$$

визначає узагальнений оператор Гріна

$$G\big[F(s); \mathfrak{A}\big](t) := W(t, c_\rho(\mathcal{A}, F)) + \mathcal{K}\big[F(s)\big](t)$$

і загальний розв'язок однорідної частини крайової задачі (1), (2):

$$W(t, c_r) := C_1(c_\rho(c_r)) + \int_a^t A(s)\Phi(s)C_0(c_\rho)\Psi(s)\,ds,$$

де

$$W(t, c_\rho(\mathcal{A}, F)) := C_1(c_\rho(\mathcal{A}, F)) + \int_a^t A(s)\Phi(s)C_0(c_\rho(\mathcal{A}, F))\Psi(s)\,ds$$

— загальний розв'язок однорідної частини крайової задачі (1), (2) і

$$\mathcal{K}\big[F(s)\big](t) := \int_a^t \Phi(s)C_0(\mathcal{B})\Psi(s)\,ds + C_1(\mathcal{B}) + \mathcal{F}(t)$$

— узагальнений оператор Гріна матричної задачі Коші $Z(a) = 0$ *для лінійної матричної інтегрально-диференціальної системи типу Фредгольма з виродженим ядром (1).*

Знайдені умови розв'язності (5) і (7), а також конструкція узагальненого оператора Гріна крайової задачі для матричної інтегрально-диференціальної системи типу Фредгольма з виродженим ядром (1), (2) узагальнюють традиційні результати для нетерових крайових задач [1, 2].

Приклад 1. Вимоги доведеної теореми задовольняє задача про побудову 2π-періодичних розв'язків матричної інтегрально-диференціальної системи

$$Z'(t) = \Phi(t)\int_a^b \big[A(s)Z(s) + B(s)Z'(s)\big]\,\Psi(t)\,ds + F(t), \tag{8}$$

де

$$A(t) := \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Phi(t) := \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Psi(t) := \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

$$B(t) := \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ 0 & \cos t & \sin t \end{pmatrix}, \qquad F(t) := \begin{pmatrix} \sin t & 0 \\ \cos t & \sin t \\ 0 & \cos t \end{pmatrix}.$$

Позначимо

$$\Xi_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Xi_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \qquad \Xi_6 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

природний базис простору $\mathbb{R}^{3\times 2}$, а також

$$\Theta_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Theta_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \qquad \Theta_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— природний базис простору $\mathbb{R}^{2\times 2}$, при цьому

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 1 & \pi & -\pi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \\ pi & 0 & 1 & \pi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P_{\mathcal{D}^*} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

і, крім того,

$$P_{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P_{\mathcal{D}_\rho} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $P_{\mathcal{D}^*} = 0$, то умова (5) виконується. Матриці

$$C_0(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & \pi \\ \pi & 0 \end{pmatrix}, \qquad C_0(c_\rho) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_1(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C_1(c_\rho) = \begin{pmatrix} c_1 & c_4 \\ c_2 & c_5 \\ c_3 & c_6 \end{pmatrix}$$

визначають загальний розв'язок

$$W(t, c_\rho) = C_1(c_\rho), \quad c_\rho \in \mathbb{R}^6,$$

задачі Коші $Z(0) = 0$ для однорідної частини рівняння (8), а також узагальнений оператор Гріна матричної задачі Коші

$$\mathcal{K}\big[F(s)\big](t) = \begin{pmatrix} 1 - \cos t - \pi \sin^2 t & \pi \cos t \sin t \\ (1 + \pi \cos t) \sin t & 1 - \cos t + \pi \sin^2 t \\ 0 & \sin t \end{pmatrix}.$$

Оскільки $\mathcal{Q} = 0,\ \mathcal{A} = 0$ і $L\mathcal{K}[F(s)](\cdot) = 0$, то умову (7) виконано, при цьому розв'язок матричної інтегрально-диференціальної системи типу Фредгольма з виродженим ядром, що задовольняє крайову умову (8):

$$Z(t, c_r) = W(t, c_r) + G\big[F(s); \mathfrak{A}\big](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^6,$$

визначає узагальнений оператор Гріна

$$G\big[F(s); \mathfrak{A}\big](t) = \mathcal{K}\big[F(s)\big](t)$$

і загальний розв'язок $W(t, c_r) = C_1(c_\rho)$ однорідної частини крайової задачі (8).

У некритичному випадку $P_{\mathcal{Q}^*} = 0$ умова (7) виконується для будь-яких неоднорідностей крайової задачі (1), (2), при цьому розв'язок матричної інтегрально-диференціальної системи типу Фредгольма з виродженим ядром (1), який задовольняє крайову умову (2), визначає таке твердження.

Наслідок. *У некритичному випадку* $(P_{\mathcal{Q}^*} = 0)$ *за умови (5) розв'язок матричної інтегрально-диференціальної системи типу Фредгольма з виродженим ядром (1), який задовольняє крайову умову (2):*

$$Z(t, c_r) = W(t, c_r) + G\big[F(s); \mathfrak{A}\big](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r,$$

визначає узагальнений оператор Гріна

$$G\big[F(s); \mathfrak{A}\big](t) := W(t, c_\rho(\mathcal{A}, F)) + \mathcal{K}\big[F(s)\big](t)$$

та загальний розв'язок однорідної частини крайової задачі (1), (2):

$$W(t, c_r) := C_1(c_\rho(c_r)) + \int\limits_a^t A(s)\Phi(s)C_0(c_\rho)\Psi(s)\, ds.$$

Приклад 2. Вимоги доведеного наслідку задовольняє задача про побудову антиперіодичних розв'язків матричної інтегрально-диференціальної системи (8).

Загальний розв'язок $W(t, c_\rho),\ c_\rho \in \mathbb{R}^6$, задачі Коші $Z(0) = 0$ для однорідної частини рівняння (8), а також узагальнений оператор Гріна матричної задачі Коші $\mathcal{K}[F(s)](t)$ були здобуті в прикладі 1. Оскільки $\mathcal{Q} = 2\, I_6,\ \mathcal{A} = 0$ і $L\mathcal{K}[F(s)](\cdot) = 0$, то єдиний розв'язок

$$Z(t) = G\big[F(s); \mathfrak{A}\big](t)$$

матричної інтегрально-диференціальної системи типу Фредгольма з виродженим ядром, що задовольняє крайову умову $Z(0) + Z(2\pi) = 0$, визначає узагальнений оператор Гріна

$$G\big[F(s);\mathfrak{A}\big](t) = \mathcal{K}\big[F(s)\big](t)$$

антиперіодичної крайової задачі (8).

Запропоновані умови розв'язку, а також конструкція узагальненого оператора Гріна крайової задачі (1), (2) для матричної інтегрально-диференціальної системи типу Фредгольма з виродженим ядром (1) узагальнюють умови розв'язності та конструкцію узагальненого оператора Гріна інтегрально-диференціальної крайової задачі [2, 8], а також матричної крайової задачі [9]. Крім того, аналогічні умови існування розв'язку, а також конструкція узагальненого оператора Гріна матричної інтегрально-диференціальної системи типу Фредгольма з виродженим ядром (1) можуть бути отримані для аналогічної крайової задачі в абстрактних просторах [1, 10]. Запропонована схема дослідження крайових задач матричної інтегрально-диференціальної системи типу Фредгольма з виродженим ядром (1) аналогічно з [8] може бути перенесена на нелінійні інтегрально-диференціальні системи типу Фредгольма з виродженим ядром, а також аналогічно з [5, 11 – 17] — на матричні крайові задачі для інтегрально-диференціальних систем типу Фредгольма з виродженим ядром, що містять диференціально-алгебраїчний оператор. З іншого боку, у разі нерозв'зності матричні крайові задачі для інтегрально-диференціальних систем типу Фредгольма з виродженим ядром можуть бути регуляризовані аналогічно з [18, 19].

Література

1. A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko, *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems*, Utrecht, VSP (2004).
2. А. М. Самойленко, О. А. Бойчук, С. А. Кривошея, *Крайові задачі для систем лінійних інтегро-диференціальних рівнянь типу Фредгольма з виродженим ядром*, Укр. мат. журн., **48**, № 11, 1576 – 1579 (1996).
3. С. М. Чуйко, *О решении линейных матричных уравнений*, Вісн. Харк. нац. ун-ту ім. В. Н. Каразіна. Сер.: Математика, прикл. математика і механіка, **29**, 27 – 33 (2015).
4. В. В. Воеводин, Ю. А. Кузнецов, *Матрицы и вычисления*, Наука, Москва (1984).
5. S. M. Chuiko, *A generalized matrix differential-algebraic equation*, J. Math. Sci. (N.Y.), **210**, № 1, 9 – 21 (2015).
6. A. A. Boichuk, S. A. Krivosheya, *Criterion of the solvability of matrix equations of the Lyapunov type*, Ukr. Math. J., **50**, № 8, 1162 – 1169 (1998).
7. С. М. Чуйко, *О решении обобщенного матричного уравнения Сильвестра*, Чебышев. сб., **16**, вып. 1, 52 – 66 (2015).
8. A. A. Boichuk, I. A. Holovats'ka, *Boundary-value problems for systems of integro-differential equations*, J. Math. Sci. (N.Y.), **203**, № 3, 306 – 321 (2014).
9. A. A. Boichuk, S. A. Krivosheya, *A critical periodic boundary-value problem for a matrix Riccati equation*, Differ. Equ., **37**, № 4, 464 – 471 (2001).
10. S. M. Chuiko, *On solvability of linear matrix boundary-value problem*, J. Math. Sci., **230**, № 5, 799 – 801 (2018).
11. S. L. Campbell, *Singular systems of differential equations*, Research Notes in Mathematics, **40**, Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, Mass.-London (1980).
12. S. M. Chuiko, *The Green's operator of a generalized matrix linear differential-algebraic boundary value problem*, Sib. Math. J., **56**, № 4, 752 – 760 (2015).

13. A. A. Boichuk, A. A. Pokutnyi, V. F. Chistyakov, *Application of perturbation theory to the solvability analysis of differential algebraic equations*, Comput. Math. Math. Phys., **53**, № 6, 777 – 788 (2013).

14. S. M. Chuiko, *To the issue of a generalization of the matrix differential-algebraic boundary-value problem*, J. Math. Sci. (N.Y.), **227**, № 1, 13 – 25 (2017).

15. S. M. Chuiko, *Generalized green operator of Noetherian boundary-value problem for matrix differential equation*, Russian Math. (Iz. VUZ), **60**, № 8, 64 – 73 (2016).

16. S. M. Chuiko, *Nonlinear matrix differential-algebraic boundary-value problem*, Lobachevskii J. Math., **38 (2)**, 236 – 244 (2017).

17. S. M. Chuiko, *On the solvability of a matrix boundary-value problem*, J. Math. Sci., **232**, № 5, 794 – 798 (2018).

18. А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин, *Методы решения некорректных задач*, Наука, Москва (1986).

19. S. M. Chuiko, *On the regularization of a matrix differential-algebraic boundary-value problem*, J. Math. Sci., **220**, № 5, 591 – 602 (2017).

Одержано 27.12.2020