УДК 517.98

ПРО УЗАГАЛЬНЕНУ ЗАДАЧУ КОШІ ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНОГО РІВНЯННЯ З ОПЕРАТОРОМ ДРОБОВОГО ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

В. В. Городецький, О. В. Мартинюк, Р. І. Петришин

Чернів. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича
вул. М. Коцюбинського, 2, Чернівці, 58012, Україна
e-mail: v.gorodetskiy@chnu.edu.ua,
alfaolga1@gmail.com,
r.petryshyn@chnu.edu.ua

We prove the correct solvability of the nonlocal time multipoint problem for the evolutionary equation with operator of fractional differentiation and initial function, which is an element of the space of generalized distribution-type functions.

Доведено коректну розв'язність нелокальної багатоточкової за часом задачі для еволюційного рівняння з оператором дробового диференціювання і початковою функцією, яка є елементом простору узагальнених функцій типу розподілів.

Різні класичні функціональні простори (наприклад, соболевські, аналітичних функцій, нескінченно диференційовних функцій та розподілів Л. Шварца) можна розуміти як позитивні та негативні простори відносно L_2, побудовані за функціями від оператора диференціювання або множення на незалежну змінну, або як проективні та індуктивні границі таких просторів [1].

У цій роботі досліджено нелокальну багатоточкову за часом задачу у півпросторі $t > 0$ для еволюційного рівняння $\partial u/\partial t + Au = 0$, де

$$A := \sqrt{I + |iD_x|^{\alpha}} = \sqrt{I + |D_x|^{\alpha}}, \qquad D_x = d/dx, \quad \alpha \in (1, +\infty) \setminus \{2, 3, \ldots\}.$$

Такий оператор можна розуміти як певний аналог оператора $\sqrt{I + (iD_x)^2} = \sqrt{I - D_x^2}$, який використовується в теорії дробового диференціювання [2] і називається оператором Бесселя дробового диференціювання. Досліджувана задача є узагальненням задачі Коші, якщо початкова умова $u(t, \cdot)|_{t=0} = f$ замінюється умовою

$$\sum_{k=0}^{m} \mu_k u(t, \cdot)|_{t=t_k} = f,$$

де $t_0 = 0,\ \{t_1, \ldots, t_m\} \subset (0, +\infty),\ 0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m < +\infty,\ \{\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_m\} \subset \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, — фіксовані числа (якщо $\mu_0 = 1,\ \mu_1 = \ldots = \mu_m = 0$, то маємо, очевидно, задачу Коші). Вказана умова трактується у класичному розумінні або в слабкому сенсі, якщо f — узагальнена функція, тобто як граничне співвідношення

$$\sum_{k=0}^{m} \mu_k \lim_{t \to t_k} \langle u(t, \cdot), \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle$$

для довільної функції φ з основного простору (тут $\langle f, \cdot \rangle$ позначає дію функціонала f на основну функцію φ). Така нелокальна за часом задача відноситься до багатоточкових задач для диференціально-операторних рівнянь (огляд праць, присвячених нелокальним задачам для диференціально-операторних рівнянь та рівнянь з частинними похідними, див., наприклад, у [3]).

У цій роботі доводиться коректна розв'язність зазначеної задачі з початковою функцією, яка є елементом простору узагальнених функцій типу розподілів, наводиться зображення розв'язку у вигляді згортки фундаментального розв'язку з початковою функцією, досліджуються властивості фундаментального розв'язку. Встановлено, що звуження оператора A на деякий локально-опуклий топологічний простір, який є проективною границею певних банахових просторів, неперервно та щільно вкладених один у одний, збігається з псевдодиференціальним оператором, побудованим за функцією-символом $a(\sigma) = (1 + |\sigma|^{\alpha})^{1/2},\ \sigma \in \mathbb{R}$, недиференційовною у точці $\sigma = 0$.

1. Простори основних та узагальнених функцій. ***Простір*** $\boldsymbol{\Phi_\alpha}$**.** Нехай α — фіксоване число з множини $(1, +\infty) \setminus \{2, 3, 4, \ldots\}$, $\alpha_0 := 1 + [\alpha]$ ($[\alpha]$ — ціла частина числа α), $M(x) := 1 + |x|,\ x \in \mathbb{R}$,

$$\Phi_\alpha = \left\{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) \;\middle|\; \forall p \in \mathbb{Z}_+ \;\; \exists c_p > 0\colon \sup_{x \in \mathbb{R}} \left\{ \sum_{k=0}^{p} (M(x))^{\alpha_0 + k} |D_x^k \varphi(x)| \right\} \le c_p \right\}$$

(сталі $c_p > 0$ залежать від функції φ). У Φ_α вводиться структура зліченно-нормованого простору за допомогою норм

$$\|\varphi\|_p := \sup_{x \in \mathbb{R}} \left\{ \sum_{k=0}^{p} (M(x))^{\alpha_0 + k - 1/2} |D_x^k \varphi(x)| \right\}, \qquad \varphi \in \Phi_\alpha, \quad p \in \mathbb{Z}_+.$$

При цьому (див. [4, с. 103 – 110]) Φ_α — повний досконалий зліченно-нормований простір з топологією проективної границі банахових просторів $\Phi_{p,\alpha}$: $\Phi_\alpha = \lim\limits_{p \to \infty} \mathrm{pr} \Phi_{p,\alpha} = \bigcap\limits_{p=0}^{\infty} \Phi_{p,\alpha}$ ($\Phi_{p,\alpha}$ — поповнення Φ_α за p-ю нормою), вкладення $\Phi_{p+1,\alpha} \subset \Phi_{p,\alpha},\ p \in \mathbb{Z}_+$, є неперервними.

Множина $B \subset \Phi_\alpha$ називається *обмеженою*, якщо

$$\forall p \in \mathbb{Z}_+ \quad \exists c_p > 0 \quad \forall \varphi \in B\colon \|\varphi\|_p \le c_p$$

(тобто кожна з норм простору Φ_α обмежена на множині B своєю сталою).

Послідовність функцій $\{\varphi_\nu, \nu \ge 1\} \subset \Phi_\alpha$ збігається в Φ_α до функції $\varphi \in \Phi_\alpha$ при $\nu \to +\infty$, якщо $\|\varphi_\nu - \varphi\|_p \to 0$ при $\nu \to +\infty$ для кожного $p \in \mathbb{Z}_+$.

Зауважимо (див. [4, с. 108 – 110]), що у просторі Φ_α визначена й неперервна операція зсуву аргументу $T_\xi\colon \varphi(\xi) \to \varphi(x + \xi)\ \ \forall \varphi \in \Phi_\alpha$ та операція диференціювання. Оскільки Φ_α — досконалий простір, то із загальних результатів теорії досконалих просторів (див. [5, с. 171 – 172] випливає, що операція зсуву аргументу у просторі Φ_α не лише неперервна, але й нескінченно диференційовна (тобто граничні співвідношення $(\varphi(x+h) - \varphi(x))h^{-1} \to \to \varphi'(x),\ h \to 0$, виконуються в сенсі збіжності за топологією в просторі Φ_α).

Простір $\boldsymbol{\Psi_\alpha}$**.** Функції з простору Φ_α абсолютно інтегровні на $\mathbb{R}$, тому на них визначено операцію перетворення Фур'є F:

$$F[\varphi](\sigma) = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{i\sigma x} dx, \quad \varphi \in \Phi_\alpha.$$

Символом Ψ_α позначимо Фур'є-образ простору Φ_α: $\Psi_\alpha = F[\Phi_\alpha]$. Очевидно, що кожна функція $F[\varphi]$, $\varphi \in \Phi_\alpha$, обмежена й неперервна на $\mathbb{R}$. Розглянемо основні властивості функцій з простору Ψ_α (див. [6, с. 197 – 210]).

1. Якщо $\varphi \in \Phi_\alpha$, то $F[\varphi] \in L_1(\mathbb{R})$.

2. Якщо $\varphi \in \Phi_\alpha$, то $F[\varphi]$ — нескінченно диференційовна на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ функція.

Зауважимо, що у точці $\sigma = 0$ функція $F[\varphi]$ може бути недиференційовною, оскільки диференціювання інтеграла $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \exp\{i\sigma x\} dx$ може привести до розбіжного інтеграла. Інтегрування ж частинами вимагає виконання умови $\sigma \neq 0$. Наприклад, функція $\varphi(x) = (1+x^2)^{-1}$, $x \in \mathbb{R}$, є елементом простору Φ_α, де $\alpha \in (1,2)$. Але відомо, що $F[\varphi](\sigma) = \pi e^{-|\sigma|}$, $\sigma \in \mathbb{R}$. Ця функція не диференційовна в точці $\sigma = 0$. Інший приклад: функція $\varphi(x) = (1+x^2)^{-m}$, $x \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, є елементом простору Φ_α, де $\alpha \in (2m-1, 2m)$. При цьому (див. [7, с. 364 – 367])

$$F[\varphi](\sigma) = \frac{2\pi}{(m-1)!} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(m+k-1)!}{k!(m-k-1)!2^{m+k}} |\sigma|^{m-k-1} e^{-|\sigma|}, \quad \sigma \in \mathbb{R}.$$

Ця функція не має похідної у точці $\sigma = 0$.

3. У функції $D_\sigma^k F[\varphi](\sigma)$, $\varphi \in \Phi_\alpha$, $\sigma \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$, існують скінченні односторонні границі $\lim_{\sigma \to \pm 0} D_\sigma^k F[\varphi](\sigma)$.

4. Перетворення Фур'є неперервно й бієктивно відображає Φ_α на Ψ_α.

5. Функції з простору Ψ_α задовольняють умову

$$\forall \{k,l\} \subset \mathbb{Z}_+, \quad k \geq l, \quad \exists b_k > 0 \quad \exists d_l > 0\colon \sup_{\sigma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} |\sigma^k D_\sigma^l \psi(\sigma)| \leq b_k \cdot d_l, \quad \psi \in \Psi_\alpha$$

(сталі b_k, d_l залежать від функції ψ).

У просторі Ψ_α вводиться структура зліченно-нормованого простору за допомогою системи норм

$$\|\psi\|_p := \sup_{\sigma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \left\{ \sum_{k=0}^{p} |\sigma|^k \sum_{l=0}^{k} |D_\sigma^l \psi(\sigma)| \right\}, \qquad \psi \in \Psi_\alpha, \quad p \in \mathbb{Z}_+.$$

При цьому (див. [6, с. 206 – 207]), Ψ_α — повний зліченно-нормований простір, $\Psi_\alpha = \bigcap_{p=0}^{\infty} \Psi_{p,\alpha}$, $\Psi_{p,\alpha}$ — поповнення простору Ψ_α за нормою $\|\cdot\|_p$, вкладення $\Psi_{p+1,\alpha} \subset \Psi_{p,\alpha}$, $p \in \mathbb{Z}_+$, є неперервними.

Функція $g \in C(\mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ називається мультиплікатором у просторі Ψ_α, якщо $g\psi \in \Psi_\alpha$ для довільної функції $\psi \in \Psi_\alpha$ і відображення $\psi \to g\psi$ є лінійним і неперервним оператором з Ψ_α в Ψ_α.

Простір Φ'_α. Символом Φ'_α позначимо простір усіх лінійних неперервних функціоналів на Φ_α зі слабкою збіжністю. Оскільки в основному просторі Φ_α введено топологію проективної границі банахових просторів $\Phi_{p,\alpha}$, причому вкладення $\Phi_{p+1,\alpha} \subset \Phi_{p,\alpha}$, $p \in \mathbb{Z}_+$, є неперервними, то

$$\Phi'_\alpha = \Big(\lim_{p \to +\infty} \mathrm{pr}\, \Phi_{p,\alpha} \Big)' = \lim_{p \to +\infty} \mathrm{ind}\, \Phi'_{p,\alpha} = \bigcup_{p=0}^{\infty} \Phi'_{p,\alpha}.$$

Отже, якщо $f \in \Phi'_\alpha$, то $f \in \Phi'_{p,\alpha}$ при деякому $p \in \mathbb{Z}_+$. Найменше з таких p називається порядком f, тобто кожна узагальнена функція $f \in \Phi'_\alpha$ має скінченний порядок.

Перетворення Фур'є узагальненої функції $f \in \Phi'_\alpha$ визначимо за допомогою співвідношення

$$\langle F[f], \varphi \rangle = 2\pi \langle f, F^{-1}[\psi] \rangle \quad \forall \psi \in \Psi_\alpha.$$

Із властивості лінійності і неперервності функціонала f та перетворення Фур'є (прямого й оберненого) основних функцій випливає лінійність і неперервність функціонала $F[f]$, заданого на $\Psi_\alpha = F[\Phi_\alpha]$, тобто $F[f] = \Psi'_\alpha$, якщо $f \in \Phi'_\alpha$.

Згортка в Φ'_α. В [4, с. 112 – 118] дано три ознаки існування згортки в Φ'_α. Наведемо одну з них: якщо $f \in \Phi'_\alpha$, $\varphi \in \Phi_\alpha$, то згортка $f * \varphi$ існує і визначається формулою

$$(f * \varphi)(x) := \langle f_\xi, T_{-x}\check{\varphi}(\xi) \rangle \equiv \langle f_\xi, \varphi(x - \xi) \rangle, \quad \check{\varphi}(\xi) = \varphi(-\xi),$$

при цьому $f * \varphi$ — звичайна нескінченно диференційовна на $\mathbb{R}$ функція (тут $\langle f_\xi, T_{-x}\check{\varphi}(\xi) \rangle$ позначає дію функціонала f на основну функцію $T_{-x}\check{\varphi}(\xi)$ як функцію змінної ξ).

Нехай $f \in \Phi'_\alpha$. Якщо $f * \varphi \in \Phi_\alpha$ для довільної функції $\varphi \in \Phi_\alpha$ і зі співвідношення $\varphi_\nu \to 0$ при $\nu \to +\infty$ у просторі Φ_α випливає, що $f * \varphi_\nu \to 0$ при $\nu \to +\infty$ у просторі Φ_α, то функціонал f називається *згортувачем* у просторі Φ_α.

Оскільки Φ_α — досконалий простір з диференційовною операцією зсуву, то із результатів, наведених в [5, с. 179 – 181], випливає твердження: якщо $f \in \Phi'_\alpha$ — згортувач у просторі Φ_α, то $F[f * \varphi] = F[f]F[\varphi]$ $\forall \varphi \in \Phi_\alpha$, при цьому $F[f]$ — мультиплікатор у просторі Ψ_α. Зазначимо, що кожний фінітний функціонал із простору Φ'_α (тобто функціонал, носієм якого є обмежена замкнена множина) є згортувачем у просторі Φ_α. Зокрема, згортувачем у просторі Φ_α є δ-функція Дірака, оскільки її носій — $\operatorname{supp}\delta = \{0\}$ $\big($у цьому можна переконатись і безпосередньо:

$$\delta * \varphi = \langle \delta_\xi, T_{-x}\check{\varphi}(\xi) \rangle = T_{-x}\check{\varphi}(0) = \check{\varphi}(-x) = \varphi(x) \ \ \forall \varphi \in \Phi_\alpha\big).$$

Фінітні узагальнені функції утворюють широкий клас; зокрема, кожна обмежена замкнена множина є носієм деякої узагальненої функції з Φ'_α [4, с. 118].

2. Дробове диференціювання у просторі Φ'_α. Розглянемо оператор

$$A := \sqrt{I + |iD_x|^\alpha} = \sqrt{I + |D_x|^\alpha}, \quad D_x = d/dx,$$

який можна розуміти як певний аналог оператора $\sqrt{I + (iD_x)^2} = \sqrt{I - D_x^2}$. Цей оператор часто використовують у теорії дробового диференціювання і називають оператором Бесселя дробового диференціювання. A — невід'ємний самоспряжений оператор у гільбертовому просторі $L_2(\mathbb{R})$, оскільки $A = G(iD_x)$, де $G(\lambda) = (1 + |\lambda|^\alpha)^{1/2} > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, — дійснозначна функція, iD_x — самоспряжений в $L_2(\mathbb{R})$ оператор із областю визначення $\mathcal{D}(iD_x) = \{\varphi \in L_2(\mathbb{R}) : \exists \varphi' \in L_2(\mathbb{R})\}$. Якщо E_λ, $\lambda \in \mathbb{R}$, — спектральна функція оператора iD_x, то, внаслідок основної спектральної теореми для самоспряжених операторів,

$$A\varphi = (I + |D_x|^\alpha)^{1/2}\varphi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (1 + |\lambda|^\alpha)^{1/2} dE_\lambda \varphi,$$

$$\varphi \in \mathcal{D}(A) = \left\{ \varphi \in L_2(\mathbb{R}) \colon \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (1+|\lambda|^2) d(E_\lambda \varphi, \varphi) < \infty \right\}.$$

Врахувавши вигляд спектральної функції E_λ (див. [8, с. 421]), знайдемо, що для довільної функції $\varphi \in \Phi_\alpha \subset L_2(\mathbb{R})$ правильним є співвідношення

$$E_\lambda \varphi = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\lambda} \left\{ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\tau) e^{-i\sigma\tau} d\tau \right\} e^{-it\sigma} d\sigma.$$

Звідси випливає, що $dE_\lambda \varphi = (2\pi)^{-1} F[\varphi](\lambda) e^{-it\lambda}$. Отже,

$$A\varphi = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (1+|\lambda|^\alpha)^{1/2} F[\varphi](\lambda) e^{-it\lambda} d\lambda = F^{-1}[(1+|\lambda|^\alpha)^{1/2} F[\varphi]], \quad \varphi \in \Phi_\alpha. \tag{1}$$

Для обґрунтування співвідношення (1) доведемо таке твердження.

Лема 1. *Функція* $a(\sigma) = (1+|\sigma|^\alpha)^{1/2}$, $\sigma \in \mathbb{R}$, *є мультиплікатором у просторі* Ψ_α.

Доведення. Насамперед доведемо, що $a \cdot \psi \in \Psi_\alpha$ для довільної функції $\psi \in \Psi_\alpha$. Для цього досить встановити, що

$$\forall \sigma \neq 0 \quad \forall p \in \mathbb{Z}_+ \quad \exists c_p > 0 \colon \sum_{k=0}^{\infty} |\sigma|^k \sum_{l=0}^{k} \left| (a(\sigma)\psi(\sigma))^{(l)} \right| \leq c_p.$$

Для оцінки похідних функції $a(\sigma)$ скористаємося формулою Фаа де Бруно диференціювання складеної функції

$$D_\sigma^s F(g(\sigma)) = \sum_{\tilde{m}=1}^{s} \frac{d^{\tilde{m}} F(g)}{dg^{\tilde{m}}} \sum \frac{s!}{\tilde{m}_1! \ldots \tilde{m}_l!} \left(\frac{d}{d\sigma} g(\sigma) \right)^{\tilde{m}_1} \ldots \left(\frac{1}{l!} \frac{d^l}{d\sigma^l} g(\sigma) \right)^{\tilde{m}_l}, \quad s \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

де знак суми поширюється на всі розв'язки в цілих невід'ємних числах рівняння $\tilde{m}_1 + 2\tilde{m}_2 + \ldots + l\tilde{m}_l = s$, $\tilde{m}_1 + \tilde{m}_2 + \ldots + \tilde{m}_l = \tilde{m}$. У цій формулі покладемо $F(g) = (1+g)^{1/2}$, $g = |\sigma|^\alpha$. Тоді

$$\frac{d^{\tilde{m}} F(g)}{dg^{\tilde{m}}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right) - \left(\frac{1}{2} - (\tilde{m}-1)\right)(1+|\sigma|^\alpha)^{1/2-\tilde{m}} \equiv$$

$$\equiv c'_{\tilde{m}} (1+|\sigma|^\alpha)^{1/2-\tilde{m}}, \qquad \sigma \neq 0, \quad s \in \mathbb{N},$$

$$|D_\sigma^s F(g)| \leq \sum_{\tilde{m}=1}^{s} |c'_{\tilde{m}}| (1+|\sigma|^\alpha)^{1/2-\tilde{m}} \sum \frac{s!}{\tilde{m}_1! \ldots \tilde{m}_l!} \Lambda, \qquad \sigma \neq 0, \quad s \in \mathbb{N},$$

де

$$\Lambda := \left| \left(\frac{d}{d\sigma} g(\sigma) \right)^{\tilde{m}_1} \left(\frac{1}{2!} \frac{d^2}{d\sigma^2} g(\sigma) \right)^{\tilde{m}_2} \ldots \left(\frac{1}{l!} \frac{d^l}{d\sigma^l} g(\sigma) \right)^{\tilde{m}_l} \right|.$$

Оскільки $\alpha > 1,$ то правильною є нерівність

$$\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(l-1)) \le \alpha\cdot 2\alpha\ldots l\alpha = \alpha^l l!.$$

Тоді

$$\Lambda \le \alpha^{\tilde m_1}|\sigma|^{(\alpha-1)\tilde m_1}\alpha^{2\tilde m_2}|\sigma|^{(\alpha-2)\tilde m_2}\ldots\alpha^{\tilde m_l}|\sigma|^{(\alpha-l)\tilde m_l} =$$
$$= \alpha^{\tilde m_1+2\tilde m_2+\ldots+l\tilde m_l}|\sigma|^{\alpha(\tilde m_1+\tilde m_2+\ldots+\tilde m_l)-(\tilde m_1+2\tilde m_2+\ldots+l\tilde m_l)} = \alpha^s|\sigma|^{\alpha\tilde m-s}, \quad \sigma\ne 0. \tag{3}$$

Отже,

$$|D^s_\sigma F(g)| = |D^s_\sigma a(\sigma)| \le \sum_{\tilde m=1}^{s}|c'_{\tilde m}|(1+|\sigma|^\alpha)^{1/2-\tilde m}\sum\frac{s!}{\tilde m_1!\ldots\tilde m_l!}|\sigma|^{\alpha\tilde m-s}, \quad s\in\mathbb N.$$

Нехай $|\sigma|\ge 1.$ Тоді

$$\gamma_\alpha := (1+|\sigma|^\alpha)^{1/2-\tilde m}|\sigma|^{\alpha\tilde m-s} = \frac{(1+|\sigma|^\alpha)^{1/2}}{(1+|\sigma|^\alpha)^{\tilde m}}|\sigma|^{\alpha\tilde m-s} \le$$
$$\le \frac{\sqrt2|\sigma|^{\alpha/2}}{|\sigma|^{\alpha\tilde m}}|\sigma|^{\alpha\tilde m-s} = \sqrt2|\sigma|^{\alpha/2-s} \le \sqrt2|\sigma|^{\alpha-s}, \qquad \tilde m\in\{1,\ldots,s\}, \quad s\in\mathbb N.$$

Якщо $\sigma\ne 0,$ $|\sigma|<1,$ то виконується нерівність $\gamma_\alpha \le |\sigma|^{\alpha\tilde m-s} \le |\sigma|^{\alpha-s}.$ Підсумовуючи, отримуємо

$$\forall\sigma\ne 0\colon \gamma_\alpha \le \sqrt2|\sigma|^{\alpha-s}, \quad s\in\mathbb N.$$

Таким чином,

$$|D^s_\sigma a(\sigma)| \le c_s|\sigma|^{\alpha-s}, \qquad \sigma\ne 0, \quad s\in\mathbb N. \tag{4}$$

Отже,

$$I_k := |\sigma|^k\sum_{l=0}^{k}|(a(\sigma)\psi(\sigma))^{(l)}| \le |\sigma|^k\sum_{l=0}^{k}\sum_{j=0}^{l}C_l^j|a^{(j)}(\sigma)||\psi^{(l-j)}(\sigma)| =$$
$$= \sum_{l=0}^{k}\left(|\sigma|^k|a(\sigma)||\psi^{(l)}(\sigma)| + \sum_{j=1}^{l}C_l^j|\sigma|^k|a^{(j)}(\sigma)||\psi^{(l-j)}(\sigma)|\right).$$

Оскільки $\psi\in\Psi_\alpha,$ то (див. властивість 5, п. 1),

$$\forall\{r,m\}\subset\mathbb Z_+, \quad r\ge m, \quad \exists b_r=b_r(\psi)>0 \quad \exists d_m=d_m(\psi)>0$$
$$\forall\sigma\ne 0\colon |\sigma|^r|\psi^{(m)}(\sigma)| \le b_r d_m.$$

Нехай $|\sigma|\ge 1.$ Урахувавши нерівності

$$|a(\sigma)| \le \sqrt2|\sigma|^{\alpha/2} \le \sqrt2|\sigma|^\alpha \le \sqrt2|\sigma|^{\alpha_0}, \quad \alpha_0 := [\alpha]+1,$$

та оцінку (4), знайдемо, що

$$I_k \leq \sum_{l=0}^{k} \left(\sqrt{2}|\sigma|^{k+\alpha_0}|\psi^{(l)}(\sigma)| + \sum_{j=1}^{l} C_l^j c_j |\sigma|^{k+\alpha_0}|\psi^{(l-j)}(\sigma)| \right) \leq$$

$$\leq \sum_{l=0}^{k} \left(\sqrt{2} b_{k+\alpha_0} d_l + \sum_{j=1}^{l} C_l^j c_j b_{k+\alpha_0} d_{l-j} \right) \equiv \tilde{c}_k.$$

Якщо $\sigma \neq 0,\ |\sigma| < 1$, то $a(\sigma) \leq \sqrt{2}$ і

$$I_k \leq \sum_{l=0}^{k} \left(\sqrt{2} b_k d_l + \sum_{j=1}^{l} C_l^j c_j |\sigma|^{k-j}|\psi^{(l-j)}(\sigma)| \right) \leq$$

$$\leq \sum_{l=0}^{k} \left(\sqrt{2} b_k d_l + \sum_{j=1}^{l} C_l^j c_j b_{k-j} d_{l-j} \right) \equiv \tilde{\tilde{c}}_k.$$

З останніх двох нерівностей випливає оцінка

$$\|a\psi\|_p \leq c_p, \quad p \in \mathbb{Z}_+, \qquad c_p = \sum_{k=0}^{p} \left(\tilde{c}_k + \tilde{\tilde{c}}_k \right).$$

Цим доведено, що $a\psi \in \Psi_\alpha$.

Оператор $\Psi_\alpha \ni \psi \to a\psi \in \Psi_\alpha$ є обмеженим, оскільки кожну обмежену множину простору Ψ_α він відображає в обмежену множину цього ж простору (доведення цієї властивості здійснюється за схемою, наведеною вище). Оскільки у просторі Ψ_α, як у просторі з першою аксіомою зліченності, клас лінійних обмежених операторів збігається з класом лінійних неперервних операторів, то звідси випливає, що функція $a(\sigma),\ \sigma \in \mathbb{R}$, — мультиплікатор у просторі Ψ_α.

Лему 1 доведено.

Нехай $\hat{A} := A|_{\Phi_\alpha}$ — звуження оператора A на Φ_α. З леми 1 випливає, що оператор $\hat{A}$ відображає Φ_α в Φ_α, є лінійним і неперервним і при цьому збігається на Φ_α з псевдодиференціальним оператором $F^{-1}[a(\sigma)F]$, побудованим за функцією-символом $a(\sigma) = (1 + |\sigma|^\alpha)^{1/2},\ \sigma \in \mathbb{R}$. Оператор $\hat{A}$ називатимемо оператором дробового диференціювання у просторі Φ_α.

3. Нелокальна за часом задача. Розглянемо еволюційне рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \hat{A}u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R} \equiv \Omega, \tag{5}$$

де $\hat{A}$ — оператор дробового диференціювання у просторі Φ_α $(A = F^{-1}[a(\sigma)F])$, розглянутий у п. 2. Під розв'язком рівняння (5) розуміємо функцію $u(t,x),\ (t,x) \in \Omega$, яка:

1) неперервно диференційовна за змінною t;

2) $u(t,\cdot) \in \Phi_\alpha = \mathcal{D}(\hat{A})$ при кожному $t > 0$;

3) $u(t,x),\ (t,x) \in \Omega$, задовольняє рівняння (5).

Для рівняння (5) поставимо нелокальну багатоточкову за часом задачу: знайти розв'язок рівняння (5), який задовольняє умову

$$\mu u(0,x) - \mu_1 u(t_1,x) - \ldots - \mu_m u(t_m,x) = f(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \quad f \in \Phi_\alpha, \tag{6}$$

де $u(0,x) = \lim_{t\to+0} u(t,x)$, $x \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, $\{\mu,\mu_1,\ldots,\mu_m\} \subset (0,+\infty)$, $\{t_1,\ldots,t_m\} \subset \subset (0,+\infty)$ — фіксовані числа, $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m < +\infty$, $\mu > \sum_{k=1}^m \mu_k$.

Розв'язок задачі (5), (6) шукаємо за допомогою перетворення Фур'є у вигляді $u(t,x) = F^{-1}[v(t,\sigma)]$. Для функцій $v\colon \Omega \to \mathbb{R}$ дістаємо задачу з параметром σ:

$$\frac{dv(t,\sigma)}{dt} + a(\sigma)v(t,\sigma) = 0, \quad (t,\sigma) \in \Omega, \tag{7}$$

$$\mu v(0,\sigma) - \sum_{k=1}^m \mu_k v(t_k,\sigma) = \tilde{f}(\sigma), \quad \sigma \in \mathbb{R}, \tag{8}$$

де $\tilde{f}(\sigma) = F[f](\sigma)$. Розв'язок задачі (7), (8) визначаємо формулою

$$v(t,\sigma) = \tilde{f}(\sigma)\exp\{-ta(\sigma)\}\left(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k \exp\big\{-t_k a(\sigma)\big\}\right)^{-1}, \quad (t,\sigma) \in \Omega.$$

Отже, розв'язком задачі (5), (6) є функція

$$u(t,x) = (2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}} v(t,\sigma)e^{-ix\sigma}d\sigma.$$

Введемо такі позначення: $G(t,x) = F^{-1}[Q(t,\sigma)]$, де $Q(t,\sigma) = Q_1(t,\sigma)Q_2(\sigma)$,

$$Q_1(t,\sigma) = \exp\big\{-ta(\sigma)\big\}, \qquad Q_2(\sigma) = \left(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k \exp\big\{-t_k a(\sigma)\big\}\right)^{-1}.$$

Тоді, міркуючи формально, отримуємо

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} G(t,x-\xi)f(\xi)d\xi = G(t,x) * f(x).$$

Справді,

$$u(t,x) = (2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}} Q(t,\sigma)\left(\int_{\mathbb{R}} f(\xi)e^{i\sigma\xi}d\xi\right)e^{-i\sigma x}d\sigma =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} (2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}} Q(t,\sigma)e^{-i\sigma(x-\xi)}d\sigma f(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}} G(t,x-\xi)f(\xi)d\xi = G(t,x) * f(x).$$

Коректність проведених тут перетворень та збіжність відповідних інтегралів випливає з властивостей функції G, які наведемо нижче. Властивості функції G визначаються властивостями функції Q, оскільки $G = F^{-1}[Q]$. Отже, насамперед дослідимо властивості функції $Q(t,\sigma)$ як функції змінної σ.

Лема 2. *При кожному фіксованому* $t > 0$ *функція* $Q(t,\sigma)$ *нескінченно диференційовна за змінною* $\sigma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; *для її похідних виконуються оцінки*

$$\left|D_\sigma^s Q(t,\sigma)\right| \leq c_s t^{\gamma s} |\sigma|^{\omega_s - s} \exp\left\{-t|\sigma|^{\alpha/2}\right\}, \quad s \in \mathbb{N}, \tag{9}$$

де стала $c_s = c_s(\alpha) > 0$ *не залежить від* t,

$$\gamma = \begin{cases} 0, & \textit{якщо} \quad 0 < t < 1, \\ 1, & \textit{якщо} \quad t \geq 1, \end{cases} \qquad \omega_s = \begin{cases} \alpha, & \textit{якщо} \quad \sigma \neq 0, \quad |\sigma| < 1, \\ \alpha s, & \textit{якщо} \quad |\sigma| \geq 1. \end{cases}$$

Доведення. Для доведення твердження скористаємося формулою (2), у якій покладемо $F = e^g, \ g = -ta(\sigma)$. Тоді

$$\left|D_\sigma^s e^{-ta(\sigma)}\right| \leq e^{-ta(\sigma)} \sum_{\tilde{m}=1}^{s} \frac{s!}{\tilde{m}_1! \ldots \tilde{m}_l!} \tilde{\Lambda}, \quad \sigma \neq 0,$$

де

$$\tilde{\Lambda} := \left| \left(\frac{d}{d\sigma}(-ta(\sigma)) \right)^{\tilde{m}_1} \ldots \left(\frac{1}{l!} \frac{d^l}{d\sigma^l}(-ta(\sigma)) \right)^{\tilde{m}_l} \right|, \quad \sigma \neq 0.$$

Врахувавши оцінку (4), отримаємо

$$\tilde{\Lambda} \leq c_1^{\tilde{m}_1} \ldots c_l^{\tilde{m}_l} t^{\tilde{m}} |\sigma|^{\alpha\tilde{m} - s} \leq \tilde{c}_s t^{\tilde{m}} |\sigma|^{\alpha\tilde{m} - s}, \quad \tilde{c}_s = \max\{1, c_1, \ldots, c_s\}.$$

Тоді

$$\left|D_\sigma^s e^{-ta(\sigma)}\right| \leq \tilde{c}^s s! \sum_{\tilde{m}=1}^{s} t^{\tilde{m}} |\sigma|^{\alpha\tilde{m} - s} \exp\{-t|\sigma|^{\alpha/2}\} \leq$$

$$\leq b_s t^{\gamma s} |\sigma|^{\omega_s - s} \exp\left\{-t|\sigma|^{\alpha/2}\right\}, \tag{10}$$

де $b_s = b_s(\alpha) > 0$,

$$\gamma = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad 0 < t < 1, \\ 1, & \text{якщо} \quad t \geq 1, \end{cases} \qquad \omega_s = \begin{cases} \alpha, & \text{якщо} \quad \sigma \neq 0, \quad |\sigma| < 1, \\ \alpha s, & \text{якщо} \quad |\sigma| \geq 1. \end{cases}$$

Врахувавши формулу Лейбніца диференціювання добутку двох функцій, знайдемо, що

$$D_\sigma^s Q(t,\sigma) = D_\sigma^s (Q_1(t,\sigma) Q_2(\sigma)) = \sum_{p=0}^{s} C_s^p Q_1^{(p)}(t,\sigma) Q_2^{(s-p)}(\sigma).$$

Для проведення подальших оцінок знову скористаємося формулою (2), у якій покладемо $F = \varphi^{-1}, \ \varphi = R$, де

$$R(\sigma) = \mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \exp\{-t_k a(\sigma)\} = Q_2^{-1}(\sigma).$$

Тоді $Q_2(\sigma) = F(\varphi) = R^{-1}$ і

$$|D_\sigma^s Q_2(\sigma)| = \left| \sum_{\tilde{m}=1}^{s} \frac{d^{\tilde{m}}}{dR^{\tilde{m}}} R^{-1} \sum \frac{s!}{\tilde{m}_1! \ldots \tilde{m}_l!} \left(\frac{d}{d\sigma} R(\sigma) \right)^{\tilde{m}_1} \ldots \left(\frac{1}{l!} \frac{d^l}{d\sigma^l} R(\sigma) \right)^{\tilde{m}_l} \right|,$$

$$\sigma \neq 0, \quad s \in \mathbb{N}.$$

Нехай $|\sigma| \geq 1$. Врахувавши вигляд функції $R(\sigma)$ та оцінки (10), одержимо нерівності

$$\left| \frac{1}{j!} \frac{d^j}{d\sigma^j} R(\sigma) \right| \leq \frac{1}{j!} \sum_{k=1}^{m} \mu_k \left| \frac{d^j}{d\sigma^j} e^{-t_k a(\sigma)} \right| \leq$$

$$\leq \frac{b_j}{j!} \sum_{k=1}^{m} \mu_k t_k^{\gamma j} |\sigma|^{\alpha j - j} \exp\{-t_k |\sigma|^{\alpha/2}\} \leq$$

$$\leq 2^j b_j \sum_{k=1}^{m} \mu_k \frac{t_k^{\gamma j}}{t_k^{2j}} |\sigma|^{-j} \equiv \beta_j |\sigma|^{-j}$$

$\left(\text{тут враховано, що } |\sigma|^{\alpha j} \exp\{-t_k |\sigma|^{\alpha/2}\} \leq \dfrac{(2j)!}{t_k^{2j}},\ j \in \{1, \ldots, l\}\right)$.

Отже, якщо $|\sigma| \geq 1$, то правильною є оцінка

$$\left| \left(\frac{d}{d\sigma} R(\sigma) \right)^{\tilde{m}_1} \right| \ldots \left| \left(\frac{1}{l!} \frac{d^l}{d\sigma^l} R(\sigma) \right)^{\tilde{m}_l} \right| \leq \beta_1^{\tilde{m}_1} |\sigma|^{-\tilde{m}_1} \beta_2^{\tilde{m}_2} |\sigma|^{-2\tilde{m}_2} \ldots \beta_l^{\tilde{m}_l} |\sigma|^{-l\tilde{m}_l} \leq$$

$$\leq \beta^{\tilde{m}_1 + \ldots + \tilde{m}_l} |\sigma|^{-(\tilde{m}_1 + 2\tilde{m}_2 + \ldots + l\tilde{m}_l)} \leq \beta^{\tilde{m}} |\sigma|^{-s},$$

де $\beta = \max\{\beta_1, \ldots, \beta_l\}$. Крім того,

$$\frac{d^{\tilde{m}}}{dR^{\tilde{m}}} R^{-1} = (-1)^{\tilde{m}} \tilde{m}! R^{-(\tilde{m}+1)}.$$

Оскільки $\exp\{-t_k a(\sigma)\} \leq 1 \ \forall \sigma \in \mathbb{R},\ k \in \{1, \ldots, m\}$, то

$$\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \exp\{-t_k a(\sigma)\} \geq \mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k.$$

За умовою $\mu > \sum_{k=1}^{m} \mu_k$, тоді

$$R^{-1}(\sigma) \leq \left(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \right)^{-1} \equiv \beta_0, \qquad \left| \frac{d^{\tilde{m}}}{dR^{\tilde{m}}} R^{-1} \right| \leq \beta_0^{\tilde{m}+1} \tilde{m}!.$$

Урахувавши ці нерівності, знайдемо, що

$$|D_\sigma^s Q_2(\sigma)| \leq s! \sum_{\tilde{m}=1}^{s} \beta_0^{\tilde{m}+1} \beta^{\tilde{m}} \tilde{m}! |\sigma|^{-s} \equiv \tilde{\tilde{c}}_s |\sigma|^{-s}, \qquad |\sigma| \geq 1, \quad s \in \mathbb{N}.$$

Якщо $\sigma \neq 0,\ |\sigma| < 1,$ то, міркуючи аналогічно попередньому, отримуємо нерівність

$$|D_\sigma^s Q_2(\sigma)| \leq \tilde{\tilde{c}}_s' |\sigma|^{-s}, \quad s \in \mathbb{N}.$$

У результаті

$$|D_\sigma^s Q_2(\sigma)| \leq \Delta_s |\sigma|^{-s}, \qquad s \in \mathbb{N}, \quad \sigma \neq 0, \tag{11}$$

де $\Delta_s = \max\left\{\tilde{\tilde{c}}_s, \tilde{\tilde{c}}_s'\right\}$. Звідси, з урахуванням (10), (11), маємо оцінку

$$|D_\sigma^s Q(t,\sigma)| \leq \sum_{p=0}^{s} C_s^p b_p t^{\gamma p} |\sigma|^{\omega_p - p} \Delta_{s-p} |\sigma|^{-(s-p)} \exp\{-t|\sigma|^{\alpha/2}\}.$$

Якщо $|\sigma| \geq 1,$ то

$$|\sigma|^{\omega_p - p} \cdot |\sigma|^{-(s-p)} = |\sigma|^{\alpha p - p - s + p} \leq |\sigma|^{\alpha s - s} = |\sigma|^{\omega_s - s},$$

якщо $\sigma \neq 0,\ |\sigma| < 1,$ то

$$|\sigma|^{\omega_p - p} \cdot |\sigma|^{-(s-p)} = |\sigma|^{\alpha - p - s + p} = |\sigma|^{\alpha - s} = |\sigma|^{\omega_s - s}.$$

Отже,

$$\forall \sigma \neq 0\colon \quad |D_\sigma^s Q(t,\sigma)| \leq c_s t^{\gamma s} |\sigma|^{\omega_s - s} \exp\{-t|\sigma|^{\alpha/2}\},$$

де $c_s = \sum_{p=0}^{s} C_s^p b_p \Delta_{s-p}$, що й потрібно було довести.

Зауваження 1. Використовуючи оцінки (9), (10), безпосередньо переконуємося в тому, що $\left\{Q_1(t,\cdot), Q(t,\cdot)\right\} \subset \Psi_\alpha$ при кожному $t > 0$. Звідси, з урахуванням обмеженості $Q_2(\sigma)$ на $\mathbb{R}$, отримуємо, що функція Q_2 — мультиплікатор у просторі Ψ_α.

Дослідимо тепер, які властивості має функція

$$G(t,x) = (2\pi)^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}} Q(t,\sigma) e^{-ix\sigma} d\sigma = F^{-1}[Q(t,\sigma)].$$

Звідси та з леми 2 випливає, що $G(t,\cdot) \in \Phi_\alpha$ при кожному $t > 0$, тобто функція G та її похідні задовольняють нерівності

$$|D_x^k G(t,x)| \leq c_k (1 + |x|)^{-(1+[\alpha]+k)}, \quad (t,x) \in \Omega,$$

де $c_k = c_k(t) > 0$. У цьому можна переконатися й безпосередньо. Наведемо схему доведення зазначених оцінок у випадку $k = 0$.

Якщо $x \neq 0$, то, інтегруючи $s = 1 + [\alpha]$ разів частинами, подамо $G(t,x)$ у вигляді

$$G(t,x) = (2\pi)^{-1} \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{|\sigma| \geq \varepsilon} Q(t,\sigma) e^{-ix\sigma} d\sigma =$$

$$= (2\pi)^{-1} \frac{\tilde{c}_s}{x^s} \lim_{\varepsilon \to +0} \left[\int\limits_{|\sigma| \geq \varepsilon} D_\sigma^s Q(t,\sigma) e^{-ix\sigma} d\sigma + r(\varepsilon, x) \right],$$

де символом $r(\varepsilon, x)$ позначено позаінтегральний вираз, який складається із доданків вигляду $D_\sigma^l Q(t,\sigma)e^{-ix\sigma},\ 0 \le l \le s-1$, зі значеннями в точках $\sigma = -\varepsilon,\ \sigma = \varepsilon$. Із оцінок (9) випливає, що для $\sigma \neq 0,\ |\sigma| < 1$, справджуються нерівності

$$|D_\sigma^l Q(t,\sigma)| \le b_l(t)|\sigma|^{\alpha - l}, \qquad l \in \{1, \ldots, s-1\}, \quad s = 1 + [\alpha],$$

де $b_l(t) = c_l t^\gamma$, причому $\alpha - l \ge \alpha - [\alpha] = \{\alpha\}$. Звідси дістаємо, що $\lim_{\varepsilon \to +0} r(\varepsilon, x) = 0$ у кожній точці $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. На нескінченності позаінтегральні доданки перетворюються в нуль, оскільки

$$\lim_{\sigma \to \pm\infty} |D_\sigma^l Q(t,\sigma)| = 0, \qquad l \in \{0, 1, \ldots, s-1\}, \quad s = 1 + [\alpha].$$

Врахувавши оцінки похідних функції $Q(t,\sigma)$ (див. (9)), знаходимо, що

$$|G(t,x)| \le \frac{\tilde{\tilde{c}}_s}{|x|^s} t^{\gamma s} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\sigma|^{\omega_s - s} \exp\left\{-t|\sigma|^{\alpha/2}\right\} d\sigma =$$

$$= \frac{\tilde{\tilde{c}}_s}{|x|^s} t^{-2/\alpha(\omega_s - s + 1) + \gamma s} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |y|^{\omega_s - s} \exp\left\{-|y|^{\alpha/2}\right\} dy.$$

Якщо $|y| < 1$, то підінтегральна функція

$$|y|^{\omega_s - s} \exp\left\{-|y|^{\alpha/2}\right\} = |y|^{\alpha - s} \exp\left\{-|y|^{\alpha/2}\right\}$$

у точці $y = 0$ має інтегровну особливість, оскільки $\alpha - s = \alpha - (1 + [\alpha]) = \{\alpha\} - 1$. Отже,

$$|G(t,x)| \le c_s'(t)|x|^{-(1+[\alpha])}, \qquad t > 0, \quad x \neq 0.$$

Крім того,

$$|G(t,x)| \le (2\pi)^{-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |Q(t,\sigma)| d\sigma \le (2\pi)^{-1} \left(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k\right)^{-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-t|\sigma|^{\alpha/2}\right\} d\sigma =$$

$$= (2\pi)^{-1} \left(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k\right)^{-1} t^{-2/\alpha} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-|y|^{\alpha/2}\right\} dy = b_0(t)$$

для всіх $x \in \mathbb{R}$. Отже,

$$|G(t,x)| \le c_s(t)(1 + |x|)^{-(1+[\alpha])}, \quad (t,x) \in \Omega.$$

Справді, введемо позначення

$$\Gamma(t,x) := (1 + |x|)^{1+[\alpha]} |G(t,x)| = \sum_{l=0}^{1+[\alpha]} C_{1+[\alpha]}^l |x|^{1+[\alpha]-l} |G(t,x)|.$$

Якщо $|x| < 1$, то

$$\Gamma(t,x) \le \sum_{l=0}^{\alpha_0} C_{\alpha_0}^l |G(t,x)| \le 2^{\alpha_0} b_0(t) \equiv b_1(t), \quad \alpha_0 = 1 + [\alpha] \equiv s.$$

Нехай $|x| \ge 1$. Тоді правильною є оцінка

$$\Gamma(t,x) \le \sum_{l=0}^{\alpha_0} C_{\alpha_0}^l |x|^{\alpha_0 - l} c'_{\alpha_0}(t) |x|^{-\alpha_0} \le 2^{\alpha_0} c'_{\alpha_0}(t) \equiv b_2(t).$$

Отже, $\Gamma(t,x) \le c(t)$ $\forall (t,x) \in \Omega$, де $c(t) = \max\{b_1(t), b_2(t)\}$. Звідси отримуємо оцінку

$$|G(t,x)| \le c(t)(1 + |x|)^{-(1+[\alpha])}, \quad (t,x) \in \Omega,$$

що й потрібно було довести.

Якщо $k \in \mathbb{N}$ фіксоване, то, міркуючи аналогічно тому, як це було зроблено у випадку $k = 0$ та зінтегрувавши частинами $s = 1 + [\alpha] + k$ разів, знаходимо

$$D_x^k G(t,x) = \frac{c_s}{x^s} \int_{\mathbb{R}} D_\sigma^s \big(Q(t,\sigma) \sigma^k \big) e^{-i\sigma x} d\sigma, \quad x \ne 0.$$

Враховуючи формулу диференціювання добутку двох функцій, маємо, що оцінка похідних функції $G(t,x)$ зводиться до оцінки суми інтегралів вигляду

$$\frac{|c_s|}{|x|^s} \Bigg[\int_{\mathbb{R}} |\sigma|^k |D_\sigma^s Q(t,\sigma)| d\sigma + ks \int_{\mathbb{R}} |\sigma|^{k-1} |D_\sigma^{s-1} Q(t,\sigma)| d\sigma + \\ + k(k-1) \frac{s(s-1)}{2!} \int_{\mathbb{R}} |\sigma|^{k-2} |D_\sigma^{s-2} Q(t,\sigma)| d\sigma + \ldots \Bigg]. \tag{12}$$

Кожен із інтегралів у (12) має інтегровну особливість у точці $\sigma = 0$. Справді, розглянемо один із інтегралів вигляду

$$\int_{\mathbb{R}} |\sigma|^{k-p} |D_\sigma^{s-p} Q(t,\sigma)| d\sigma, \qquad 0 \le p \le k-1, \quad s = 1 + [\alpha] + k.$$

Із нерівностей (9) випливає, що в околі точки $y = 0$ $(|y| < 1)$ підінтегральна функція допускає оцінку

$$|\sigma|^{k-p} |D_\sigma^{s-p} Q(t,\sigma)| \le c_{s-p} t^{\gamma(s-p)} |\sigma|^{k-p} |\sigma|^{\alpha - (s-p)} = \\ = c_{s-p} t^{\gamma(s-p)} |\sigma|^{k-p+\alpha-(1+[\alpha]+k-p)} = c_{s-p} t^{\gamma(s-p)} |\sigma|^{\{\alpha\}-1},$$

звідки й випливає збіжність відповідного інтеграла. Оцінюючи аналогічно кожний інтеграл у сумі (12), одержуємо нерівності

$$|D_x^k G(t,x)| \le c_k(t)(1 + |x|)^{-(1+[\alpha]+k)}, \quad (t,x) \in \Omega.$$

Зауважимо також, що з властивостей функцій $a(\sigma)$, $Q(t,\sigma)$ випливає диференційовність функції $G(t,x)$ як функції змінної $t \in (0,\infty)$.

Лема 3. *Функція $G(t,\cdot)$, $t\in(0,+\infty)$, як абстрактна функція параметра t зі значеннями в просторі Φ_α, диференційовна по t.*

Доведення. Із властивості неперервності перетворення Фур'є випливає, що для доведення твердження досить встановити, що функція $F[G(t,x)]=Q(t,\sigma)$, як абстрактна функція параметра t зі значеннями в просторі Ψ_α, диференційовна по t. Іншими словами, потрібно довести, що граничне співвідношення

$$\Gamma_{\Delta t}(\sigma):=\frac{1}{\Delta t}\big[Q(t+\Delta t,\sigma)-Q(t,\sigma)\big]\to\frac{\partial}{\partial t}Q(t,\sigma),\quad \Delta t\to 0,$$

виконується в сенсі збіжності за топологією простору Φ_α.

Зауважимо, що

$$\begin{gathered}\Gamma_{\Delta t}(\sigma)=-a(\sigma)Q(t+\theta\Delta t,\sigma),\quad 0<\theta<1,\\ \Gamma_{\Delta t}(\sigma)-\frac{\partial}{\partial t}Q(t,\sigma)=a^2(\sigma)Q(t+\theta_1\Delta t,\sigma)\theta\Delta t,\quad 0<\theta_1<1.\end{gathered}\tag{13}$$

Враховуючи (13) та властивості функцій $a(\sigma)$, $Q(t,\sigma)$, доводимо (див. доведення лем 1, 2, оцінки (4), (9)), що

$$\forall p\in\mathbb{Z}_+:\ \left\|\Gamma_{\Delta t}(\cdot)-\frac{\partial}{\partial t}Q(t,\cdot)\right\|_p\to 0,\quad \Delta t\to 0.$$

Наслідок 1. *Справджується рівність*

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(f*G(t,x)\right)=f*\frac{\partial G(t,x)}{\partial t}\quad\forall f\in\Phi'_\alpha,\quad t>0.$$

Доведення. За означенням згортки узагальненої функції з основою

$$f*G(t,x)=\langle f_\xi,T_{-x}\check{G}(t,\xi)\rangle,\quad \check{G}(t,\xi)=G(t,-\xi).$$

Тоді

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(f*G(t,\cdot)\right)&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\big[f*G(t+\Delta t,\cdot)-f*G(t,\cdot)\big]=\\&=\lim_{\Delta t\to 0}\left\langle f_\xi,\frac{1}{\Delta t}\left[T_{-x}\check{G}(t+\Delta t,\xi)-T_{-x}\check{G}(t,\xi)\right]\right\rangle.\end{aligned}$$

На підставі леми 3 граничне співвідношення

$$\frac{1}{\Delta t}\left[T_{-x}\check{G}(t+\Delta t,\cdot)-T_{-x}\check{G}(t,\cdot)\right]\xrightarrow[\Delta t\to 0]{}\frac{\partial}{\partial t}T_{-x}\check{G}(t,\cdot)$$

виконується в сенсі збіжності за топологією простору Φ_α, тому, з урахуванням неперервності функціонала f,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(f*G(t,x)\right)&=\langle f_\xi,\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[T_{-x}\check{G}(t+\Delta t,\xi)-T_{-x}\check{G}(t,\xi)\right]\rangle=\\&=\langle f_\xi,\frac{\partial}{\partial t}T_{-x}\check{G}(t,\xi)\rangle=\langle f_\xi,T_{-x}\frac{\partial}{\partial t}\check{G}(t,\xi)\rangle=f*\frac{\partial G(t,x)}{\partial t},\end{aligned}$$

що й потрібно було довести.

Лема 4. *У просторі Φ'_α виконуються співвідношення:*

1) $G(t,\cdot) \to F^{-1}[Q_2],\ t \to +0;$

2)

$$\mu G(t,\cdot) - \sum\nolimits_{k=1}^{m} \mu_k G(t_k,\cdot) \to \delta, \quad t \to +0 \tag{14}$$

(тут δ — дельта-функція Дірака).

Доведення. 1) З урахуванням властивості неперервності перетворення Фур'є для доведення твердження достатньо встановити, що

$$F[G(t,\cdot)] = Q_1(t,\cdot)Q_2(\cdot) \underset{t\to+0}{\longrightarrow} Q_2(\cdot)$$

у просторі Ψ'_α. Для цього візьмемо довільну функцію $\psi \in \Psi_\alpha$ і, скориставшись тим, що Q_2 — мультиплікатор у просторі Ψ_α, а також теоремою Лебега про граничний перехід під знаком інтеграла Лебега, знайдемо, що

$$\langle Q_1(t,\cdot)Q_2(\cdot), \psi(\cdot)\rangle = \langle Q_1(t,\cdot), Q_2(\cdot)\psi(\cdot)\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}} Q_1(t,\sigma)Q_2(\sigma)\psi(\sigma)d\sigma \underset{t\to+0}{\longrightarrow}$$

$$\underset{t\to+0}{\longrightarrow} \int\limits_{\mathbb{R}} Q_2(\sigma)\psi(\sigma)d\sigma = \langle 1, Q_2(\cdot)\psi(\cdot)\rangle = \langle Q_2, \psi\rangle.$$

Звідси випливає твердження 1 леми 4.

2) Врахувавши твердження 1, знайдемо, що

$$\mu G(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k G(t_k,\cdot) \underset{t\to+0}{\longrightarrow} \mu F^{-1}[Q_2] - \sum_{k=1}^{m} \mu_k F^{-1}[Q_1(t_k,\cdot)Q_2(\cdot)] =$$

$$= F^{-1}\left[\mu Q_2(\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k Q_1(t_k,\cdot)Q_2(\cdot)\right] =$$

$$= F^{-1}\left[\left(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k Q_1(t_k,\cdot)\right)Q_2(\cdot)\right] =$$

$$= F^{-1}\left[\left(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k Q_1(t_k,\cdot)\right)\left(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k Q_1(t_k,\cdot)\right)^{-1}\right] =$$

$$= F^{-1}[1] = \delta.$$

Отже, співвідношення (14) виконується в просторі Φ'_α.

Лему доведено.

Зауваження 2. Якщо $\mu = 1,\ \mu_1 = \ldots = \mu_m = 0,$ то задача (5), (6) перетворюється в задачу Коші для рівняння (5). У цьому випадку $Q_2(\sigma) = 1\ \forall \sigma \in \mathbb{R},\ G(t,x) = F^{-1}[e^{-ta(\sigma)}]$ і $G(t,\cdot) \to F^{-1}[1] = \delta$ при $t \to +0$ у просторі Φ'_α.

Наслідок 2. *Нехай*

$$\omega(t,x) = f * G(t,x), \qquad f \in \Phi'_{\alpha,*}, (t,x) \in \Omega$$

(тут $\Phi'_{\alpha,*}$ — клас згортувачів у просторі Φ_α). Тоді у просторі Φ'_α виконується граничне співвідношення

$$\mu\omega(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \omega(t_k,\cdot) \to f, \quad t \to +0. \tag{15}$$

Доведення. Доведемо, що граничне співвідношення

$$F\left[\mu\omega(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \omega(t_k,\cdot)\right] \to F[f], \quad t \to +0, \tag{16}$$

виконується в просторі Ψ'_α. Оскільки $f \in \Phi'_{\alpha,*}$, $G(t,\cdot) \in \Phi_\alpha$ при кожному $t > 0$, то

$$F[\omega(t,\cdot)] = F[f * G(t,\cdot)] = F[f]F[G(t,\cdot)] = F[f]Q(t,\cdot).$$

Отже, потрібно довести, що

$$F[f]\left[\mu Q(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k Q(t_k,\cdot)\right] \to F[f]$$

при $t \to +0$ у просторі ψ'_α. Оскільки $Q(t,\cdot) = Q_1(t,\cdot)Q_2(\cdot) \to Q_2(\cdot)$ при $t \to +0$ у просторі Ψ'_α (див. доведення твердження 1 леми 4), то

$$\mu Q(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k Q(t_k,\cdot) \underset{t\to+0}{\longrightarrow} \mu Q_2(\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k Q_1(t_k,\cdot) Q_2(\cdot) =$$

$$= \left(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k Q_1(t_k,\cdot)\right) Q_2(\cdot) = 1$$

у просторі Ψ'_α. Таким чином, співвідношення (16), а отже, й (15) виконуються у відповідних просторах.

Твердження доведено.

Зауваження 3. Функція $G(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, задовольняє рівняння (5). Справді,

$$\frac{\partial}{\partial t} G(t,x) = \frac{\partial}{\partial t} F^{-1}[Q(t,\sigma)] = F^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial t} Q(t,\sigma)\right] = -F^{-1}[a(\sigma)Q(t,\sigma)],$$

$$\hat{A}G(t,x) = F^{-1}[a(\sigma)F^{-1}[G(t,\cdot)]] = F^{-1}[a(\sigma)Q(t,\sigma)].$$

Отже,

$$\partial G(t,x)/\partial t + \hat{A}G(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \Omega,$$

що й потрібно було довести.

Надалі функцію G називатимемо *фундаментальним розв'язком* багатоточкової за часом задачі для рівняння (5).

З наслідку 2 випливає, що нелокальну багатоточкову за часом задачу для рівняння (5) можна сформулювати так: знайти функцію $u(t,x),\ (t,x)\in\Omega$, яка задовольняє рівняння (5) та умову

$$\mu \lim_{t\to+0} u(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k u(t_k,\cdot) = f, \quad f\in\Phi'_{\alpha,*} \tag{17}$$

(граничне співвідношення (17) розглядається в просторі Φ'_α, обмеження на параметри $\mu,\ \mu_1,\ \ldots,\ \mu_m,\ \ t_1,\ \ldots,\ t_m$ такі ж, як у випадку задачі (5), (6)).

Основний результат роботи сформульовано у такому твердженні.

Теорема. *Нелокальна багатоточкова за часом задача (5), (17) коректно розв'язна, розв'язок визначено формулою*

$$u(t,x) = f * G(t,x), \quad (t,x)\in\Omega,$$

$u(t,\cdot)\in\Phi_\alpha$ *при кожному* $t>0$.

Доведення. Переконаємося в тому, що функція $u(t,x),\ (t,x)\in\Omega$, задовольняє рівняння (5). Справді (див. наслідок 1),

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(f * G(t,x)) = f * \frac{\partial G(t,x)}{\partial t}$$

і

$$\hat{A}u(t,x) = F^{-1}\big[a(\sigma)F[f * G(t,x)]\big].$$

Оскільки f — згортувач у просторі Φ_α, то

$$F[f * G(t,x)](\sigma) = F[f]F[G(t,x)](\sigma) = F[f]Q(t,\sigma).$$

Отже,

$$\hat{A}u(t,x) = F^{-1}[a(\sigma)Q(t,\sigma)F[f](\sigma)] = -F^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial t}Q(t,\cdot)F[f](\sigma)\right] =$$

$$= -F^{-1}\left[F\left[\frac{\partial}{\partial t}G(t,\cdot)\right]\cdot F[f]\right] = -F^{-1}\left[F\left[f * \frac{\partial G(t,\cdot)}{\partial t}\right]\right] = -f * \frac{\partial G(t,x)}{\partial t}.$$

Звідси випливає, що функція $u(t,x),\ (t,x)\in\Omega$, задовольняє рівняння (5).

З наслідку 2 випливає, що u задовольняє умову (17) у вказаному сенсі. Зазначимо також, що u неперервно залежить від функції $f\in\Phi'_{\alpha,*}$, оскільки операція згортки має властивість неперервності.

Залишається переконатися в тому, що задача (5), (17) має єдиний розв'язок. Для цього розглянемо задачу Коші

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \hat{A}^* v, \quad (t,x)\in[0,t_0)\times\mathbb{R}\equiv\Omega', \quad 0\le t<t_0<+\infty, \tag{18}$$

$$v(t,\cdot)|_{t=t_0} = \psi, \quad \psi\in\Phi'_{\alpha,*}, \tag{19}$$

де $\hat{A}^*$ — звуження спряженого оператора до оператора $\hat{A}$ на простір Φ_α. Умову (19) розуміємо в слабкому сенсі. Задача Коші (18), (19) є розв'язною, розв'язок одержано формулою $v(t,\sigma) = \psi * G^*(t,\sigma)$, де $G^*(t,\sigma) = F^{-1}[e^{(t-t_0)a(\xi)}]$, $v(t,\cdot) \in \Phi_\alpha$ при кожному $t \in [0,t_0)$.

Нехай $Q_{t_0}^t : \Phi'_{\alpha,*} \to \Phi_\alpha$ — оператор, який зіставляє функціонал $\psi \in \Phi'_{\alpha,*}$ з розв'язком задачі (18), (19). Оператор $Q_{t_0}^t$ є лінійним і неперервним, визначений для довільних t і t_0 таких, що $0 \le t < t_0 < +\infty$, і має властивості

$$\forall \psi \in \Phi'_{\alpha,*} : \frac{dQ_{t_0}^t \psi}{dt} = \hat{A}^* Q_{t_0}^t \psi, \qquad \lim_{t \to t_0} Q_{t_0}^t \psi = \psi$$

(границя розглядається в просторі Φ'_α).

Розглянемо розв'язок $u(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, задачі (5), (17), який розумітимемо як регулярний функціонал з простору $\Phi'_{\alpha,*} \supset \Phi_\alpha$. Доведемо, що задача (5), (17) може мати лише єдиний розв'язок у просторі $\Phi'_{\alpha,*}$. Для цього достатньо довести, що єдиним розв'язком рівняння (5) при нульовій початковій умові може бути лише функціонал $u(t,x) \equiv 0$ (при кожному $t \in (0,+\infty)$). Застосуємо функціонал u до функції $Q_{t_0}^t \psi \in \Phi_\alpha$, де ψ — довільно фіксований елемент із простору $\Phi_\alpha \subset \Phi'_{\alpha,*}$. Диференціюючи по t і використовуючи рівняння (5), (18), отримуємо

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle u(t,\cdot), Q_{t_0}^t \psi\rangle = \langle \frac{\partial u}{\partial t}, Q_{t_0}^t \psi\rangle + \langle u, \frac{\partial Q_{t_0}^t \psi}{\partial t}\rangle =$$
$$= \langle -Au, Q_{t_0}^t \psi\rangle + \langle u, \hat{A}^* Q_{t_0}^t \psi\rangle = -\langle Au, Q_{t_0}^t \psi\rangle + \langle Au, Q_{t_0}^t \psi\rangle = 0, \quad t \in [0,t_0).$$

Отже, $\langle u(t,\cdot), Q_{t_0}^t \psi\rangle$ є сталою величиною. Із властивостей абстрактних функцій випливає співвідношення

$$\lim_{t \to t_0} \langle u(t,\cdot), Q_{t_0}^t \psi\rangle = \langle u(t_0,\cdot), \psi\rangle = \mathrm{const} \equiv c, \quad c = c(t_0),$$

у довільній точці $t_0 \in (0,+\infty)$. Отже, якщо в (17) $f = 0$, то

$$\mu \lim_{t \to +0} \langle u(t,\cdot), \psi\rangle - \sum_{k=1}^m \mu_k \langle u(t_k,\cdot), \psi\rangle = \mu c_0 - \sum_{k=1}^m \mu_k c_k = 0.$$

Звідси випливає, що $c_0 = c_1 = \ldots = c_m = 0$. Справді, припустимо, що це не так. Наприклад, $c_0 \neq 0$. Тоді маємо співвідношення $\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k \alpha_k = 0$, де $\alpha_k = c_k / c_0$, тобто $\mu = \sum_{k=1}^m \mu_k \alpha_k$. Оскільки α_k — довільні сталі, а за умовою μ, $\mu_1, \ldots, \mu_m$ — фіксовані параметри, причому $\mu > \sum_{k=1}^m \mu_k$, то одержана суперечність доводить, що $c_0 = 0$. Аналогічно доводимо, що $c_1 = \ldots = c_m = 0$. Таким чином, $\langle u(t_0,\cdot), \psi\rangle = 0$ для довільного $\psi \in \Phi_\alpha$, тобто $u(t_0,x)$ — нульовий функціонал із простору $\Phi'_{\alpha,*}$. Оскільки $t_0 \in (0,+\infty)$ і t_0 вибране довільним чином, то $u(t,x) = 0$ для всіх $t \in (0,+\infty)$.

Теорему доведено.

Як приклад, розглянемо задачу (5), (17) з початковою функцією $f = \delta$, де δ — дельта-функція Дірака. Оскільки $\delta \in \Phi'_{\alpha,*}$, то згідно з основною теоремою така задача коректно розв'язна, розв'язок одержуємо формулою

$$u(t,x) = \delta * G(t,x) = G(t,x), \quad (t,x) \in \Omega.$$

Оскільки

$$Q(t,\sigma) = F[G(t,x)] = \int\limits_{\mathbb{R}} G(t,x)e^{ix\sigma}dx, \quad (t,\sigma) \in \Omega,$$

то

$$Q(t,\sigma) = \int\limits_{\mathbb{R}} G(t,x)dx = \exp\{-t\}\left(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \exp\{-t_k\}\right)^{-1}$$

(тут враховано, що $a(0) = 1$). Отже, розв'язок вказаної задачі має властивість

$$\int\limits_{\mathbb{R}} u(t,x)dx \to 0, \quad t \to +\infty.$$

У роботі встановлено, що звуження оператора $A = \sqrt{I + |D_x|^\alpha}$ на простір Φ_α збігається з псевдодиференціальним оператором, побудованим за функцією-символом $a(\sigma) = (1 + + |\sigma|^\alpha)^{1/2}$, $\sigma \in \mathbb{R}$. Особливістю є те, що символом оператора A є неоднорідна функція, не диференційовна у точці $\sigma = 0$ (у теорії псевдодиференціальних операторів, як правило, використовуються однорідні певного порядку символи, негладкі у точці 0). Це дозволило ефективно застосувати перетворення Фур'є при дослідженні нелокальної багатоточкової за часом задачі для еволюційного рівняння з таким оператором. Доведено коректну розв'язність зазначеної задачі з початковою функцією, яка є елементом простору узагальнених функцій типу розподілів. Така постановка задачі дозволяє розширити клас початкових функцій, оскільки кожну функцію, яка має степеневу особливість довільного порядку у точці 0, можна регуляризувати у просторі узагальнених функцій типу розподілів Л. Шварца (тобто таку функцію можна розуміти як регулярний функціонал). Знайдено зображення розв'язку у вигляді згортки фундаментального розв'язку з початковою функцією, при цьому досліджено властивості такого фундаментального розв'язку.

Література

1. В. И. Горбачук, М. Л. Горбачук, *Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений*, Наук. думка, Киев (1984).
2. С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев, *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*, Наука и техника, Минск (1987).
3. В. В. Городецький, О. В. Мартинюк, *Задача Коші та нелокальні задачі для еволюційних рівнянь першого порядку за часовою змінною*, Видав. дім "Родовід", Чернівці (2015).
4. В. В. Городецький, *Граничні властивості гладких у шарі розв'язків рівнянь параболічного типу*, Рута, Чернівці (1998).
5. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Пространства основных и обобщенных функций*, Физматгиз, Москва (1958).
6. В. В. Городецький, *Задача Коші для еволюційних рівнянь нескінченного порядку*, Рута, Чернівці (2005).
7. В. В. Городецький, Я. М. Дрінь, М. І. Нагнибіда, *Узагальнені функції. Методи розв'язання задач*, Книги-XXI, Чернівці (2011).
8. В. В. Городецкий, Н. И. Нагнибида, П. П. Настасиев, *Методы решения задач по функциональному анализу: Учебное пособие*, Изд. 2-е, Книж. дом "Либроком", Москва (2010).

Одержано 24.12.20