УДК 517.5+511.72

ПРО ОДИН КЛАС СИНГУЛЯРНИХ НІДЕ НЕ МОНОТОННИХ ФУНКЦІЙ

М. В. Працьовитий

Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова
вул. Пирогова, 9, Київ, 01601, Україна
Ін-т математики НАН України
вул. Терещенківська, 3, Київ, 01024, Україна
e-mail: prats4444@gmail.com

Я. В. Гончаренко, І. М. Лисенко

Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова
вул. Пирогова, 9, Київ, 01601, Україна
e-mail: yan_a@ukr.net,
iryna.pratsiovyta@gmail.com

О. В. Свинчук

Нац. техн. ун-т України "КПІ" ім. І. Сікорського
просп. Перемоги, 37, Київ, 03056, Україна
e-mail: 7011990@ukr.net

We construct a continuous nowhere monotone function depending on an infinite number of parameters whose derivative is equal to zero almost everywhere (in the sense of the Lebesgue measure). We substantiate that the function is well-defined and nowhere monotonic, analyze its differential properties, study massiveness of level sets, a set of maxima and minima of the function, its structural and variational properties.

Наведено конструкцію неперервної ніде не монотонної функції, залежної від нескінченної кількості параметрів, яка має рівну нулю похідну майже скрізь (у розумінні міри Лебега). Обґрунтовано коректність означення функції, її ніде не монотонність, проаналізовано диференціальні властивості, вивчено масивність множин рівнів, множини максимумів і мінімумів, структурні та варіаційні властивості.

1. Вступ. Як відомо, кожна функція дійсної змінної обмеженої варіації є або функцією стрибків, або абсолютно неперервною (невласним інтегралом своєї похідної), або сингулярною (має рівну нулю похідну майже скрізь у розумінні міри Лебега), або є лінійною комбінацією вказаних функцій (сумішшю трьох попередніх типів).

Сингулярні функції являють собою сім'ю маловивчених функцій чистого лебегівського типу [1, 2]. Справжній інтерес до них (точніше, до монотонних сингулярних функцій) зародився в теорії ймовірностей [3], а саме в теорії розподілів, хоча тривалий час саме цими теоріями категорично ігнорувався [4]. У цій галузі сингулярні функції виступають як функції розподілу ймовірностей [3].

Завдяки теорії фракталів, ідей автомодельності (узагальнення самоподібності, самоафінності) з'явилися продуктивні засоби для теоретичної, а саме аналітичної розбудови теорії сингулярних функцій (задання, вивчення, інтерпретації, застосування). Інший клас маловивчених функцій являють собою неперервні ніде не монотонні функції [5, 6]. Факт існування сингулярних ніде не монотонних функцій є нетривіальним, а масивність цього класу у різних просторах вимагає окремого дослідження. У роботі [7] вдалося побудувати конструкцію функцій цієї родини. Як виявилося пізніше, вже до цього було опубліковано кілька робіт, де вони фігурували [8]. У цій статті ми будуємо континуальну сім'ю таких функцій і проводимо дослідження їхніх властивостей.

2. Базові поняття та факти. Далі $2 < s$ — фіксоване натуральне число, $A_s \equiv \{0, 1, \ldots \ldots, s-1\}$ — алфавіт (набір цифр), $L \equiv A \times A \times A \times \ldots$ — простір послідовностей елементів алфавіту.

Для означення основного об'єкта дослідження ми використовуватимемо s-символьне поліосновне Q_s^*-зображення, яке визначається нескінченною стохастичною матрицею $Q_s^* = \|q_{ik}\|$, де $i = \overline{0, s-1}$, $k \in N$, з властивостями:

1) $q_{ik} > 0$, $q_{0k} + q_{1k} + \ldots + q_{s-1,k} = 1$, $k \in N$;

2) $\prod_{k=1}^{\infty} \max\limits_{i}\{q_{ik}\} = 0$.

Воно ґрунтується на такому твердженні.

Теорема 1 [9]. *Для будь-якого $x \in [0; 1]$ існує не більше двох послідовностей (α_n) з простору L таких, що при $\beta_{ik} \equiv q_{0k} + \ldots + q_{i-1,k}$ виконується рівність*

$$x = \beta_{\alpha_1 1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\beta_{\alpha_k k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j j} \right) \equiv \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k \ldots}.$$

Останній символічний запис $\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k \ldots}$ називається Q_s^*-зображенням числа x, при цьому $\alpha_n = \alpha_n(x)$ називається n-ю цифрою даного зображення.

Властивості Q_s^*-зображення чисел та його геометрія добре вивчені [10]. Зліченна множина чисел має два, до того ж, періодичні зображення

$$\Delta^{Q_s^*}_{c_1 \ldots c_m (0)} \qquad \text{і} \qquad \Delta^{Q_s^*}_{c_1 \ldots c_{m-1} [c_m - 1] (s-1)}.$$

Такі числа називаються Q_s^*-*бінарними*, решта чисел мають єдине Q_s^*-зображення і називаються Q_s^*-*унарними*.

Q_s^*-*циліндром* рангу m з основою $c_1 c_2 \ldots c_m$ називається множина $\Delta^{Q_s^*}_{c_1 c_2 \ldots c_m}$ всіх чисел відрізка $[0; 1]$, які мають такі Q_s^*-зображення, що $\alpha_k(x) = c_k$, $k = \overline{1, m}$.

Q_s^*-циліндр $\Delta^{Q_s^*}_{c_1 c_2 \ldots c_m}$ є відрізком з кінцями $\Delta^{Q_s^*}_{c_1 \ldots c_m (0)}$ і $\Delta^{Q_s^*}_{c_1 \ldots c_m (s-1)}$, довжина якого обчислюється за формулою $\left|\Delta^{Q_s^*}_{c_1 c_2 \ldots c_m}\right| = \prod_{i=1}^{m} q_{c_i i}$. Очевидно, що $\Delta^{Q_s^*}_{c_1 \ldots c_m c} \subset \Delta^{Q_s^*}_{c_1 \ldots c_m}$.

Для будь-якої послідовності $(c_n) \in L$ виконується рівність

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta^{Q_s^*}_{c_1 c_2 \ldots c_m} = \Delta^{Q_s^*}_{c_1 c_2 \ldots c_m \ldots}.$$

Якщо $q_{ik} = q_i = \text{const}$ для довільного $k \in N$, $i \in A_s$, то Q_s^*-зображення називається Q_s-зображенням. При $q_i = \dfrac{1}{s}$, $i = \overline{0, s-1}$, Q_s-зображення є класичним s-*ковим зображенням* чисел.

Відомо [11], що множина $E = E[Q_s; q_0, \ldots, q_{s-1}]$ чисел $x \in [0; 1]$, у Q_s-зображенні яких використовуються всі цифри алфавіту A_s, причому цифра i — з частотою $\nu_i(x) \equiv \equiv \lim_{k \to \infty} \dfrac{N_i(x, k)}{k} = q_i$, де $N_i(x, k)$ — кількість цифр i серед $\alpha_1(x), \alpha_2(x), \ldots, \alpha_k(x)$, є множиною повної міри Лебега.

3. Об'єкт дослідження. Нехай задана матриця $G_s^* \equiv \|g_{ik}\|,\ i \in A_s,\ k \in N$, має властивості:

1) $|g_{ik}| < 1,\ g_{0k} + g_1 + \ldots + g_{[s-1]k} = 1;$

2) $\delta_{0k} \equiv 0,\ 0 < \delta_{ik} \equiv \sum_{j=0}^{i-1} g_{jk} < 1,\ i = \overline{1, s-1},\ \delta_{sk} \equiv 1;$

3) $\prod_{k=1}^{\infty} g_{i_k k} = 0$ для будь-якої послідовності $(i_k) \in L$.

Умови $1-3$ для матриці $G_s^* = \|g_{ik}\|$ називатимемо початковими.

Зауважимо, що при будь-якому $m \in N$ матриця $G_s^*(m) \equiv \|g_{ik}\|$, де $0 \leq i < s,\ m \leq k \in \in N$, задовольняє всі початкові умови.

Лема 1. *Для довільних $i \in A_s \backslash \{0\}$ та $m \in N$ виконується рівність*

$$\delta_{i-1,m} + g_{i-1,m}\left[\delta_{s-1,m+1} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\delta_{s-1,m+k}\prod_{j=1}^{k-1} g_{s-1,m+j}\right)\right] = \delta_{i,m}. \tag{1}$$

Доведення. Покажемо, що різниця правої та лівої частин рівності (1) дорівнює 0. З цією метою зауважимо, що $1 - \delta_{s-1,m+j} = g_{s-1,m+j}$ і розглянемо різниці, отримані в результаті почергового перенесення доданків із лівої частини в праву:

$$\delta_{i,m} - \delta_{i-1,m} = g_{i-1,m},$$

$$g_{i-1,m} - \delta_{s-1,m+1} g_{i-1,m} = g_{i-1,m}(1 - \delta_{s-1,m+1}) = g_{i-1,m} g_{s-1,m+1},$$

$$g_{i-1,m} g_{s-1,m+1} - \delta_{s-1,m+2} g_{i-1,m} g_{s-1,m+1} = g_{i-1,m} q_{s-1,m+1} q_{s-1,m+2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$g_{i-1,m}\prod_{j=1}^{k-1} q_{s-1,m+j} - \delta_{s-1,m+k+1} q_{i-1,m}\prod_{j=1}^{k-1} g_{s-1,m+j} = g_{i-1,m}\prod_{j=1}^{k} g_{s-1,m+j}.$$

Враховуючи, що останній добуток прямує до 0 при $k \to \infty$ (це одна з початкових умов, накладених на матрицю $\|g_{ik}\|$), рівність (1) доведено.

Наслідок 1. *Виконується рівність*

$$\delta_{s-1,m+1} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\delta_{s-1,m+k}\prod_{j=1}^{k-1} g_{s-1,m+j}\right) = 1.$$

Означення 1. *Функцію f означимо рівністю*

$$f\left(x = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\right) \equiv \delta_{\alpha_1 1} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\delta_{\alpha_k k}\prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j j}\right) \equiv \Delta^{G_s^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}. \tag{2}$$

Зауваження 1. Аналогічна функція розглядалась у роботі [12], але при додатковій умові на матрицю $\|g_{ik}\|$, наслідком якої була вимога 2. Вилучення цієї умови вимагало перегляду основних моментів в обґрунтуванні коректності означення функції тощо.

Теорема 2. *Означення функції f рівністю (2) є коректним, функція є неперервною на відрізку $[0;1]$ і її множиною значень є відрізок $[0;1]$.*

Доведення. Для перевірки коректності означення функції досить довести, що вираз, яким задається функція, надає однакові значення при різних зображеннях Q_s^*-бінарних чисел, тобто $f\left(\Delta^{Q_s^*}_{c_1\ldots c_m(0)}\right) = f\left(\Delta^{Q_s^*}_{c_1\ldots c_{m-1}[c_m-1](s-1)}\right)$, а це є наслідком попередньої леми, і те, що ряд (2) є збіжним при будь-якій послідовності $(\alpha_n) \in L$.

Очевидно, що $f(0) = f\left(\Delta^{Q_s^*}_{(0)}\right) = 0,\ f(1) = \left(\Delta^{Q_s^*}_{(s-1)}\right) = 1$.

Подамо значення функції $f(x)$ у вигляді

$$f(x) = S_m(x) + \left(\prod_{j=1}^{m} g_{\alpha_j(x)j}\right)\left(\delta_{\alpha_{m+1}(x)[m+1]} + \sum_{k=m+2}^{\infty}\left(\delta_{\alpha_k(x)k}\prod_{j=m+1}^{k-1} g_{\alpha_j(x)j}\right)\right),$$

де

$$S_m(x) = \delta_{\alpha_1(x)1} + \sum_{k=1}^{m}\left(\delta_{\alpha_k(x)k}\prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j(x)j}\right)$$

— частинна сума ряду (2). Доведемо, що $0 \le S_m < 1$ для довільного $m \in N$ і набору цифр $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$, скориставшись методом математичної індукції.

Для $m = 1$ очевидно, що $S_1 = \delta_{\alpha_1 1} \in [0, 1)$ згідно з умовами на матрицю $\|g_{ik}\|$, причому $S_1 = 0$ лише тоді, коли $\alpha_1 = 0$.

Розглянемо $S_2 = \delta_{\alpha_1 1} + \delta_{\alpha_2 2} g_{\alpha_1 1}$. Якщо $\alpha_1 = 0$, то $S_2 = \delta_{01} + \delta_{\alpha_2 2} g_{01} = \delta_{\alpha_2 2} g_{01}$ і

$$0 < S_2 = \delta_{\alpha_2 2} g_{01} < \delta_{\alpha_2 2} < 1.$$

Нехай $\alpha_1 > 0$. Якщо $g_{\alpha_1 1} > 0$, то

$$0 \le \delta_{\alpha_1 1} < S_2 = \delta_{\alpha_1 1} + \delta_{\alpha_2 2} g_{\alpha_1 1} < \delta_{\alpha_1 1} + g_{\alpha_1 1} = \delta_{[\alpha_1+1]1} < 1.$$

Якщо $g_{\alpha_1 1} < 0$, то $0 \le \delta_{[\alpha_1+1]1} = \delta_{\alpha_1 1} + g_{\alpha_1 1} < S_2 = \delta_{\alpha_1 1} + \delta_{\alpha_2 2} g_{\alpha_1 1} < \delta_{\alpha_1 1} < 1$.

Отже, $0 \le S_2 < 1$.

Припустимо, що $0 \le S_k < 1$ для довільної послідовності $(\alpha_k) \in L$ і розглянемо S_{k+1}. Оскільки

$$S_{k+1} = \delta_{\alpha_1 1} + g_{\alpha_1 1}\left(S'_{k-1} + \delta_{\alpha_{k+1}[k+1]}\prod_{j=2}^{k} g_{\alpha_j j}\right) = \delta_{\alpha_1 1} + g_{\alpha_1 1} S''_k,$$

де S'_k, S''_k — частинні суми ряду (2). Оскільки за припущенням $0 \le S''_k < 1$, то при $g_{\alpha_1} > 0$ маємо

$$0 \le \delta_{\alpha_1 1} < S_{k+1} < \delta_{\alpha_1 1} + g_{\alpha_1 1} = \delta_{[\alpha_1+1]1} < 1,$$

а при $g_{\alpha_1} < 0$ отримуємо

$$0 \le \delta_{[\alpha_1+1]1} = \delta_{\alpha_1 1} + g_{\alpha_1 1} < S_{k+1} < \delta_{\alpha_1 1} < 1.$$

Отже, $0 \le S_{k+1} < 1$ для довільної послідовності (α_n).

Таким чином, для довільного $x \in [0, 1]$ і натурального m виконується $0 \le S_m < 1$, а тому $0 \le f(x) = \lim_{m\to\infty} S_m \le 1$.

Доведемо неперервність функції. Нехай x_0 — довільна Q_2^*-унарна точка інтервалу $(0;1)$. Якщо $x \neq x_0$, то існує $m \in N$ таке, що $\alpha_m(x) \neq \alpha_n(x_0)$, але $\alpha_i(x) \neq \alpha_i(x_0)$ при $i < m$, причому $x \to x_0$ рівносильне $m \to \infty$. Розглянемо модуль різниці

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|\prod_{i=1}^{m-1} g_{\alpha_i(x_0)i}\right| |M|,$$

$$M = \delta_{\alpha_m(x)m} - \delta_{\alpha_m(x_0)m} + \sum_{k=m+1}^{\infty}\left(\delta_{\alpha_k(x)k}\prod_{j=m+1}^{k-1} g_{\alpha_j(x)j}\right) - \sum_{k=m+1}^{\infty}\left(\delta_{\alpha_k(x_0)k}\prod_{j=m+1}^{k-1} g_{\alpha_j(x_0)j}\right).$$

Оскільки $|M|$ — число, що не перевищує 1 (як модуль різниці чисел з $[0;1]$, а перший множник прямує до нуля при $m \to \infty$, то $|f(x) - f(x_0)| \to 0(x \to x_0))$. А це означає неперервність функції f у точці x_0.

Для доведення неперервності функції в Q_s^*-бінарній точці x_0 можна використати ці ж міркування, але для доведення неперервності функції зліва досить розглядати зображення числа x_0 з періодом $(s-1)$, а для доведення неперервності справа — зображення числа x_0 з періодом (0).

Теорему 2 доведено.

4. Властивості монотонності та екстремуми функції.

Лема 2. *Приріст* $\mu_f\left(\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m}\right) \equiv f\left(\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m(s-1)}\right) - f\left(\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m(0)}\right)$ *функції* f *на циліндрі* $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m}$ *обчислюється за формулою*

$$\mu_f\left(\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m}\right) = \prod_{i=1}^{m} g_{c_i i}. \tag{3}$$

Доведення. Виразимо приріст у вигляді

$$\mu_f\left(\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m}\right) = \left(\prod_{i=1}^{m} g_{c_i i}\right)\left[\delta_{s-1,m+1} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\delta_{s-1,m+k}\prod_{j=1}^{k-1} g_{s-1,m+j}\right)\right].$$

Згідно з лемою 1 вираз у квадратних дужках дорівнює

$$\frac{\delta_{s,m} - \delta_{s-1,m}}{g_{s-1,m}} = \frac{1 - \delta_{s-1,m}}{g_{s-1,m}} = 1.$$

Отже, має місце рівність (3).

Теорема 3. *Функція* f *є:*

1) сталою на циліндрі $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m}$ *лише тоді, коли існує* $g_{c_k k} = 0$ *при деякому* $k \leqslant m$*;*

2) неспадною, якщо матриця $\|g_{ik}\|$ *не має від'ємних елементів, причому строго зростаючою, коли всі елементи матриці додатні;*

3) ніде не монотонною, якщо у матриці $\|g_{ik}\|$ *не має нулів і в нескінченній кількості стовпців існують від'ємні числа.*

Доведення. 1) Якщо $g_{c_k k} = 0$, де $k \leq m$, то $\prod_{i=1}^{m} g_{c_i i} = 0$. Отже, для довільного $x \in \Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m}$ маємо

$$f(x) = \delta_{c_1 1} + \sum_{i=1}^{k-1}\left(\delta_{c_i i}\prod_{j=1}^{i-1} g_{c_j j}\right).$$

Нехай тепер $f(x) = \mathrm{const}$ для будь-якого $x \in \Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m}$. Тоді виконується рівність

$$f\left(\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m1(0)}\right) = f\left(\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m(0)}\right),$$

а отже,

$$g_{0,m+1}\prod_{i=1}^{m} g_{c_i i} = 0,$$

тобто $g_{c_k k} = 0$ при деякому $k \le m$, оскільки $g_{0,m+1} \ne 0$. Твердження 1 теореми доведено.

2) Нехай $g_{ik} > 0$ для всіх $i \in A_s$, $k \in N$. Тоді вираз значення функції є поліосновним s-символьним зображенням, породженим матрицею G_s^*. Тому твердження 2 теореми у цьому випадку є очевидним. Іншими словами, твердження 2) є наслідком твердження 1) і попередньої леми, оскільки в цьому випадку прирости функції на всіх циліндрах є невід'ємними.

3) Для доведення ніде не монотонності функції при вказаних умовах досить показати, що вона не є монотонною на кожному з циліндрів. Для цього розглянемо довільний Q_s^*-циліндр $\Delta^{Q_s^*}_{c_1\ldots c_m}$.

Оскільки у матриці $\|g_{ik}\|$ існує нескінченна кількість стовпців з від'ємними елементами, то розглянемо стовпець з номером $m+k$, що містить від'ємний елемент $g_{i,m+k}$, і два відповідні циліндри:

$$\mu_f\left(\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m\underbrace{0\ldots0}_{k-1}0}\right)\mu_f\left(\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m\underbrace{0\ldots0}_{k-1}i}\right) = \left(\prod_{j=1}^{m} g_{c_j j}\right)^2\left(\prod_{j=1+m_0}^{m_0+k-1} g_{0j}\right)^2 g_{0,m+k}g_{i,m+k}.$$

Оскільки $g_{0,m+k} > 0$, то $g_{0,m+k}g_{i,m+k} < 0$, і на одному з циліндрів $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m\underbrace{0\ldots0}_{k-1}0}$ або $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m\underbrace{0\ldots0}_{k-1}i}$ функція має додатний, а на іншому — від'ємний прирости. Тобто прирости функції на вказаних циліндрах, що містяться в циліндрі $\Delta^{Q_s^*}_{c_1\ldots c_m}$, мають різні знаки. Тому функція f на циліндрі $\Delta^{Q_s^*}_{c_1\ldots c_m}$ не є монотонною. Отже, вона ніде не монотонна.

Теорема 4. *1) Якщо $g_{i,m+1}g_{i+1,m+1} < 0$ для деякого i, то Q_s^*-бінарна точка вигляду $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_mi(0)}$ є точкою екстремуму функції f, причому:*

1.1) точкою максимуму, якщо $D_m g_{i,m+1} > 0$;

1.2) точкою мінімуму, якщо $D_m g_{i,m+1} < 0$;

де $D_m = \prod_{k=1}^{m} g_{c_k k} \ne 0$ — приріст функції на циліндрі $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m}$.

2) Якщо $g_{i,m+1}g_{i+1,m+1} \ge 0$, то жодна з точок вигляду $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_mi(0)}$ не є точкою екстремуму функції f.

Доведення. 1. Нехай $D_m = \prod_{k=1}^{m} g_{c_k k} \ne 0$. Розглянемо можливі випадки.

1.1. Нехай $D_m > 0$. Якщо $g_{i+1,m+1} > 0$, то на циліндрі $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m[i+1]}$ функція має додатний приріст, а на циліндрі $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_mi}$, який лежить лівіше — від'ємний. Тому спільний кінець цих циліндрів — точка $x_i \equiv \Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_mi(0)}$, є точкою максимуму.

Якщо $g_{i+1,m+1} < 0$, то на циліндрі $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m[i+1]}$ функція має від'ємний приріст, а на циліндрі $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_mi}$ — додатний. Отже, точка x_i є точкою мінімуму.

1.2. Нехай $D_m < 0$. Якщо $g_{i+1,m+1} > 0$, то на циліндрі $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m[i+1]}$ функція має від'ємний приріст, а на циліндрі $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m i}$ — додатний. Отже, точка x_i є точкою мінімуму.

Якщо $g_{i+1,m+1} < 0$, то на циліндрі $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m[i+1]}$ функція має додатний приріст, а на циліндрі $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m i}$ — від'ємний. Отже, точка x_i є точкою максимуму.

2. Якщо $g_{i,m+1}g_{i+1,m+1} = 0$, то згідно з теоремою 3 принаймні на одному з циліндрів $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m i}$ або $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m[i+1]}$ функція є сталою, а отже, точка x_i не є точкою екстремуму.

Якщо $g_{i,m+1}g_{i+1,m+1} > 0$, то на обох циліндрах функція f має приріст однакового знака, а отже, точка x_i не є точкою екстремуму, оскільки для одного циліндра вона є точкою максимуму, а для другого — точкою мінімуму.

5. Варіаційні властивості.

Теорема 5 [12]**.** *Функція f на циліндрі $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m} = [u; v]$ набуває найбільшого й найменшого значення на його кінцях. Причому, якщо*

$$D_m \equiv \prod_{i=1}^{m} g_{c_i i} \neq 0, \qquad y_m = \delta_{c_1 1} + \sum_{k=2}^{m}\left(\delta_{c_k k}\prod_{i=1}^{k-1} g_{c_i i}\right),$$

то при $D_m > 0$ маємо $\max f(x) = f(v) = y_m + D_m,\ \min f(x) = f(u) = y_m$, а при $D_m < 0$ — $\max f(x) = f(u) = y_m,\ \min f(x) = f(v) = y_m + D_m$.

Теорема 6. *Варіація функції $f(x)$ обчислюється за формулою*

$$V_0^1(f) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{s-1} |g_{in}|\right). \tag{4}$$

Доведення. Враховуючи, що функція f найбільшого і найменшого значень на кожному циліндрі набуває на його кінцях, розглянемо суму коливань функції на циліндрах 1-го рангу:

$$V_1 = \sum_{i=0}^{s-1}\left|f\left(\Delta^{Q_s^*}_{i+1,(0)}\right) - f\left(\Delta^{Q_s^*}_{i(0)}\right)\right| = \sum_{i=0}^{s-1}|g_{i1}|,$$

2-го рангу:

$$V_2 = \sum_{j=0}^{s-1}|g_{i_1 1}|\sum_{i=1}^{s-1}\left|f\left(\Delta^{Q_s^*}_{i_1,i_2+1,(0)}\right) - f\left(\Delta^{Q_s^*}_{i_1,i_2(0)}\right)\right| = \left(\sum_{j=0}^{s-1}|g_{i_1 1}|\right)\left(\sum_{i=0}^{s-1}|g_{i_2 2}|\right),$$

n-го рангу:

$$V_n = \left(\sum_{i_1=0}^{s-1}|g_{i_1 1}|\right)\left(\sum_{i_2=0}^{s-1}|g_{i_2 2}|\right)\ldots\left(\sum_{i_n=0}^{s-1}|g_{i_n n}|\right) = \prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{i_k=0}^{s-1}|g_{i_k k}|\right).$$

Тоді для будь-якого натурального n

$$V_n \leq V_0^1(f) \leq \overline{\lim_{n\to\infty}}\, V_n.$$

Оскільки ж послідовність (V_n) є монотонною, то

$$V_0^1(f) = \lim_{n\to\infty} V_n = \prod_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{s-1}|g_{in}|\right).$$

Подамо варіацію у вигляді

$$V_0^1(f) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \left(1 - \sum_{i=0}^{s-1} |g_{in}|\right)\right).$$

Наслідок 2. *Функція $f(x)$ є функцією обмеженої варіації тоді і тільки тоді, коли*

$$W \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{s-1} |g_{in}| - 1\right) < \infty. \tag{5}$$

Наслідок 3. *Для того щоб функція f мала необмежену варіацію, необхідно й достатньо, щоб $W = \infty$. Зокрема, при $u_n = \sum_{i=0}^{s-1} |g_{in}| \nrightarrow 1,\ n \to \infty$, маємо $V_0^1(f) = \infty$.*

Якщо всі стовпці матриці G_s^* однакові, причому серед її елементів є від'ємні, то f є функцією необмеженої варіації.

6. Диференціальні властивості функції.

Лема 3. *Якщо у точці x_0 функція f має скінченну похідну $f'(x_0)$, то вона обчислюється за формулою*

$$f'(x_0) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{g_{\alpha_k(x_0)k}}{q_{\alpha_k(x_0)k}}. \tag{6}$$

Доведення. Відомо, що коли функція f має скінченну похідну, то вона дорівнює циліндричній похідній:

$$f'\left(x_0 = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{f\left(\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\ldots\alpha_n(s-1)}\right) - f\left(\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\ldots\alpha_n(0)}\right)}{\left|\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\ldots\alpha_n}\right|} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\prod_{i=1}^{n} g_{\alpha_i i}}{\prod_{i=1}^{n} q_{\alpha_i i}} = \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} \frac{g_{\alpha_i i}}{q_{\alpha_i i}},$$

тобто виконується рівність (6).

Теорема 7. *Якщо функція f має скінченну варіацію, тобто виконується умова (5), і для майже всіх $x \in [0;1]$ границя послідовності $\left(\frac{g_{\alpha_k(x_0)k}}{q_{\alpha_k(x_0)k}}\right)$ не існує або відмінна від 1, то f є сингулярною функцією (має рівну нулю похідну майже скрізь у розумінні міри Лебега).*

Доведення. Як відомо, кожна неперервна функція обмеженої варіації є різницею двох монотонних функцій, а отже, має скінченну похідну майже скрізь у розумінні міри Лебега.

Нехай x_0 — довільна точка множина повної міри Лебега, у якій існує скінченна похідна. Тоді згідно з попередньою лемою вона обчислюється за формулою (6), але при виконанні умов теореми необхідна умова збіжності нескінченного добутку не виконується. Тоді він розбігається до нуля. Отже, функція f є сингулярною.

Наслідок 4. *Якщо при виконанні умов теореми матриця $\|g_{ik}\|$ не має нульових елементів, але має нескінченну кількість від'ємних елементів, то функція f є сингулярною ніде не монотонною функцією.*

7. Окремий випадок. Зупинимося тепер на одному простому, але цікавому окремому випадку. Розглянемо функцію f при таких обмеженнях на матрицю G_s^*:

1) $s = 2k-1,\ 2 \le k \in N,\ 0 < b_1 < 1,\ 0 < q < 1,\ b_n = b_1 q^{n-1}$;

2) n-й стовпчик матриці складається з елементів

$$g_{0n} = g_{s-1,n} = \frac{1+b_n}{2},$$

$$g_{1n} = g_{3n} = \ldots = g_{s-2,n} = -b_n,$$

$$g_{2n} = g_{4n} = \ldots = g_{s-3,n} = b_n.$$

У цьому випадку маємо $\delta_{0n} = 0,\ \delta_{1n} = \delta_{3n} = \delta_{2k-1,n} = \dfrac{1+b_n}{2},\ \delta_{2n} = \delta_{4n} = \delta_{2k,n} = \dfrac{1-b_n}{2}$, $u_n \equiv \sum_{i=0}^{s-1} |g_{in}| - 1 = 2(k-1)b_n$. Тоді $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \dfrac{2(k-1)b_1}{1-q} < \infty$,

Отже, згідно з наслідком 2 функція f має обмежену варіацію, згідно з теоремою 3 є ніде не монотонною і згідно з теоремою 7 є сингулярною. Зосередимо тепер увагу на її фрактальних властивостях, а саме: на властивостях множин рівнів функції.

Нагадаємо, що *множиною рівня* y_0 *функції* f називається множина $\{x\colon f(x) = y_0\}$ і позначається $f^{-1}(y_0)$.

Нехай

$$C\left[Q_s^*; B_n\right] \equiv \left\{x\colon x = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots},\ \ \alpha_n(x) \in B_n \subset A_s,\ \ n \in N\right\},$$

$$V \equiv A_s \setminus \{0, s-1\}, \quad V_0 \equiv \{2, 4, \ldots, s-2\}, \quad V_1 \equiv \{1, 3, \ldots, s-3\}.$$

Лема 4. *Множина $C\left[Q_s^*; V\right]$ цілком належить множині $f^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ рівня $y_0 = \dfrac{1}{2}$. Вона є континуальною, досконалою, ніде не щільною множиною і залежно від матриці $Q_s^* = \|q_{ik}\|$ може мати нульову або додатну міру Лебега, а саме: має додатну міру Лебега тоді і тільки тоді, коли збігається додатний ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_{0k} + q_{s-1,k}}{q_{1k} + q_{2k} + \ldots + q_{s-2,k}}.$$

Якщо Q_s^*-зображення є Q_s-зображенням, то множина $C\left[Q_s^*; V\right]$ є самоподібною множиною канторівського типу, фрактальна вимірність Гаусдорфа – Безиковича якої є розв'язком рівняння

$$\sum_{i=1}^{s-2} q_i^x = 1, \quad \textit{тобто} \quad x = \log_{q_1,\ldots,q_{s-2}} 1. \tag{7}$$

Доведення. Вимагає доведення лише перша частина твердження, оскільки властивості множини $C\left[Q_s^*, V\right]$ добре відомі [9, 10].

Зауважимо, що $f\left(\Delta^{Q_s^*}_{(i)}\right) = \dfrac{1}{2}$ при $i = 1, 2, \ldots, s-2$. Справді, для парного i маємо

$$f\left(\Delta^{Q_s^*}_{(i)}\right) = \frac{1-b_1}{2} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1-b_k}{2}\prod_{j=1}^{k-1} b_j\right) = \frac{1}{2},$$

для непарного i —

$$f\left(\Delta^{Q_s^*}_{(i)}\right) = \frac{1+b_1}{2} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1+b_k}{2}\prod_{j=1}^{k-1}(-b_j)\right) = \frac{1}{2}.$$

Очевидно, що коли цифри i та j мають однакову парність і відмінні від 0 та $(s-1)$, то $f\left(\Delta^{Q_2^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}i\alpha_{k+1}\ldots}\right) = f\left(\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}j\alpha_{k+1}\alpha_{k+2}\ldots}\right)$.

Тому множина $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ прообразів числа $\frac{1}{2}$ при відображенні f включає обидві множини $C\left[Q_s^*, V_i\right]$, де V_i — множина всіх цифр алфавіту A_s однакової парності.

Більш того, якщо $\alpha_n \in V$, то $f\left(x = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\right) = \frac{1}{2}$. Отже, $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \supset C\left[Q_s^*, V\right]$.

Як відомо [13], міра Лебега множини $C\left[Q_s^*, B_n\right]$ обчислюється за формулою

$$\lambda[C] = \prod_{k=1}^{\infty}\left[1 - \frac{\lambda(\overline{F}_k)}{\lambda(F_{k-1})}\right],$$

де F_k — об'єднання циліндрів рангу k, серед внутрішніх точок яких є точки множини $C\left[Q_s^*, B_n\right]$, $\overline{F}_k \equiv F_{k-1} \setminus F_k$, а саме:

$$F_k = \sum_{c_1\in B_1}\ldots\sum_{c_k\in B_k}\left|\Delta^{Q_s^*}_{c_1\ldots c_k}\right|, \qquad \overline{F}_k = \sum_{c_1\in B_1}\ldots\sum_{c_{k-1}\in B_{k-1}}\sum_{c\in A_s\setminus B_k}\left|\Delta^{Q_s^*}_{c_1\ldots c_k}\right|.$$

Для множини $C\left[Q_s^*, V\right]$ маємо $F_k = q_{1k} + \ldots + q_{s-2,k}$, $\overline{F}_k = q_{0k} + q_{s-1,k}$. Тоді згідно з теоремами про зв'язок збіжності нескінченних добутків і рядів маємо

$$\lambda(C) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{q_{0k}+q_{s-1,k}}{q_{1k}+q_{2k}+\ldots+q_{s-2,k}} < \infty. \tag{8}$$

Структура самоподібності множини $C = C\left[Q_s^*, V\right]$ має вигляд

$$C\left[Q_s^*, V\right] = C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_{s-2},$$

де C — подібна множині $C_i \equiv \Delta_i^{Q_s^*} \cap C$ з коефіцієнтом q_i.

Оскільки C задовольняє умову відкритої множини, то самоподібна розмірність, яка є розв'язком рівняння (7), збігається з її фрактальною розмірністю Гаусдорфа – Безиковича.

Теорема 8. *Кожне двійково-раціональне число y_0 є образом континуальної фрактальної множини чисел, Q_s^*-зображення яких не використовує цифр 0 і $(s-1)$, починаючи з деякого місця.*

Доведення. Нехай $y_0 = \Delta^2_{c_1\ldots c_m 1(0)}$ — довільне двійково-раціональне число. Кожне з чисел $x = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\ldots\alpha_m\ldots}$, де $\alpha_j \in V$ при $j > m$ і

$$\alpha_i = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad c_i = 0, \\ 1, & \text{якщо} \quad c_i = 1, \quad i = \overline{1,m}, \end{cases}$$

є прообразом y_0.

Тому множина $f^{-1}(y_0)$ прообразів числа y_0 при відображенні f включає множину $C\,[Q_s^*, B_n]$, де при $n \le m$

$$B_n = \begin{cases} \{0\}, & c_n = 0, \\ \{1\}, & c_n = 1, \end{cases}$$

і $B_{m+k} = V$.

Тоді фрактальна розмірність Гаусдорфа – Безиковича множини $f^{-1}(y_0)$ більша або рівна розмірності множини $C\,[Q_s^*; V]$.

Наслідок 5. *Якщо матриця $Q_s^* = \|q_{ik}\|$ задовольняє умову (8), то атомами розподілу значень випадкової величини $Y = f(X)$, де X — випадкова величина з рівномірним на $[0;1]$ розподілом, є всі двійково-раціональні числа відрізка $[0;1]$.*

Наслідок 6. *Якщо Q_s^*-зображення є класичним s-ковим зображенням, то*

$$\int\limits_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2},$$

якщо при цьому y_0 — s-ково-раціональне число, то фрактальна розмірність Гаусдорфа – Безиковича множини рівня y_0 дорівнює $\log_s(s-2)$.

Література

1. М. В. Працьовитий, А. В. Калашніков, *Самоафінні сингулярні та ніде не монотонні функції, пов'язані з Q-зображенням чисел*, Укр. мат. журн., **65**, № 3, 381 – 393 (2013).
2. М. В. Працьовитий, О. В. Свинчук, *Розсіювання значень однієї фрактальної неперервної немонотонної функції канторівського типу*, Нелін. коливання, **21**, № 1, 116 – 130 (2018).
3. А. Ф. Турбин, Н. В. Працевитый, *Фрактальные множества, функции, распределения*, Наук. думка, Киев (1992).
4. В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения: В 2-х т.*, Т. 1, Мир, Москва (1984).
5. Н. В. Працевитый, *Непрерывные канторовские проекторы*, Методы исследования алгебраических и топологических структур, Киев. гос. пед. ин-т, Киев, 95 – 105 (1989).
6. M. Jarnicki, P. Pflug, *Continuous nowhere differentiable function. The monsters of analysis*, Springer Monogr. Math., Springer, Cham (2015).
7. М. В. Працьовитий, *Ніде не монотонні сингулярні функції*, Наук. часопис Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. науки, № 12, 24 – 36 (2011).
8. А. Н. Агаджанов, *Сингулярные функции, не имеющие интервалов монотонности, в задачах финитного управления распределенными системами*, Докл. Акад. наук, **454**, вып. 5, 503 – 506 (2014).
9. Г. М. Торбин, Н. В. Працевитый, *Случайные величины с независимыми Q^*-знаками, Случайные эволюции: теоретические и прикладные задачи*, Ин-т математики АН Украины, Киев, (1992).
10. М. В. Працьовитий, *Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів*, Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова, Київ (1998).
11. І. В. Замрій, М. В. Працьовитий, *Сингулярність інверсора цифр Q_3-зображення дробової частини дійсного числа, його фрактальні та інтегральні властивості*, Нелін. коливання, **18**, № 1, 55 – 70 (2015).
12. М. В. Працьовитий, О. В. Свинчук, *Сингулярні немонотонні функції, визначені в термінах Q_s^*-зображення аргументу*, Наук. часопис Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. науки, **15**, 144 – 155 (2013).
13. S. Albeverio, M. Pratsiovytyi, G. Torbin, *Fractal probability distributions and transformations preserving the Hausdorff – Besicovitch dimension*, Ergodic Theory Dynam. Systems, **24**, 1 – 16 (2004).

Одержано 30.12.2020