УДК 517.98

УЗАГАЛЬНЕНІ ПРОСТОРИ ТИПУ S ТА ЕВОЛЮЦІЙНІ ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

В. В. Городецький, О. В. Мартинюк, Р. С. Колісник

Чернів. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича
вул. М. Коцюбинського, 2, Чернівці, 58012, Україна
e-mail: v.gorodetskiy@chnu.edu.ua,
alfaolga1@gmail.com,
r.kolisnyk@chnu.edu.ua

We investigate the base operations (argument shift, differentiation, etc.) in generalized spaces of type S, some classes of analytic functions and pseudodifferential operators in such spaces, properties of the Fourier transform of generalized functions, convolutions, convoluters, and multiplicators. The correct solvability of the nonlocal time problem for one class of pseudo-differential equations in generalized spaces of type S is proved, the solution is given in the form of a convolution of the fundamental solution with the initial function, which is an element of the space of generalized functions of ultradistribution type.

Досліджуються основні операції (зсуву аргументу, диференціювання та ін.) в узагальнених просторах типу S, деякі класи аналітичних функцій та псевдодиференціальних операторів у таких просторах, вивчаються властивості перетворення Фур'є узагальнених функцій, згорток, згортувачів та мультиплікаторів. Доведено коректну розв'язність нелокальної за часом задачі для одного класу псевдодиференціальних рівнянь в узагальнених просторах типу S, наведено зображення розв'язку у вигляді згортки фундаментального розв'язку з початковою функцією, яка є елементом простору узагальнених функцій типу ультрарозподілів.

Вступ. Псевдодиференціальні оператори (ПДО) та рівняння з псевдодиференціальними операторами тісно пов'язані з важливими задачами аналізу, сучасної математичної фізики, теорією ймовірностей, теорією фракталів. До класу ПДО належать диференціальні оператори, оператори дробового диференціювання та інтегрування, згортки, тощо.

Широкий клас ПДО формально можна подати у вигляді $A = J^{-1}_{\sigma\to x}[a(t,x;\sigma)J_{x\to\sigma}]$, $\{x,\sigma\}\subset\mathbb{R}$, $t>0$, де a — символ оператора A, що задовольняє певні умови, J, J^{-1} — пряме та обернене перетворення Фур'є або Бесселя. Якщо символ a є цілою парною функцією аргументу σ, то еволюційні рівняння з оператором A містять також сингулярні диференціальні рівняння, зокрема, з оператором Бесселя $B_\nu = d^2/dx^2 + (2\nu+1)x^{-1}d/dx$, $\nu > -1/2$, який у своїй структурі містить вираз $1/x$ і формально зображається у вигляді $B_\nu = F^{-1}_{B_\nu}[-\sigma^2 F_{B_\nu}]$, де F_{B_ν} — інтегральне перетворення Бесселя. Якщо $a(t,x;\sigma)\equiv P(t,x;\sigma)$, де P — поліном змінної σ при фіксованих t, x, який задовольняє умову "параболічності", то такі рівняння належать до параболічних рівнянь, якщо $J_{x\to\sigma} = F$ — перетворення Фур'є, або до B-параболічних рівнянь, якщо $J_{x\to\sigma} = F_{B_\nu}$; B-параболічні рівняння вироджуються на межі й за своїми внутрішніми властивостями близькі до рівномірно параболічних рівнянь [1].

Дослідженням задачі Коші для еволюційних рівнянь з ПДО займалося багато математиків, використовуючи при цьому різні методи й підходи (M. Nagase, R. Shinkai, C. Tsutsumi, М. А. Шубін, М. Тейлор, Л. Хермандер, А. Н. Кочубей, Ю. А. Дубінський, Б. Й. Пташник та ін.). Одержано важливі результати про розв'язність задачі Коші в різних функціональних просторах. При цьому часто початкові функції мають особливості в одній або декількох точках і допускають регуляризацію у певних просторах узагальнених функцій типу розподілів Соболєва – Шварца, ультрарозподілів, гіперфункцій та ін. Отже, задача Коші для зазначених рівнянь має природну постановку й у класах узагальнених функцій скінченного та нескінченного порядків.

Узагальненням задачі Коші є нелокальна багатоточкова за часом задача, коли початкову умову $u(t,\cdot)|_{t=0} = f$ замінює умова

$$\sum_{k=0}^{m} \alpha_k u(t,\cdot)|_{t=t_k} = f,$$

де $t_0 = 0$, $\{t_1,\ldots,t_m\} \subset (0,T]$, $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m \le T$, $\{\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_m\} \subset \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, — фіксовані числа (якщо $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = 0$, то маємо, очевидно, задачу Коші); відповідна умова трактується в класичному розумінні або в слабкому сенсі, якщо f — узагальнена функція, тобто як граничне співвідношення

$$\sum_{k=0}^{m} \alpha_k \lim_{t\to t_k} \langle u(t,\cdot),\varphi\rangle = \langle f,\varphi\rangle$$

для довільної функції φ з основного простору (тут $\langle f,\varphi\rangle$ позначає дію функціонала f на основну функцію φ).

Нелокальна багатоточкова за часом задача відноситься до нелокальних задач для диференціально-операторних рівнянь та рівнянь із частинними похідними. Такі задачі виникають при моделюванні багатьох процесів та практичних задач крайовими задачами з нелокальними умовами для рівнянь із частинними похідними, при описі всіх коректних задач для конкретних операторів, при побудові загальної теорії крайових задач (див., наприклад, [2 – 8]).

У цій роботі досліджується нелокальна багатоточкова за часом задача для рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \varphi\left(\frac{i\partial}{\partial x}\right) u = 0, \quad (t,x) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}, \tag{1}$$

де $\varphi\left(\frac{i\partial}{\partial x}\right)$ трактується як псевдодиференціальний оператор в узагальнених просторах типу S, побудований за символом-функцією φ, яка задовольняє певні умови. Вказане рівняння містить, зокрема, оператор диференціювання дробового порядку $\varphi\left(\frac{i\partial}{\partial x}\right) = \sqrt{I - \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2}$, побудований за функцією-символом $\varphi(\sigma) = (1+\sigma^2)^{1/2}$, $\sigma \in \mathbb{R}$. Встановлено коректну розв'язність нелокальної багатоточкової за часом задачі для рівняння (1), дано зображення розв'язку у вигляді згортки фундаментального розв'язку з початковою функцією, яка є елементом простору узагальнених функцій типу ультрарозподілів, досліджено властивості фундаментального розв'язку нелокальної задачі.

Зазначимо, що простори типу S, введені І. М. Гельфандом та Г. Є. Шиловим у [9], використовуються при дослідженні проблеми про класи єдності та класи коректності задачі Коші для рівнянь із частинними похідними зі сталими або залежними лише від часової змінної коефіцієнтами. Простори типу S $\left(\text{простори } S_\alpha^\beta \equiv S_{k^k\alpha}^{n^n\beta}\right)$ будуються за двома послідовностями $\{k^{k\alpha}\}$, $\{n^{n\beta}\}$, $\{k,n\} \subset \mathbb{Z}_+$, де $\alpha, \beta > 0$ — фіксовані параметри; елементи таких просторів — нескінченно диференційовні на $\mathbb{R}$ функції, які задовольняють умову

$$\left|x^k \varphi^{(n)}(x)\right| \leq cA^k B^n k^{k\alpha} n^{n\beta}, \quad \{k,n\} \subset \mathbb{Z}_+,$$

з деякими сталими c, $A, B > 0$, залежними від функції φ. У [9] доведено, що кожна функція з простору S_α^β разом з усіма своїми похідними при $|x| \to +\infty$ спадає швидше, ніж $\exp\left\{-a|x|^{1/\alpha}\right\}$, $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$. У працях [10–16] встановлено, що простори типу S та S', топологічно спряжені з S, є природними множинами початкових даних задачі Коші для широких класів рівнянь із частинними похідними скінченного та нескінченного порядків, при яких розв'язки є цілими функціями за просторовою змінною. Представляє науковий інтерес дослідження просторів $S_{a_k}^{b_n}$, які є узагальненнями просторів типу S і будуються за певними послідовностями $\{a_k\}$ та $\{b_n\}$ додатних чисел (дослідження топологічної структури, властивостей функцій, основних операцій у вказаних просторах). У першій частині цієї роботи (пп. 1–4) даються відповіді саме на ці питання. Досліджуються також деякі класи аналітичних функцій в узагальнених просторах типу S, деякі класи псевдодиференціальних операторів у таких просторах, властивості перетворення Фур'є узагальнених функцій з просторів типу S'.

1. Попередні відомості. Узагальнені простори типу S. Розглянемо послідовність додатних чисел $\{m_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$, яка має властивості:

1) $\forall n \in \mathbb{Z}_+ : m_n \leq m_{n+1},\ m_0 = 1$;

2) $\exists\, M > 0\ \exists\, h > 0\ \forall n \in \mathbb{Z}_+ : m_{n+1} \leq M h^n m_n$;

3) $\exists\, \omega \geq 1\ \exists\, L \geq 1 : m_k m_{n-k} \leq \omega L^n m_n,\ 0 \leq k \leq n,\ n \in \mathbb{Z}_+$.

Прикладами таких послідовностей є послідовності Жевре вигляду $m_n = n^{n\alpha}$, $m_n = (n!)^\alpha$, $n \in \mathbb{Z}_+$, де $\alpha > 0$ — фіксований параметр ($0^0 = 1$).

Покладемо $\gamma(x) = \inf_{n\in\mathbb{Z}_+} \dfrac{m_n}{|x|^n}$, $x \neq 0$. Очевидно, що γ — невід'ємна парна на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ функція. Якщо $x \in [-1,1] \setminus \{0\}$, то, з урахуванням властивості 1) послідовності $\{m_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$, маємо $\inf_{n\in\mathbb{Z}_+} \dfrac{m_n}{|x|^n} = 1$, тобто $\gamma(x) = 1$ для $x \in [-1,1] \setminus \{0\}$.

Якщо $1 \leq x_1 < x_2$, то $\gamma(x_2) \leq \gamma(x_1) \leq \gamma(1) = 1$, тобто γ монотонно спадає на проміжку $[1, +\infty)$. Звідси, з урахуванням властивості парності функції γ на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, дістаємо, що γ монотонно зростає на проміжку $(-\infty, -1]$, $0 < \gamma(x) \leq 1\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Наприклад, якщо $m_n = n^{n\alpha}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha > 0$, то в [9, с. 205] встановлено таку оцінку функції γ на проміжку $[1, +\infty)$:

$$\gamma(\xi) = \inf_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{n^{n\alpha}}{\xi^n} \leq e^{\frac{\alpha e}{2}} e^{-\frac{\alpha}{e}\xi^{1/\alpha}}, \quad \xi \geq 1.$$

Якщо $0 < \xi < 1$, то $\inf_{n\in\mathbb{Z}_+} \dfrac{n^{n\alpha}}{\xi^n} = 1 \leq e^{\frac{\alpha}{e}} e^{-\frac{\alpha}{e}\xi^{1/\alpha}}$. Отже,

$$\forall \xi : \quad 0 < \xi < \infty : \quad \gamma(\xi) \leq c e^{-\frac{\alpha}{e}\xi^{1/\alpha}}, \quad c = e^{\frac{\alpha e}{2}}.$$

Крім того, на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ функція γ задовольняє нерівність [9, с. 204]:

$$e^{-\frac{\alpha}{e}|\xi|^{1/\alpha}} \leq \inf_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{n^{n\alpha}}{|\xi|^n} \leq c e^{-\frac{\alpha}{e}|\xi|^{1/\alpha}}, \quad c = e^{\frac{\alpha e}{2}}, \quad \xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \tag{$*$}$$

Лема 1. *Виконується нерівність*

$$\ln\gamma(x_1)+\ln\gamma(x_2)\geq\ln\gamma(x_1+x_2)\quad\forall\{x_1,x_2\}\subset(0,+\infty). \tag{2}$$

Доведення. Передусім зазначимо, що $\{\gamma(x_1),\gamma(x_2),\gamma(x_1+x_2)\}\subset(0,1]$ для довільних фіксованих $\{x_1,x_2\}\subset(0,+\infty)$. Оскільки $\gamma(x)=1$ для $x\in(0,1]$, то нерівність (2) досить довести на проміжку $(1,+\infty)$. Справді, якщо $\{x_1,x_2\}\subset(0,1]$ і $(x_1+x_2)\in(0,1]$, то нерівність (2) перетворюється у рівність. Якщо $\{x_1,x_2\}\subset(0,1]$ і $x_1+x_2>1$, то нерівність (2) також справджується, тому що $0<\gamma(x_1+x_2)<1$, $\ln\gamma(x_1+x_2)<0$, а $\gamma(x_1)=\gamma(x_2)=1$ і $\ln\gamma(x_1)=\ln\gamma(x_2)=0$. Якщо $x_1\in(0,1]$, а $x_2>1$, то $x_1+x_2>1$, $\ln\gamma(x_1)=0$, $\ln\gamma(x_1)+\ln\gamma(x_2)=\ln\gamma(x_2)\geq\ln\gamma(x_1+x_2)$, оскільки $\gamma(x_1+x_2)\leq\gamma(x_2)$ (тут враховано, що γ монотонно спадає на проміжку $(1,+\infty)$). Аналогічно розглядається випадок $x_2\in(0,1]$, $x_1>1$.

Отже, нехай $\{x_1,x_2\}\subset(1,+\infty)$. Нерівність (2) рівносильна нерівності

$$\gamma(x_1)\gamma(x_2)\geq\gamma(x_1+x_2),\quad\{x_1,x_2\}\subset(1,+\infty). \tag{3}$$

Для доведення (3) досить встановити, що

$$\frac{\gamma(x_1)\gamma(x_2)}{\gamma(x_1+x_2)}\geq1,\quad\{x_1,x_2\}\subset(1,+\infty).$$

Нехай $1<x_1\leq x_2$. Оскільки γ монотонно спадає на $(1,+\infty)$, то $\gamma(x_1)\geq\gamma(x_2)$. Отже,

$$\frac{\gamma(x_1)\gamma(x_2)}{\gamma(x_1+x_2)}\geq\frac{\gamma^2(x_2)}{\gamma(x_1+x_2)}.$$

За означенням, $\gamma(x_2)=\inf_{n\in\mathbb{Z}_+}\dfrac{m_n}{x_2^n}$, $x_2\in(1,+\infty)$. Розглянемо послідовність $\{\varepsilon_k= =\beta_k\gamma(x_2),\ k\in\mathbb{N}\}$, де послідовність $\{\beta_k,k\in\mathbb{N}\}$ додатних чисел монотонно прямує до нуля. Тоді для $\varepsilon_k>0$ знайдеться номер $n_k=n_k(\varepsilon_k)$ такий, що

$$\frac{m_{n_k}}{x_2^{n_k}}<\gamma(x_2)+\varepsilon_k=(1+\beta_k)\gamma(x_2),$$

тобто

$$\gamma(x_2)>\frac{1}{1+\beta_k}\,\frac{m_{n_k}}{x_2^{n_k}},\quad k\in\mathbb{N}.$$

Відповідно,

$$\gamma(x_1+x_2)\leq\frac{m_{n_k}}{(x_1+x_2)^{n_k}},\quad k\in\mathbb{N}.$$

Урахувавши ці нерівності, знайдемо, що для послідовності номерів $\{n_k,k\in\mathbb{N}\}$ справджується нерівність

$$\frac{\gamma(x_1)\gamma(x_2)}{\gamma(x_1+x_2)}\geq\frac{\gamma^2(x_2)}{\gamma(x_1+x_2)}\geq\frac{m_{n_k}^2}{(1+\beta_k)^2}\,\frac{(x_1+x_2)^{n_k}}{x_2^{2n_k}m_{n_k}}\geq\frac{m_{n_k}}{(1+\beta_1)^2x_2^{n_k}},\quad k\in\mathbb{N}$$

(тут враховано, що $x_1+x_2\geq x_2$, $\beta_k<\beta_1\ \forall k\geq2$). Крім того,

$$\gamma(\alpha)\leq\frac{m_n}{\alpha^n},\quad n\in\mathbb{Z}_+,$$

для довільного $\alpha > 1$ або

$$\forall \alpha > 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}: \quad m_{n_k} \ge \alpha^{n_k} \gamma(\alpha).$$

Покладемо $\alpha = x_2\delta$, де $\delta > 1$ — фіксоване число і підберемо номер n_k так, щоб виконувалася нерівність $\delta^{n_k}\gamma(x_2\delta) \ge (1+\beta_1)^2$. Безпосередньо знаходимо, що

$$n_k \ge \left[\ln\left(\frac{(1+\beta_1)^2}{\gamma(x_2\delta)}\right)(\ln\delta)^{-1} + 1 \right].$$

Для такого номера справджується нерівність

$$\frac{\gamma(x_1)\gamma(x_2)}{\gamma(x_1+x_2)} \ge \frac{x_2^{n_k}\delta^{n_k}\gamma(x_2\delta)}{(1+\beta_1)^2 x_2^{n_k}} = \frac{\delta^{n_k}\gamma(x_2\delta)}{(1+\beta_1)^2} \ge 1,$$

що й потрібно було довести.

Нехай $\{a_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$, $\{b_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ — послідовності, які мають властивості 1) – 3). Символом $S_{a_k}^{b_n}$ позначимо сукупність функцій $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, які задовольняють умову

$$\exists\, c, A, B > 0 \quad \forall \{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+ \quad \forall x \in \mathbb{R}: \ \left|x^k \varphi^{(n)}(x)\right| \le c A^k B^n a_k b_n \tag{4}$$

(сталі $c, A, B > 0$ залежать від функції φ).

$S_{a_k}^{b_n}$ збігається з об'єднанням просторів $S_{a_k,A}^{b_n,B}$ за всіма індексами $\{A, B\} \subset \mathbb{N}$, де символом $S_{a_k,A}^{b_n,B}$ позначено сукупність функцій $\varphi \in S_{a_k}^{b_n}$, які для довільних $\delta, \rho > 0$ задовольняють нерівності

$$\left|x^k \varphi^{(n)}(x)\right| \le c_{\delta\rho}(A+\delta)^k (B+\rho)^n a_k b_n, \quad \{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+, \quad x \in \mathbb{R},$$

з одними й тими ж сталими $A, B > 0$, $S_{a_k,A}^{b_n,B}$ перетворюється в повний зліченно-нормований простір, якщо систему норм у цьому просторі задати за допомогою формул

$$\|\varphi\|_{\delta\rho} = \sup_{x,k,n} \frac{\left|x^k \varphi^{(n)}(x)\right|}{(A+\delta)^k (B+\rho)^n a_k b_n}, \quad \{\delta, \rho\} \subset \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}.$$

Послідовність $\{\varphi_\nu, \nu \ge 1\} \subset S_{a_k}^{b_n}$ збігається до нуля в цьому просторі, якщо функції φ_ν та їхні похідні довільного порядку збігаються до нуля рівномірно на кожному відрізку $[a, b] \subset \mathbb{R}$ і при цьому справджуються нерівності

$$\left|x^k \varphi_\nu^{(n)}(x)\right| \le c A^k B^n a_k b_n, \quad \{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+, \quad x \in \mathbb{R},$$

де сталі $c,\ A,\ B > 0$ не залежать від ν.

Лема 2. *Функція $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ є елементом простору $S_{a_k}^{b_n}$ тоді й лише тоді, коли вона задовольняє умову*

$$\begin{gathered} \exists\, c, a, B > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \forall \{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+: \\ \left|\varphi^{(n)}(x)\right| \le c B^n b_n \gamma(ax), \quad \left|\varphi^{(n)}(0)\right| \le C B^n b_n, \end{gathered} \tag{5}$$

де $\gamma(x) = \inf_{k \in \mathbb{Z}_+} \dfrac{a_k}{|x|^k}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Доведення. Нехай $\varphi \in S_{a_k}^{b_n}$, тобто виконується умова (4). Тоді, поділивши обидві частини нерівності (4) на $|x|^k$, $x \neq 0$, і у правій частині перейшовши до нижньої межі по k, дістанемо, що

$$\left|\varphi^{(n)}(x)\right| \leq cB^n b_n \inf_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{A^k a_k}{|x|^k} = cB^n b_n \inf_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{a_k}{\left|A^{-1}x\right|^k} = cB^n b_n \gamma(ax), \quad x \neq 0,$$

де $a = A^{-1} > 0$. При цьому з (4) випливає оцінка $\left|\varphi^{(n)}(0)\right| \leq cB^n b_n,\ n \in \mathbb{Z}_+$.

Навпаки, нехай функція $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ задовольняє умову (5). Тоді

$$\left|\varphi^{(n)}(x)\right| \leq cB^n b_n \inf_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{a_k}{|ax|^k}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad x \neq 0.$$

Звідси випливає нерівність

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}: \quad |ax|^k \left|\varphi^{(n)}(x)\right| \leq cB^n b_n a_k, \quad \{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+.$$

З урахуванням оцінки $\left|\varphi^{(n)}(0)\right| \leq cB^n b_n,\ n \in \mathbb{Z}_+$, маємо

$$\left|x^k \varphi^{(n)}(x)\right| \leq cA^k B^n a_k b_n, \quad A = a^{-1} \quad \forall \{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+ \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

що й потрібно було довести.

Якщо розглянути функцію

$$\gamma_1(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ \inf_{k \in \mathbb{Z}_+} \dfrac{a_k}{|x|^k}, & x > 1, \end{cases}$$

то умову (5) можна замінити еквівалентною умовою

$$\exists\, c, a, B > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+: \quad \left|\varphi^{(n)}(x)\right| \leq cB^n b_n \gamma_1(ax).$$

Якщо $a_k = k^{k\alpha}$, $b_n = n^{n\beta}$, $\{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+$, де $\alpha,\ \beta > 0$ — фіксовані параметри, то в цьому випадку простір $S_{k^{k\alpha}}^{n^{n\beta}}$ позначаємо символом S_α^β. Простори S_α^β називають просторами типу S; ці простори детально вивчені в монографії [9]; їх можна охарактеризувати ще так [9, с. 210]:

S_α^β складається з тих і лише тих нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій, які задовольняють нерівності

$$\left|\varphi^{(n)}(x)\right| \leq cB^n n^{n\beta} \exp\left\{-a|x|^{1/\alpha}\right\}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad x \in \mathbb{R},$$

з деякими сталими $c,\ a,\ B > 0$, залежними лише від функції φ.

Якщо $0 < \beta < 1$ і $\alpha \geq 1 - \beta$, то S_α^β складається з тих і лише тих функцій $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, які аналітично продовжуються в усю комплексну площину і для яких

$$|\varphi(x + iy)| \leq c \exp\left\{-a|x|^{1/\alpha} + b|y|^{1/(1-\beta)}\right\}, \quad c, a, b > 0.$$

Простір S_α^1 складається з функцій $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, які аналітично продовжуються в деяку смугу $|\operatorname{Im} z| < \delta$ (залежну від φ) комплексної площини, при цьому справджується оцінка

$$|\varphi(x + iy)| \leq c \exp\left\{-a|x|^{1/\alpha}\right\}, \quad c, a > 0, \quad \{x, y\} \subset \mathbb{R}.$$

Множина $F \subset S_{a_k}^{b_n}$ називається обмеженою у цьому просторі, якщо $F \subset S_{a_k,A}^{b_n,B}$ з деякими сталими $A, B > 0$, тобто для всіх функцій $\varphi \in F$ справджуються оцінки (4) з одними й тими ж сталими $A, B > 0$.

Простори $S_{a_k}^{b_n}$ називатимемо узагальненими просторами типу S. В узагальнених просторах типу S визначені, є лінійними й неперервними оператори зсуву аргументу, множення на незалежну змінну та диференціювання.

Доведемо, наприклад, що в просторі $S_{a_k}^{b_n}$ визначений і є неперервним оператор зсуву аргументу $\varphi(x) \to \varphi(x-h)$ $\forall \varphi \in S_{a_k}^{b_n}$, який відображає цей простір у себе.

Нехай φ перебігає обмежену множину $F \subset S_{a_k}^{b_n}$. Це означає, що для кожної функції $\varphi \in F$ виконуються нерівності

$$\left|x^k \varphi^{(n)}(x)\right| \le c A^k B^n a_k b_n, \quad \{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+, \quad x \in \mathbb{R},$$

з деякими сталими $c, A, B > 0$. Тоді

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|x^k \varphi^{(n)}(x-h)\right| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|(x+h)^k \varphi^{(n)}(x)\right| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\sum_{j=0}^{k} C_k^j x^j h^{k-j} \varphi^{(n)}(x)\right| \le$$

$$\le \sum_{j=0}^{k} C_k^j |h|^{k-j} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|x^j \varphi^{(n)}(x)\right| \le$$

$$\le c \sum_{j=0}^{k} C_k^j |h|^{k-j} A^j B^n a_j b_n = c B^n b_n \sum_{j=0}^{k} C_k^j A^j |h|^{k-j} \le$$

$$\le c B^n a_k b_n \sum_{j=0}^{k} C_k^j A^j |h|^{k-j} = c(A+|h|)^k B^n a_k b_n = c A_1^k B^n a_k b_n,$$

де $A_1 = A + |h|$. Звідси випливає, що функція $\varphi_1(x) = \varphi(x-h)$ є елементом простору $S_{a_k, A+|h|}^{b_n, B}$, тобто

$$\varphi_1 \in S_{a_k}^{b_n} = \bigcup_{A,B>0} S_{a_k,A}^{b_n,B}.$$

Отже, образом обмеженої множини F при вказаному відображенні є обмежена множина в просторі $S_{a_k}^{b_n}$. Це означає, що оператор зсуву аргументу є лінійним обмеженим оператором у просторі $S_{a_k}^{b_n}$, а отже, і лінійним неперервним оператором у цьому просторі, оскільки в просторі $S_{a_k}^{b_n}$ виконується перша аксіома зліченності. Тоді, як випливає із загальної теорії лінійних неперервних операторів у зліченно-нормованих просторах (див. [9, с. 81 – 82]), у просторах з першою аксіомою зліченності клас лінійних обмежених операторів збігається з класом лінійних неперервних операторів.

Зауважимо також, що простори $S_{a_k}^{b_n}$ є досконалими (тобто просторами, всі обмежені множини яких є компактними). Звідси та із загальної теорії досконалих просторів випливає (див. [9, с. 171]), що операція зсуву аргументу є диференційовною (навіть нескінченно диференційовною) у тому розумінні, що граничні співвідношення вигляду $(\varphi(x+h) - \varphi(x))h^{-1} \to \varphi'(x)$, $h \to 0$, справджуються для кожної функції $\varphi \in S_{a_k}^{b_n}$ у сенсі збіжності за топологією простору $S_{a_k}^{b_n}$.

Доведемо, що в просторі $S_{a_k}^{b_n}$ визначений, є лінійним і неперервним оператор множення на цілу незалежну змінну, який відображає цей простір у себе.

Нехай φ перебігає обмежену множину $F \subset S_{a_k}^{b_n}$, тобто кожна функція $\varphi \in F$ задовольняє нерівності

$$\left|x^k \varphi^{(n)}(x)\right| \le cA^k B^n a_k b_n, \quad \{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+, \quad x \in \mathbb{R},$$

з деякими сталими $c, A, B > 0$. Покладемо $\psi(x) := x\varphi(x)$. Тоді

$$\left|x^k \psi^{(n)}(x)\right| = \left|x^k (x\varphi(x))^{(n)}\right| \le \left|x^{k+1} \varphi^{(n)}(x)\right| + n\left|x^k \varphi^{(n-1)}(x)\right| \le$$
$$\le cA^{k+1} B^n a_{k+1} b_n + ncA^k B^{n-1} a_k b_{n-1}.$$

Скориставшись властивістю 2) послідовності $\{a_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ та властивістю 1) послідовності $\{b_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$, одержимо нерівності

$$\left|x^k \psi^{(n)}(x)\right| \le cAA^k B^n M h^k a_k b_n + c2^n A^k B^n B^{-1} a_k b_n = \tilde{c} A_1^k B_1^n a_k b_n,$$

де $\tilde{c} = cAM + cB^{-1}$, $A_1 = \max\{Ah, A\}$, $B_1 = \max\{1, 2B\}$. Отже, образом обмеженої множини F при множенні на незалежну змінну x знову є обмежена множина у просторі $S_{a_k}^{b_n}$, що й потрібно було довести.

Зауважимо також, що $\varphi\psi \in S_{a_k}^{b_n}$ для довільних $\{\varphi, \psi\} \subset S_{a_k}^{b_n}$.

Функція $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ називається мультиплікатором у просторі $S_{a_k}^{b_n}$, якщо $g\varphi \in S_{a_k}^{b_n}$ для довільної функції $\varphi \in S_{a_k}^{b_n}$ і відображення $\varphi \to g\varphi$ є лінійним і неперервним, що діє з $S_{a_k}^{b_n}$ в $S_{a_k}^{b_n}$.

Лема 3. *Мультиплікатором у просторі $S_{a_k}^{b_n}$ є функція $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, яка задовольняє умову*

$$\exists\, B_0 > 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists c_\varepsilon > 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+ \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}:$$
$$\left|f^{(n)}(x)\right| \le c_\varepsilon B_0^n b_n (\gamma(\varepsilon x))^{-1}, \tag{6}$$
$$\left|f^{(n)}(0)\right| \le c_\varepsilon B_0^n b_n.$$

Доведення. Нехай $\varphi \in S_{a_k}^{b_n}$. Тоді згідно з лемою 2 правильними є нерівності

$$\left|\varphi^{(n)}(x)\right| \le cB^n b_n \gamma(ax), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad \left|\varphi^{(n)}(0)\right| \le cB^n b_n,$$

з деякими сталими $c, A, B > 0$. Візьмемо $\varepsilon \in (0, a)$ і скористаємося оцінками (6). Тоді

$$\left|(f(x)\varphi(x))^{(n)}\right| \le \sum_{j=0}^{n} C_n^j \left|f^{(j)}(x)\right| \left|\varphi^{(n-j)}(x)\right| \le$$
$$\le cc_\varepsilon \sum_{j=0}^{n} C_n^j B_0^j B^{n-j} b_{n-j} \frac{\gamma(ax)}{\gamma(\varepsilon x)}, \quad x \ne 0.$$

Оскільки $b_j b_{n-j} \le \omega L^n b_n$ (див. властивість 3) послідовності $\{b_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$), то

$$\left|(f(x)\varphi(x))^{(n)}\right| \le \tilde{c} B_1^n b_n \frac{\gamma(ax)}{\gamma(\varepsilon x)} = \tilde{c} B_1^n b_n e^{\ln\gamma(ax) - \ln\gamma(\varepsilon x)}, \quad x \ne 0,$$

де $\tilde{c} = cc_\varepsilon\omega,\ B_1 = 2\max\{B_0, B\}L.$ Із (2) випливає нерівність

$$\ln\gamma(ax) - \ln\gamma(\varepsilon x) \le \ln\gamma((a-\varepsilon)x), \quad 0 < \varepsilon < a, \quad x \ne 0.$$

Тоді

$$\left|(f(x)\varphi(x))^{(n)}\right| \le \tilde{c}B_1^n b_n e^{\ln\gamma((a-\varepsilon)x)} = \tilde{c}B_1^n b_n \gamma(a_1 x), \quad a_1 = a-\varepsilon, \quad x \ne 0,$$

$$\left|(f(x)\varphi(x))^{(n)}|_{x=0}\right| \le \tilde{c}B_1^n b_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Отже, $f\cdot\varphi \in S_{a_k}^{b_n}$. Із наведених міркувань випливає також, що якщо φ перебігає обмежену множину $F \subset S_{a_k}^{b_n}$, то кожна функція $f\cdot\varphi,\ \varphi \in F$, належить обмеженій множині $F_1 \subset S_{a_k}^{b_n}$, тобто оператор $S_{a_k}^{b_n} \ni \varphi \to f\varphi \in S_{a_k}^{b_n}$ є неперервним.

Лему 3 доведено.

Якщо послідовності $\{a_k, k \in \mathbb{Z}_+\},\ \{b_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ задовольняють умову

$$\frac{a_k}{a_{k-1}} \ge c_a k^{1-\mu}, \quad \frac{b_k}{b_{k-1}} \ge c_b k^{1-\lambda}, \quad \mu, \lambda \ge 0, \quad \mu + \lambda \le 1,$$
$$\{k, n\} \subset \mathbb{N}, \quad \frac{a_{k+2}}{a_k} \le c_0 A^k, \tag{7}$$

то, як відзначено в [9, с. 290], правильною є формула $F\left[S_{a_k}^{b_n}\right] = S_{b_k}^{a_n}$, де

$$F\left[S_{a_k}^{b_n}\right] := \left\{\psi\colon \psi(\sigma) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(\sigma)e^{i\sigma x}\,dx \ \ \forall\varphi \in S_{a_k}^{b_n}\right\},$$

зокрема,

$$F\left[S_{k^{k\alpha}}^{b^{n\beta}}\right] \equiv F\left[S_\alpha^\beta\right] = S_\beta^\alpha = S_{k^{k\beta}}^{n^{n\alpha}}, \quad \alpha, \beta > 0.$$

Оператор $F\colon S_{a_k}^{b_n} \to S_{b_k}^{a_n}$ є неперервним.

Зауважимо, що оскільки послідовність $\{a_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ має властивість 2), то нерівність $\dfrac{a_{k+2}}{a_k} \le c_0 A_0^k$ виконується зі сталими $c_0 = hM^2,\ A_0 = h^2$ ($M,\ h > 0$ — сталі з нерівності 2)). Отже, надалі вважатимемо, що послідовності $\{a_k, k \in \mathbb{Z}_+\},\ \{b_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ задовольняють умову (7).

Якщо $a_k = k^{k\alpha},\ k \in \mathbb{Z}_+,\ \alpha > 0,$ то, як доведено в [9, с. 240], для цієї послідовності виконується нерівність $\dfrac{a_k}{a_{k-1}} \ge \dfrac{1}{2^\alpha}k^{1-\mu},\ k \in \mathbb{N}$, де $\mu = \max\{1-\alpha, 0\}$, тобто $\mu = 1-\alpha$, якщо $0 < \alpha < 1$ і $\mu = 0$, якщо $\alpha \ge 1$.

2. Деякі класи аналітичних функцій в узагальнених просторах типу S. Якщо послідовність $\{b_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$, за допомогою якої будується простір $S_{a_k}^{b_n}$, має спеціальний вигляд, то такий простір може складатися з нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій, які допускають аналітичне продовження в усю комплексну площину і мають певний порядок зростання. Отже, нехай послідовність $\{a_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ задовольняє умови 1)–3), а послідовність $\{b_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ "повільно зростає". Для того щоб побудувати послідовність $\{b_n\}$, розглянемо монотонно спадну послідовність $\{\rho_n, n \in \mathbb{Z}_+\},\ \rho_0 = 1$, додатних чисел, яка має властивості:

а) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\rho_n} = 0$;
б) $\exists\, \gamma \in (0,1)\ \forall n \in \mathbb{N}\colon \rho_{n-1}/\rho_n \le n^{\gamma}$;
в) $\exists\, c, L \ge 1\ \rho_k \rho_{n-k} \le cL^n \rho_n,\ k \in \{0,1,\dots,n\}$.

Прикладом послідовності $\{\rho_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$, що має властивості а) – в), є послідовність $\rho_n = (n!)^{\beta-1}$, де $\beta \in (0,1)$ — фіксований параметр. Справді, насамперед зауважимо, що $\{\rho_n\}$ — монотонно спадна послідовність:

$$\rho_n = \frac{1}{(n!)^{1-\beta}} \ge \frac{1}{((n+1)!)^{1-\beta}} = \rho_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+.$$

З урахуванням формули Стірлінга отримуємо

$$\sqrt[n]{\rho_n} = \frac{1}{(n!)^{(1-\beta)/n}} = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} e^{-n} e^{\theta/12n}\right)^{(1-\beta)/n}} \le$$

$$\le \frac{1}{(n^n e^{-n})^{(1-\beta)/n}} = \frac{e^{1-\beta}}{n^{1-\beta}} \to 0, \quad n \to \infty, \quad 0 < \theta < 1.$$

Отже, послідовність $\{\rho_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ має властивість а).

Для кожного $n \in \mathbb{N}$ маємо

$$\frac{\rho_{n-1}}{\rho_n} = \frac{(n!)^{1-\beta}}{((n-1)!)^{1-\beta}} = n^{1-\beta}.$$

Отже, умову б) послідовність $\{\rho_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ задовольняє з параметром $\gamma = 1 - \beta$, $\gamma \in (0,1)$.

Для доведення властивості в) досить довести, що правильною є нерівність

$$\frac{\rho_k \rho_{n-k}}{\rho_n} \le cL^n, \quad k \in \{0,1,\dots,n\},$$

де $c,\ L \ge 1$ — деякі сталі. Отже,

$$\frac{\rho_k \rho_{n-k}}{\rho_n} = \frac{(n!)^{1-\beta}}{((k)!)^{1-\beta}((n-k)!)^{1-\beta}} = \left(C_n^k\right)^{1-\beta},$$

де C_n^k — біноміальні коефіцієнти у формулі бінома Ньютона. Далі скористаємося тим, що $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$. Тоді

$$C_n^k \le 2^n, \quad k \in \{0,1,\dots,n\}, \quad \left(C_n^k\right)^{1-\beta} \le 2^{n(1-\beta)}.$$

Звідси отримуємо нерівність

$$\rho_k \rho_{n-k} \le cL^n \rho_n, \quad c = 1, \qquad L = 2^{1-\beta} \ge 1, \quad k \in \{0,1,\dots,n\}.$$

Розглянемо тепер послідовність $b_n = n!\rho_n,\ n \in \mathbb{Z}_+$, де послідовність $\{\rho_n\}$ має властивості а) – в). Послідовність $\{b_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ має властивості 1) – 3) (див. п. 1). Справді, нерівність $b_n \le b_{n+1},\ n \in \mathbb{Z}_+$, рівносильна нерівності $b_n/b_{n+1} \le 1,\ n \in \mathbb{Z}_+$. Урахувавши властивість б) послідовності $\{\rho_n\}$, отримуємо

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{n!\rho_n}{(n+1)!\rho_{n+1}} = \frac{1}{n+1}\frac{\rho_n}{\rho_{n+1}} \le \frac{(n+1)^{\gamma}}{n+1} = \frac{1}{(n+1)^{1-\gamma}} \le 1 \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+.$$

Оскільки послідовність $\{\rho_n\}$ монотонно спадна, то

$$b_{n+1} = (n+1)!\rho_{n+1} = n!(n+1)\rho_{n+1} \leq n!\rho_n(n+1) = (n+1)b_n \leq 2^n b_n.$$

Отже, послідовність $\{b_n\}$ задовольняє умову 2) з параметрами $M = 1,\ h = 2$. Скориставшись нерівністю $k!(n-k)! \leq n!,\ k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, та властивістю в) послідовності $\{\rho_n\}$, отримаємо

$$b_k b_{n-k} = k!\rho_k(n-k)!\rho_{n-k} \leq cL^n n!\rho_n = cL^n b_n, \quad k \in \{0, 1, \ldots, n\}.$$

Отже, послідовність $\{b_n\}$ умову 3) задовольняє.

Теорема 1. *Кожна функція $\varphi \in S_{a_k}^{n!\rho_n}$ може бути аналітично продовжена в комплексну площину до цілої функції $\varphi(z),\ z = x + iy \in \mathbb{C}$, яка задовольняє умову*

$$\exists\, a, b, c > 0 \quad \forall z = x + iy \in \mathbb{C}: \ \ |\varphi(x + iy)| \leq c\gamma_1(ax)\rho_1(by),$$

де

$$\gamma_1(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ \inf\limits_{k \in \mathbb{Z}_+} \left(a_k/|x|^k\right), & |x| > 1, \end{cases} \qquad \rho_1(y) = \begin{cases} 1, & y = 0, \\ \sup\limits_{n \in \mathbb{Z}_+} \left(|y|^n \rho_n\right), & y \neq 0. \end{cases}$$

Доведення. Нехай $\varphi \in S_{a_k}^{n!\rho_n}$, тобто

$$\exists\, c_1, A, B > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall \{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+: \ \ \left|x^k \varphi^{(n)}(x)\right| \leq c_1 A^k B^n b_k n! \rho_n,$$

або

$$\exists\, c_1, a, B > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+: \ \ \left|\varphi^{(n)}(x)\right| \leq c_1 B^n n! \rho_n \gamma_1(ax).$$

Тоді її можна аналітично продовжити в усю комплексну площину. Справді, залишковий член у формулі Тейлора

$$\varphi(x + h) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(m)}(x)}{m!}\, h^m + \frac{\varphi^{(n)}(\xi)}{n!}\, h^n, \quad x \in \mathbb{R},$$

де $|x - \xi| < |h|$, допускає оцінку

$$\frac{\left|\varphi^{(n)}(\xi)\right|}{n!}\, |h|^n \leq c_1 B^n \rho_n |h|^n = c_1 \big(B|h|\sqrt[n]{\rho_n}\big)^n.$$

Оскільки $\sqrt[n]{\rho_n} \to 0$ при $n \to \infty$, то

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 = n_0(\varepsilon) \quad \forall n \geq n_0: \ \ \rho_n < \varepsilon^n.$$

Зафіксуємо довільним чином $|h| > 0$ і покладемо $\varepsilon = \dfrac{1}{2}\,(B|h|)$. Тоді

$$\frac{\left|\varphi^{(n)}(\xi)\right|}{n!}\, |h|^n \leq \frac{c_1}{2^n} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Звідси випливає, що ряд Тейлора функції $\varphi(x)$ збігається до $\varphi(x),\ x \in \mathbb{R}$, тобто

$$\varphi(x + h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(n)}(x)}{n!}\, h^n.$$

Із оцінки залишкового члена одержуємо, що ряд Тейлора функції φ залишається збіжним і для комплексних значень h. Отже, φ продовжується до цілої функції $\varphi(z),\ z = x+iy \in \mathbb{C}$, $y \neq 0$, при цьому

$$x^k\varphi(x+iy) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!}\, x^k\varphi^{(n)}(x)$$

і

$$\left|x^k\varphi(x+iy)\right| \le c_1 A^k a_k \sum_{n=0}^{\infty} |y|^n B^n \rho_n$$

або

$$|\varphi(x+iy)| \le c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \left|y^n\right| B^n \rho_n \gamma_1(ax) = c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}\,(2B|y|)^n \rho_n \gamma_1(ax) \le$$

$$\le c_1 \sup_{n\in\mathbb{Z}_+} \left(|by|^n \rho_n\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}\,\gamma_1(ax) = c\gamma_1(ax)\rho_1(by),$$

де $b = 2B,\ c = 2c_1,\ \rho_1(y) = \sup_{n\in\mathbb{Z}_+}\left(|y|^n \rho_n\right),\ y \neq 0$, що й потрібно було довести.

Зауважимо, що ρ_1 — парна невід'ємна на $\mathbb{R}$ функція, яка монотонно зростає на проміжку $[1, +\infty),\ \rho_1(y) = 1$ для $|y| \le 1$ і $\rho_1(y) \ge y^n\rho_n\ \ \forall n \in \mathbb{Z}_+$ для $|y| > 1$.

Як приклад розглянемо послідовності $a_k = k^{k\alpha},\ b_n = n!(n!)^{\beta-1} = (n!)^{\beta}$, де $\alpha \ge 1-\beta$, $\beta \in (0,1)$. У цьому випадку $S_{a_k}^{b_n} = S_{k^{k\alpha}}^{(n!)^\beta} = S_{k^{k\alpha}}^{n^{n\beta}} = S_\alpha^\beta$ (умова $\alpha \ge 1-\beta$ є умовою нетривіальності простору S_α^β [9, с. 276]). Тоді

$$\rho_1(y) = \sup_{n\in\mathbb{Z}_+}\left(|y|^n\rho_n\right) = \sup_{n\in\mathbb{Z}_+}\left(|y|^n (n!)^{\beta-1}\right) = \sup_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{|y|^n}{(n!)^{1-\beta}} \le$$

$$\le \sup_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{|ey|^n}{n^{n(1-\beta)}} = \frac{1}{\inf\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} \dfrac{n^{n(1-\beta)}}{|ey|^n}} \le e^{b_1|y|^{1/(1-\beta)}}, \quad b_1 = \frac{1-\beta}{e}\, e^{1/(1-\beta)}$$

(тут ми скористалися нерівністю (*) з п. 1). При цьому, як випливає з цієї ж нерівності, $\gamma_1(x) \le c_0 \exp\left(-c_1|x|^{1/\alpha}\right),\ c_1 = \dfrac{\alpha}{e},\ c_0 = e^{\alpha e/2}$.

Отже, у випадку простору $S_\alpha^\beta,\ \alpha \ge 1-\beta$, з теореми 1 маємо, що кожна функція φ з цього простору може бути аналітично продовжена в комплексну площину до цілої функції $\varphi(x+iy)$, яка задовольняє умову

$$|\varphi(x+iy)| \le c\exp\left\{-a|x|^{1/\alpha} + b|y|^{1/(1-\beta)}\right\}$$

з деякими сталими $c, a, b > 0$ (отримали відомий результат, встановлений в [9, с. 209]).

3. Простори узагальнених функцій типу S'. Символом $\left(S_{a_k}^{b_n}\right)'$ позначатимемо простір усіх лінійних неперервних функціоналів, заданих на основному просторі $S_{a_k}^{b_n}$ зі слабкою збіжністю, а його елементи називатимемо узагальненими функціями.

Регулярними узагальненими функціями або регулярними функціоналами називатимемо лінійні неперервні функціонали, дію яких на основну функцію $\varphi \in S_{a_k}^{b_n}$ задаємо формулою

$$\langle f, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx.$$

Кожна локально інтегровна на $\mathbb{R}$ функція f, яка задовольняє умову

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, c_\varepsilon > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}: \quad |f(x)| \le c_\varepsilon (\gamma(\varepsilon x))^{-1}, \tag{8}$$

породжує регулярну узагальнену функцію $F_f \in (S_{a_k}^{b_n})'$:

$$\langle F_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx \quad \forall \varphi \in S_{a_k}^{b_n}.$$

Правильним є твердження: *якщо локально інтегровні на $\mathbb{R}$ функції f і g, які задовольняють умову (8), не збігаються на множині додатної міри Лебега, то існує функція $\varphi_0 \in S_{a_k}^{b_n}$ така, що $\langle f, \varphi_0 \rangle \ne \langle g, \varphi_0 \rangle$, тобто $F_f \ne F_g$. Навпаки, якщо $F_f \ne F_g$, то функції f і g не збігаються на множині додатної міри Лебега.* Доведення цього твердження аналогічне доведенню відповідного твердження з [17].

Сформульоване твердження дозволяє ототожнювати локально інтегровні на $\mathbb{R}$ функції, які задовольняють умову (8), з породжуваними ними узагальненими функціями з простору $\left(S_{a_k}^{b_n}\right)'$. З властивостей інтеграла Лебега випливає, що вкладення $S_{a_k}^{b_n} \ni f \to F_f \in \left(S_{a_k}^{b_n}\right)'$ є неперервним.

Оскільки в основному просторі $S_{a_k}^{b_n}$ визначено операцію зсуву аргументу T_x, то згортку узагальненої функції $f \in \left(S_{a_k}^{b_n}\right)'$ з основною функцією задамо формулою

$$(f * \varphi)(x) := \langle f_\xi, T_{-x}\check{\varphi}(x) \rangle = \langle f_\xi, \varphi(x - \xi) \rangle, \quad \check{\varphi}(\xi) = \varphi(-\xi)$$

(тут $\langle f_\xi, T_{-x}\check{\varphi}(\xi) \rangle$ позначає дію функціонала f на основну функцію $T_{-x}\check{\varphi}(\xi)$ як функцію аргументу ξ). Із властивості нескінченної диференційовності операції зсуву аргументу в просторі $S_{a_k}^{b_n}$ випливає, що згортка $f * \varphi$ є звичайною нескінченно диференційовною на $\mathbb{R}$ функцією.

Нехай $f \in \left(S_{a_k}^{b_n}\right)'$. Якщо $f * \varphi \in S_{a_k}^{b_n}$ $\forall \varphi \in S_{a_k}^{b_n}$, і зі співвідношення $\varphi_\nu \to 0$ при $\nu \to +\infty$ за топологією простору $S_{a_k}^{b_n}$ випливає, що $f * \varphi_\nu \to 0$ при $\nu \to +\infty$ за топологією простору $S_{a_k}^{b_n}$, то функціонал f називається *згортувачем у просторі* $S_{a_k}^{b_n}$.

Перетворення Фур'є узагальненої функції $f \in \left(S_{a_k}^{b_n}\right)'$ означимо за допомогою співвідношення $\langle F[f], \varphi \rangle = \langle f, F[\varphi] \rangle$ $\forall \varphi \in S_{b_k}^{a_n}$. Звідси випливає, що $F[f] \in \left(S_{b_k}^{a_n}\right)'$, якщо $f \in \left(S_{a_k}^{b_n}\right)'$, при цьому оператор $F: \left(S_{a_k}^{b_n}\right)' \to \left(S_{b_k}^{a_n}\right)'$ є неперервним.

Теорема 2. *Якщо узагальнена функція $f \in \left(S_{a_k}^{b_n}\right)'$ — згортувач у просторі $S_{a_k}^{b_n}$, то для довільної функції $\varphi \in S_{a_k}^{b_n}$ правильною є формула*

$$F[f * \varphi] = F[f]F[\varphi].$$

Доведення. Згідно з умовою теореми $f * \varphi \in S_{a_k}^{b_n}$ $\forall \varphi \in S_{a_k}^{b_n}$. Тоді, скориставшись означенням перетворення Фур'є узагальненої функції з простору $\left(S_{a_k}^{b_n}\right)'$, а також означенням згортки узагальненої функції з основною, запишемо такі співвідношення:

$$\forall \psi \in S_{b_k}^{a_n}: \quad \langle F[f * \varphi], \psi \rangle = \langle f * \varphi, F[\psi] \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (f * \varphi)(x) F[\psi](x) dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \langle f_\xi, \varphi(x-\xi)\rangle F[\psi](x)dx =$$

$$= \left\langle f_\xi, \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x-\xi)F[\psi](x)dx \right\rangle. \tag{9}$$

Нехай

$$I(\xi) := \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x-\xi)F[\psi](x)dx.$$

Тоді, внаслідок теореми Фубіні,

$$I(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x-\xi)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\sigma)e^{i\sigma x}d\sigma\right)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x-\xi)\psi(\sigma)e^{i\sigma x}d\sigma dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\psi(\sigma)e^{i\sigma t}e^{i\sigma\xi}d\sigma dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\sigma)F[\varphi](\sigma)e^{i\sigma\xi}d\sigma = F[F[\varphi]\psi](\xi) \in S_{a_k}^{b_n}.$$

Отже,

$$\langle F[f*\varphi], \psi\rangle = \langle f, F[F[\varphi]\psi]\rangle = \langle F[f], F[\varphi]\psi\rangle = \langle F[f]F[\varphi], \psi\rangle \quad \forall \psi \in S_{b_k}^{a_n}.$$

Звідси одержуємо рівність $F[f*\varphi] = F[f]F[\varphi]$.

Залишається обґрунтувати коректність співвідношення (9). Введемо позначення

$$I_r(\xi) := \int_{-r}^{r} \psi(\sigma)F[\varphi](\sigma)e^{i\sigma\xi}d\sigma, \quad r > 0.$$

Для доведення (9) досить встановити, що $I_r(\xi) \to I(\xi)$ при $r \to +\infty$ у просторі $S_{a_k}^{b_n}$, тобто $\alpha_r(\xi) := I(\xi) - I_r(\xi) \to 0$ при $r \to +\infty$ за топологією простору $S_{a_k}^{b_n}$. Це означає, що:

1) сім'я функцій $\left\{\alpha_r^{(n)}(\xi), r > 0\right\}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, збігається до нуля при $r \to +\infty$ рівномірно на кожному відрізку $[a,b] \subset \mathbb{R}$;

2) $\left|\alpha_r^{(n)}\right| \le cB^n b_n \gamma(a\xi)$, $\left|\alpha_r^{(n)}(0)\right| \le cB^n b_n$ $\forall n \in \mathbb{Z}_+$, де сталі $c, B, a > 0$ не залежать від r.

Інтеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} D_\xi^n\left(\psi(\sigma)F[\varphi](\sigma)e^{i\sigma\xi}\right)d\sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} (i\sigma)^n\psi(\sigma)F[\varphi](\sigma)e^{i\sigma\xi}\,d\sigma$$

збігається рівномірно по ξ, оскільки

$$\forall \xi \in \mathbb{R}: \quad \left|D_\xi^n\left(\psi(\sigma)F[\varphi](\sigma)e^{i\sigma\xi}\right)\right| \le |\sigma^n\psi(\sigma)F[\varphi](\sigma)|, \quad \sigma \in \mathbb{R},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\sigma^n F[\varphi](\sigma)|\, d\sigma < +\infty$$

(тому що $\sigma^n F[\varphi](\sigma) \in S_{b_k}^{a_n}$ при кожному $n \in \mathbb{Z}_+$). Тоді

$$\left|\alpha_r^{(n)}(\xi)\right| \le \int_{|\sigma|\ge r} \left|\sigma^n F[\varphi](\sigma)\right| d\sigma \to 0, \quad r \to +\infty,$$

рівномірно по $\xi \in \mathbb{R}$ як залишок збіжного інтеграла. Отже, умова 1) виконується.

Перевіримо виконання умови 2). Оскільки

$$D_\xi^n \alpha_r(\xi) \equiv D_\xi^n I(\xi) - D_\xi^n I_r(\xi), \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

то

$$\left|D_\xi^n \alpha_r(\xi)\right| \le \left|D_\xi^n I(\xi)\right| + \left|D_\xi^n I_r(\xi)\right|.$$

Розглянемо функції

$$D_\xi^n I_{r,+}(\xi) = \max\left(D_\xi^n I_r(\xi), 0\right), \qquad D_\xi^n I_{r,-}(\xi) = -\min\left(D_\xi^n I_r(\xi), 0\right),$$

які є невід'ємними, і врахуємо, що

$$\left|D_\xi^n I_r(\xi)\right| = D_\xi^n I_{r,+}(\xi) + D_\xi^n I_{r,-}(\xi) \le 2\left|D_\xi^n I(\xi)\right|.$$

Тоді

$$\left|D_\xi^n \alpha_r(\xi)\right| \le 3\left|D_\xi^n I(\xi)\right| = 3\left|D_\xi^n F[F[\varphi]\psi](\xi)\right| \quad \forall r > 0. \tag{10}$$

Оскільки $F[F[\varphi]\psi] \in S_{a_k}^{b_n}$ $\forall \varphi \in S_{a_k}^{b_n}$, $\psi \in S_{b_k}^{a_n}$, то звідси та з (10) випливає оцінка

$$\left|D_\xi^n \alpha_r(\xi)\right| \le cB^n b_n \gamma(a\xi), \quad \xi \ne 0, \qquad \left|D_\xi^n \alpha_r(0)\right| \le cB^n b_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

де сталі $c, B, a > 0$ не залежать від r. Таким чином, умова 2) виконується.

Теорему 2 доведено.

З теореми 2 випливає, що якщо узагальнена функція f — згортувач у просторі $S_{a_k}^{b_n}$, то її перетворення Фур'є — мультиплікатор у просторі $S_{b_k}^{a_n}$.

4. Псевдодиференціальні оператори в узагальнених просторах типу S. Розглянемо функцію

$$\tilde{\gamma}(\sigma) = \begin{cases} 1, & |\sigma| \le 1, \\ \sup_{k\in\mathbb{Z}_+} \dfrac{|\sigma|^k}{a_k}, & |\sigma| > 1. \end{cases}$$

Очевидно, що $\tilde{\gamma}$ — невід'ємна парна на $\mathbb{R}$ функція, яка монотонно зростає на проміжку $[1, +\infty)$, $\tilde{\gamma}(\sigma) \ge 1$ для $|\sigma| \ge 1$. Оскільки

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}_+} \frac{|\sigma|^k}{a_k} = \frac{1}{\inf\limits_{k\in\mathbb{Z}_+} \frac{a_k}{|\sigma|^k}}, \quad \sigma \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

то $\tilde{\gamma}(\sigma)$ збігається з функцією $\dfrac{1}{\gamma(\sigma)}$ для $\sigma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Якщо, наприклад, $a_k = k^{k\alpha},\ k \in \mathbb{Z}_+,\ \alpha > 0$, то функція $\tilde{\gamma}$, побудована за цією послідовністю, задовольняє нерівності

$$c_0 e^{\frac{\alpha}{e}|\sigma|^{1/\alpha}} \le \tilde{\gamma}(\sigma) \le e^{\frac{\alpha}{e}|\sigma|^{1/\alpha}}, \quad c_0 = e^{-\frac{\alpha e}{2}}, \quad \sigma \in \mathbb{R}.$$

З нерівності (2), яку задовольняє функція $\ln\gamma$ (див. лему 2) дістаємо таку нерівність опуклості для функції $\ln\tilde{\gamma}$:

$$\ln\tilde{\gamma}(\sigma_1) + \ln\tilde{\gamma}(\sigma_2) \le \ln\tilde{\gamma}(\sigma_1+\sigma_2) \quad \forall\{\sigma_1,\sigma_2\} \subset (0,+\infty). \tag{11}$$

Нехай φ — нескінченно диференційовна на $\mathbb{R}$ функція, яка має властивості:

1) $\varphi(\sigma) > \Omega(\sigma) \ge \ln\tilde{\gamma}(\sigma),\ \sigma \in \mathbb{R}$;

2) $\forall\varepsilon > 0\ \exists\, c_\varepsilon > 0\ \forall\sigma \in \mathbb{R}\colon \varphi(\sigma) \le c_\varepsilon\tilde{\gamma}(\varepsilon\sigma)$;

3) $\exists\, c_0, B_0 > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ \forall\sigma \in \mathbb{R}\colon \left|\varphi^{(n)}(\sigma)\right| \le c_0 B_0^n n!$.

Тут

$$\Omega(\sigma) = \int_0^\sigma \mu(\xi)d\xi, \quad \sigma \ge 0, \quad \Omega(\sigma) = \Omega(-\sigma),$$

де $\mu(\xi),\ 0 \le \xi < +\infty$, — монотонно зростаюча неперервна функція, причому $\mu(0) = 0$, $\lim_{\xi\to+\infty}\mu(\xi) = +\infty$. Очевидно, що Ω — неперервно диференційовна парна на $\mathbb{R}$ функція, що монотонно зростає на $[0,+\infty)$. Функція Ω має також такі властивості:

а) $\forall\alpha \in (0,1)\ \forall\sigma \in [0,+\infty)\colon \Omega(\alpha\sigma) \le \alpha\Omega(\sigma)$;

б) $\forall\alpha \ge 1\ \forall\sigma \in [0,+\infty)\colon \Omega(\alpha\sigma) \ge \alpha\Omega(\sigma)$.

Доведемо, наприклад, властивість а). З урахуванням монотонного зростання функції μ на $[0,+\infty)$ маємо

$$\Omega(\alpha\sigma) = \int_0^{\alpha\sigma} \mu(\xi)d\xi = \alpha\int_0^\sigma \mu(\alpha y)dy \le \alpha\int_0^\sigma \mu(y)dy = \alpha\Omega(\sigma).$$

Зауважимо тепер, що з властивостей 2), 3) функції φ випливає, що вона є мультиплікатором у просторі $S^1_{a_k} \equiv S^{n^n}_{a_k}$ (доведення цього твердження аналогічне доведенню леми 3). Звідси випливає, що в просторі $S^{a_n}_1 \equiv S^{a_n}_{k^k}$ визначений, є лінійним і неперервним псевдодиференціальний оператор A, побудований за функцією $\varphi\colon A\psi = F^{-1}[\varphi(\lambda)F[\psi]]\ \forall\psi \in S^{a_n}_1$.

Якщо розглянути самоспряжений у гільбертовому просторі $L_2(\mathbb{R})$ оператор $\dfrac{i\partial}{\partial x}$ з областю визначення $\mathcal{D}\left(\dfrac{i\partial}{\partial x}\right) = \{\psi \in L_2(\mathbb{R})\colon \exists\ \psi' \in L_2(\mathbb{R})\}$, то, як випливає з основної спектральної теореми для самоспряжених операторів,

$$\varphi\left(\frac{i\partial}{\partial x}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda)\, dE_\lambda\psi,$$

де $E_\lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}$, — спектральна функція оператора $\dfrac{i\partial}{\partial x}$. Відомо (див., наприклад, [18]), що

$$E_\lambda\psi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\lambda}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(\tau)e^{i\sigma\tau}d\tau\right\}e^{-ix\sigma}d\sigma \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\lambda} F[\psi](\sigma)e^{-ix\sigma}d\sigma.$$

Звідси дістаємо співвідношення $dE_\lambda \psi = \dfrac{1}{2\pi} F[\psi](\lambda) e^{-ix\lambda} d\lambda$. Отже,

$$\varphi\left(\frac{i\partial}{\partial x}\right) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda) F[\psi](\lambda) e^{-ix\lambda} d\lambda = F^{-1}[\varphi(\lambda) F[\psi]] \quad \forall \psi \in S_1^{a_n},$$

тобто оператор $\varphi\left(\dfrac{i\partial}{\partial x}\right)$ збігається з псевдодиференціальним оператором A у просторі $S_1^{a_n}$, побудованим за функцією (символом) φ, яка є мультиплікатором у просторі $S_{a_k}^1$.

Як приклад, розглянемо функцію $\varphi(\sigma) = \left(1+\sigma^2\right)^{1/2}$, $\sigma \in \mathbb{R}$. Безпосередньо переконуємося в тому, що функція φ має властивості:

1) $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\varphi(\sigma) > |\sigma|$, $\sigma \in \mathbb{R}$, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, c_\varepsilon > 0 \colon \varphi(\sigma) \le c_\varepsilon \exp(\varepsilon|\sigma|)$, $\sigma \in \mathbb{R}$, $c_\varepsilon = 2^{1/2} \max\{1, 1/\varepsilon\}$;

2) $\left|D_\sigma^n \varphi(\sigma)\right| \le c_0 B_0^n n! \le c_1 B_1^n n^n$, $n \in \mathbb{N}$, $\sigma \in \mathbb{R}$.

Звідси випливає, що φ — мультиплікатор у просторі $S_1^1 \equiv S_{k^k}^{n^n}$. Відповідно оператор

$$\varphi\left(\frac{i\partial}{\partial x}\right) = \sqrt{I + \left(\frac{i\partial}{\partial x}\right)^2} = \sqrt{I - \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(1+\lambda^2\right)^{1/2} dE_\lambda$$

збігається з псевдодиференціальним оператором $F^{-1}\left[(1+\lambda^2)^{1/2} F\right]$ у просторі S_1^1.

Аналогічні властивості має функція $\varphi(\sigma) = (1+\sigma^2)^{\omega/2}$, $\sigma \in \mathbb{R}$, $\omega \in [1,2)$, — фіксований параметр: $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\varphi(\sigma) > |\sigma|^\omega$, $\sigma \in \mathbb{R}$, $\varphi(\sigma) \le c_\varepsilon \exp\left\{\varepsilon|\sigma|^\omega\right\}$, $\sigma \in \mathbb{R}$, де $c_\varepsilon = 2^{\omega/2} \max\{1, 1/\varepsilon\}$,

$$\left|D_\sigma^n \varphi(\sigma)\right| \le c_0 B_0^n n! \le c_1 B_1^n n^n.$$

Функція φ — мультиплікатор у просторі $S_{1/\omega}^1 \equiv S_{k^{k/\omega}}^{n^n}$, а оператор

$$\varphi\left(\frac{i\partial}{\partial x}\right) = \left(I - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\right)^{\omega/2}$$

збігається в просторі $S_1^{1/\omega}$ з псевдодиференціальним оператором, побудованим за символом $\varphi(\sigma) = \left(1+\sigma^2\right)^{\omega/2}$, $\sigma \in \mathbb{R}$.

5. Нелокальна за часом задача. Розглянемо диференціально-операторне рівняння

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + \varphi\left(\frac{i\partial}{\partial x}\right) u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R} \equiv \Omega_+, \tag{12}$$

де $\varphi\left(\dfrac{i\partial}{\partial x}\right)$ розуміємо як псевдодиференціальний оператор у просторі $S_1^{a_n}$, побудований за функцією φ, яка є мультиплікатором у просторі $S_{a_k}^1$ (функція φ має властивості 1) – 3), сформульовані в п. 4). Отже,

$$\varphi\left(\frac{i\partial}{\partial x}\right) \psi = F^{-1}\left[\varphi(\sigma) F[\psi]\right] \quad \forall \psi \in S_1^{a_n}.$$

Під розв'язком рівняння (12) розуміємо неперервно диференційовну за змінною t функцію $u(t,x)$, $(t,x) \in \Omega_+$, таку, що $u(\cdot,x) \in S_1^{a_n}$ при кожному $t > 0$, $u(t,x)$, $(t,x) \in \Omega_+$, задовольняє рівняння (12).

Для рівняння (12) поставимо нелокальну багатоточкову за часом задачу: знайти розв'язок рівняння (12), який задовольняє умову

$$\mu u(0,x) - \mu_1 u(t_1,x) - \ldots - \mu_m u(t_m,x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad f \in S_1^{a_n}, \tag{13}$$

де

$$u(0,x) = \lim_{t\to+0} u(t,x), \quad m \in \mathbb{N},$$

$$\{\mu, \mu_1, \ldots, \mu_m\} \subset (0,+\infty), \quad \{t_1, \ldots, t_m\} \subset (0,+\infty)$$

— фіксовані числа, причому $0 < t_1 < \ldots < t_m < +\infty,\ \mu > m\sum_{k=1}^m \mu_k$.

Розв'язок задачі (12), (13) шукаємо за допомогою перетворення Фур'є у вигляді $u(t,x) = F^{-1}[v(t,\cdot)]$. Для функції $v\colon \Omega_+ \to \mathbb{R}$ дістаємо задачу з параметром σ:

$$\frac{dv(t,\sigma)}{dt} + \varphi(\sigma)v(t,\sigma) = 0, \quad (t,\sigma) \in \Omega_+, \tag{14}$$

$$\mu v(0,\sigma) - \sum_{k=1}^m \mu_k v(t_k,\sigma) = \tilde f(\sigma), \quad \sigma \in \mathbb{R}, \tag{15}$$

де $\tilde f(\sigma) = F[f](\sigma)$. Загальний розв'язок рівняння (14) має вигляд

$$v(t,\sigma) = c\exp\{-t\varphi(\sigma)\}, \quad (t,x) \in \Omega_+, \tag{16}$$

де $c = c(\sigma)$ визначимо з умови (15). Підставляючи (16) в (15), знайдемо, що

$$c = \tilde f(\sigma)\left(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k \exp\{-t_k\varphi(\sigma)\}\right)^{-1}, \quad \sigma \in \mathbb{R}.$$

Введемо позначення: $G(t,x) = F^{-1}[Q(t,\sigma)],\ Q(t,\sigma) = Q_1(t,\sigma)Q_2(\sigma)$, де

$$Q_1(t,\sigma) = \exp\{-t\varphi(\sigma)\}, \qquad Q_2(\sigma) = \left(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k Q_1(t_k,\sigma)\right)^{-1}.$$

Далі, міркуючи формально, одержимо співвідношення

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} G(t,x-\xi)f(\xi)d\xi = G(t,x) * f(x).$$

Справді,

$$u(t,x) = (2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}} Q(t,\sigma)\left(\int_{\mathbb{R}} f(\xi)e^{i\sigma\xi}d\xi\right)e^{-i\sigma x}d\sigma =$$

$$= \int_{\mathbb{R}}\left((2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}} Q(t,\sigma)e^{-i\sigma(x-\xi)}d\xi\right)f(\xi)d\xi =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} G(t, x - \xi) f(\xi) d\xi = G(t, x) * f(x), \quad (t, x) \in \Omega_+.$$

Коректність проведених тут перетворень та збіжність відповідних інтегралів випливає з властивостей функції G, які ми наведемо далі. Властивості функції G визначаються властивостями функції Q, оскільки $G = F^{-1}[Q]$. Отже, насамперед дослідимо властивості функції $Q(t, \sigma)$ як функції аргументу σ.

Лема 4. *Для похідних функції $Q_1(t, \sigma)$, $(t, \sigma) \in \Omega_+$ (за змінною σ), правильними є оцінки*

$$\left| D_\sigma^n Q_1(t, \sigma) \right| \leq c A^n t^{\omega n} n^n \exp\{-t\varphi(\sigma)\}, \quad (t, \sigma) \in \Omega_+, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{17}$$

де $\omega = 0$, якщо $0 < t \leq 1$ і $\omega = 1$, якщо $t > 1$, сталі $c > 1$, $A > 0$ не залежать від t.

Доведення. Для доведення твердження скористаємося формулою Фаа де Бруно диференціювання складеної функції

$$D_\sigma^n F(g(\sigma)) = \sum_{p=1}^{n} \frac{d^p}{dg^p} F(g) \sum \frac{n!}{p_1! \ldots p_l!} \left(\frac{d}{d\sigma} g(\sigma) \right)^{p_1} \ldots \left(\frac{1}{l!} \frac{d^l}{d\sigma^l} g(\sigma) \right)^{p_l}, \quad n \in \mathbb{N}$$

(знак суми поширюється на всі розв'язки в цілих невід'ємних числах рівняння $p_1 + 2p_2 + \ldots$ $\ldots + l p_l = n$, $p_1 + \ldots + p_l = p$), де покладемо $F = e^g$, $g = -t\varphi(\sigma)$. Тоді

$$D_\sigma^n e^{-t\varphi(\sigma)} = e^{-t\varphi(\sigma)} \sum_{p=1}^{n} \sum \frac{n!}{p_1! \ldots p_l!} \Lambda,$$

де символом Λ позначено вираз

$$\Lambda := \left(\frac{d}{d\sigma} (-t\varphi(\sigma)) \right)^{p_1} \left(\frac{1}{2!} \frac{d^2}{d\sigma^2} (-t\varphi(\sigma)) \right)^{p_2} \ldots \left(\frac{1}{l!} \frac{d^l}{d\sigma^l} (-t\varphi(\sigma)) \right)^{p_l}.$$

Урахувавши властивість 3) функції φ, яку задовольняють похідні функції φ, отримаємо

$$|\Lambda| \leq c_0^{p_1 + \ldots + p_l} B_0^{p_1 + 2p_2 + \ldots + l p_l} t^{p_1 + \ldots + p_l} \leq \tilde{c}_0^n t^p B_0^n, \quad \tilde{c}_0 = \max\{1, c_0\}.$$

Скориставшись властивістю 1) функції φ та формулою Стірлінга, одержимо нерівності

$$\left| D_\sigma^n Q_1(t, \sigma) \right| \leq \tilde{c}_0^n B_0^n t^{\omega n} n! \exp\{-t\varphi(\sigma)\} \leq c A^n t^{\omega n} n^n \exp\{-t\varphi(\sigma)\}, \quad \sigma \in \mathbb{R}, \tag{18}$$

де $\omega = 0$, якщо $0 < t \leq 1$ і $\omega = 1$, якщо $t > 1$, сталі $c > 1$, $A > 0$ не залежать від t.

Лему 4 доведено.

Зауваження 1. Із оцінок (18) випливає, що $Q_1(t, \cdot) \in S_{a_k}^1$ при кожному $t > 0$.

Справді, нехай $t \in (0, 1)$. Врахувавши властивість 1) функції φ, а також властивість а) функції Ω, маємо нерівності

$$e^{-t\varphi(\sigma)} \leq e^{-t\Omega(\sigma)} \leq e^{-\Omega(t\sigma)} \leq e^{-\ln \tilde{\gamma}(t\sigma)} = e^{\ln \gamma(t\sigma)} = \gamma(t\sigma), \quad \sigma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$\left(\text{тут враховано, що } \tilde{\gamma}(\sigma) = \dfrac{1}{\gamma(\sigma)},\ \sigma \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right)$.

Якщо $t > 1$, $t \neq n$, де $n \in \{2, 3, \ldots\}$, то $t = [t] + \{t\}$. Тоді

$$e^{-t\varphi(\sigma)} = e^{-[t]\varphi(\sigma)} e^{-\{t\}\varphi(\sigma)} \leq e^{-\{t\}\varphi(\sigma)} \leq e^{-\{t\}\Omega(\sigma)} \leq e^{-\Omega(\{t\}\sigma)} \leq$$

$$\leq e^{-\ln\tilde{\gamma}(\{t\}\sigma)} = \gamma(\{t\}\sigma), \quad \sigma \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Якщо $t = n,\ n \in \{2, 3, \ldots\}$, то $t = 1 + n - 1$. У цьому випадку

$$e^{-t\varphi(\sigma)} = e^{-\varphi(\sigma)}e^{-(n-1)\varphi(\sigma)} \leq e^{-\varphi(\sigma)} \leq e^{-\Omega(\sigma)} \leq e^{-\ln\tilde{\gamma}(\sigma)} = \gamma(\sigma), \quad \sigma \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Таким чином,

$$e^{-t\varphi(\sigma)} \leq \gamma(a\sigma), \quad \sigma \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \tag{19}$$

де $a = \{t\}$, якщо $t \neq n,\ n \in \mathbb{N}$, і $a = 1$, якщо $t = n,\ n \in \mathbb{N}$.

Отже, при фіксованому $t > 0$ справджуються нерівності

$$\left|D^n_\sigma Q_1(t,\sigma)\right| \leq c\tilde{A}^n n^n \gamma(a\sigma), \quad \sigma \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{20}$$

де $\tilde{A} = At^\omega$. Оскільки $e^{-t\varphi(0)} \leq e^{-t\Omega(0)} = 1$, то $D^n_\sigma Q_1(t,0) \leq c\tilde{A}^n n^n,\ n \in \mathbb{Z}_+$. Звідси та з леми 2 випливає, що $Q_1(t,\sigma) \in S^1_{a_k}$ при кожному $t > 0$.

Лема 5. *Функція Q_2 — мультиплікатор у просторі $S^1_{a_k}$.*

Доведення. З урахуванням властивості 1) функції φ виконуються нерівності

$$Q_1(t_k,\sigma) \leq \exp\{-t_k\varphi(\sigma)\} < 1, \quad k \in \{1,\ldots,m\}, \quad \sigma \in \mathbb{R}.$$

Оскільки $\mu > \sum_{k=1}^m \mu_k$, то

$$\frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^m \mu_k Q_1(t_k,\sigma) < \frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^m \mu_k < 1.$$

Тоді, використовуючи поліноміальну формулу, знаходимо

$$Q_2(\sigma) = \frac{1}{\mu}\left(1 - \frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^m \mu_k Q_1(t_k,\sigma)\right)^{-1} = \frac{1}{\mu}\sum_{r=0}^\infty \mu^{-r}\left(\sum_{k=1}^m \mu_k e^{-t_k\varphi(\sigma)}\right)^r =$$

$$= \sum_{r=0}^\infty \mu^{-(r+1)} \sum_{r_1+\ldots+r_m=r} \frac{r!}{r_1!\ldots r_m!}\left(\mu_1 e^{-t_1\varphi(\sigma)}\right)^{r_1}\ldots\left(\mu_m e^{-t_m\varphi(\sigma)}\right)^{r_m} =$$

$$= \sum_{r=0}^\infty \mu^{-(r+1)} \sum_{r_1+\ldots+r_m=r} \frac{r!}{r_1!\ldots r_m!}\,\mu_1^{r_1}\ldots\mu_m^{r_m} Q_1(\lambda,\sigma),$$

де $\lambda := t_1 r_1 + \ldots + t_m r_m,\ Q_1(\lambda,\sigma) = e^{-\lambda\varphi(\sigma)}$. Звідси та з (17) маємо нерівності

$$\left|D^n_\sigma Q_2(\sigma)\right| \leq cA^n n^n \sum_{r=0}^\infty \mu^{-(r+1)} \sum_{r_1+\ldots+r_m=r} \frac{r!}{r_1!\ldots r_m!}\,\mu_0^r \lambda^{\omega n}\exp\{-\lambda\varphi(\sigma)\} \leq$$

$$\leq cA^n t_m^{\omega n} n^n \sum_{r=0}^\infty \mu^{-(r+1)}\mu_0^r r^n \sum_{r_1+\ldots+r_m=r} \frac{r!}{r_1!\ldots r_m!}, \quad n \in \mathbb{N},$$

де $\mu_0 = \max\{\mu_1, \ldots \mu_m\}$. Далі скористаємося тим, що

$$\sum_{r_1+\ldots+r_m=r} \frac{r!}{r_1!\ldots r_m!} = m^r.$$

Тоді

$$\left|D_\sigma^n Q_2(\sigma)\right| \le c' A_1^n n^n \sum_{r=0}^{\infty} \tilde{\mu}^r r^n = \tilde{c} A_1^n n^n, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{21}$$

де $\tilde{\mu} = \mu^{-1}\mu_0 m < 1,\ c' = c\mu^{-1},\ \tilde{c} = c' \sum_{r=0}^{\infty} \tilde{\mu}^r r^n,\ A_1 = At_m^\omega$. З останньої нерівності та обмеженості функції Q_2 на $\mathbb{R}$ випливає, що Q_2 — мультиплікатор у просторі $S_{a_k}^1$.

Лему 5 доведено.

Урахувавши (17), (21) та формулу Лейбніца диференціювання добутку двох функцій, отримаємо

$$\left|D_\sigma^n Q(t,\sigma)\right| = \left|\sum_{l=0}^{n} C_n^l D_\sigma^l Q_1(t,\sigma) D_\sigma^{n-l} Q_2(\sigma)\right| \le$$

$$\le c\tilde{c} \sum_{l=0}^{n} C_n^l A^l t^{\omega l} l^l A_1^{n-l} (n-l)^{n-l} \exp\{-t\varphi(\sigma)\} \le$$

$$\le \tilde{b}\tilde{B}^n t^{\omega n} n^n \exp\{-t\varphi(\sigma)\},$$

де $\tilde{b} = c\tilde{c},\ \tilde{B} = 2\max\{A, A_1\}$. З останньої нерівності, з урахуванням зауваження 1 та оцінки (20), дістаємо, що $Q(t,\sigma)$ як функція змінної σ є елементом простору $S_{a_k}^1$ (при кожному $t > 0$). Оскільки $G = F^{-1}[Q]$, то функція $G(t,\cdot)$ є елементом простору $S_1^{a_n}$ при кожному $t > 0$.

Лема 6. *Функція $G(t,\cdot)$, $t \in (0,+\infty)$, як абстрактна функція параметра t зі значеннями у просторі $S_1^{a_n}$ диференційовна по t.*

Доведення. Із властивості неперервності перетворення Фур'є (прямого та оберненого) у просторах типу S випливає, що для доведення твердження досить установити, що функція $F[G(t,\cdot)] = Q(t,\cdot)$ як абстрактна функція параметра t зі значеннями у просторі $S_{a_k}^1$ диференційовна по t. Іншими словами, потрібно довести, що граничне співвідношення

$$\Phi_{\Delta t}(\sigma) := \frac{1}{\Delta t}\left[Q(t+\Delta t,\cdot) - Q(t,\cdot)\right] \to \frac{\partial}{\partial t} Q(t,\cdot), \quad \Delta t \to 0,$$

виконується в тому розумінні, що:

1) $D_\sigma^n \Phi_{\Delta t}(\sigma) \underset{\Delta t \to 0}{\longrightarrow} D_\sigma^n(-\varphi(\sigma)Q(t,\sigma))$, $n \in \mathbb{Z}_+$, рівномірно на кожному відрізку $[a,b] \subset \mathbb{R}$;

2) $\left|D_\sigma^n \Phi_{\Delta t}(\sigma)\right| \le \overline{c}\,\overline{B}^n n^n \gamma(\overline{a}\sigma),\ n \in \mathbb{Z}_+,\ \sigma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

де сталі $\overline{c},\ \overline{a},\ \overline{B} > 0$ не залежать від Δt, якщо Δt досить мале.

Функція $Q(t,\sigma),\ (t,\sigma) \in \Omega_+$, диференційовна по t у звичайному розумінні. Внаслідок теореми Лагранжа про скінченні прирости

$$\Phi_{\Delta t}(\sigma) = -\varphi(\sigma)Q(t+\theta\Delta t,\sigma), \quad 0 < \theta < 1.$$

Отже,

$$D_\sigma^n \Phi_{\Delta t}(\sigma) = -\sum_{l=0}^{n} C_n^l D_\sigma^l \varphi(\sigma) D_\sigma^{n-l} Q(t+\theta\Delta t, \sigma) \tag{22}$$

і

$$D_\sigma^n \left(\Phi_{\Delta t}(\sigma) - \frac{\partial}{\partial t} Q(t,\sigma) \right) = -\sum_{l=0}^{n} C_n^l D_\sigma^l \varphi(\sigma) \left[D_\sigma^{n-l} Q(t+\theta\Delta t,\sigma) - D_\sigma^{n-l} Q(t,\sigma) \right].$$

Оскільки

$$D_\sigma^{n-l} Q(t+\theta\Delta t,\sigma) - D_\sigma^{n-l} Q(t,\sigma) = D_\sigma^{n-l+1} Q(t+\theta_1\Delta t,\sigma)\theta\Delta t, \quad 0<\theta_1<1,$$

то звідси та з оцінок (17) одержуємо, що

$$D_\sigma^{n-l+1} Q(t+\theta_1\Delta t,\sigma)\theta\Delta t \to 0, \quad \Delta t \to 0,$$

рівномірно на довільному відрізку $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Звідси, з урахуванням властивостей функції φ, дістанемо, що

$$D_\sigma^n \Phi_{\Delta t}(\sigma) \to D_\sigma^n \left(\frac{\partial}{\partial t} Q(t,\sigma) \right), \quad \Delta t \to 0,$$

рівномірно на кожному відрізку $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Отже, умова 1) виконується.

Враховуючи (22), оцінки, які задовольняють функції $\varphi(\sigma)$, $Q(t,\sigma)$, та їхні похідні, знаходимо, що

$$\left| D_\sigma^n \Phi_{\Delta t}(\sigma) \right| \le \tilde{c} \sum_{l=0}^{n} C_n^l B^l l^l A^{n-l} (t+\theta\Delta t)^{\omega(n-l)} e^{-(t+\theta\Delta t)\varphi(\sigma)} \tilde{\gamma}(\varepsilon\sigma)$$

(тут $\varepsilon>0$ — довільно фіксоване, $\tilde{c} = \tilde{c}(\varepsilon) > 0$). Вважаючи, що $t+\theta\Delta t \le T$, де $T>1$ фіксоване, прийдемо до оцінки

$$\left| D_\sigma^n \Phi_{\Delta t}(\sigma) \right| \le \overline{c}\,\overline{L}^n n^n e^{-t\varphi(\sigma)} \tilde{\gamma}(\varepsilon\sigma), \quad \overline{L} = 2\max\{AT, B\}.$$

Далі врахуємо нерівність $\exp\{-t\varphi(\sigma)\} \le \gamma(a\sigma)$, $\sigma \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ (див. (19)). Тоді

$$\left| D_\sigma^n \Phi_{\Delta t}(\sigma) \right| \le \tilde{c}\tilde{L}^n n^n \gamma(a\sigma)\tilde{\gamma}(\varepsilon\sigma) = \tilde{c}\tilde{L}^n n^n e^{-\ln\tilde{\gamma}(a\sigma)} e^{\ln\tilde{\gamma}(\varepsilon\sigma)} =$$

$$= \tilde{c}\tilde{L}^n n^n e^{-\ln\tilde{\gamma}(a\sigma)+\ln\tilde{\gamma}(\varepsilon\sigma)}, \quad \sigma \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

(тут $\tilde{\gamma}(\sigma) = 1/\gamma(\sigma)$). З нерівності опуклості (11), яку задовольняє функція $\ln\tilde{\gamma}$, випливає нерівність

$$\ln\tilde{\gamma}(\varepsilon\sigma) + \ln\tilde{\gamma}((a-\varepsilon)\sigma) \le \ln\tilde{\gamma}(a\sigma), \quad \varepsilon \in (0,a), \quad \sigma \in \mathbb{R}\setminus\{0\},$$

або нерівність

$$-\ln\tilde{\gamma}(a\sigma) + \ln\tilde{\gamma}(\varepsilon\sigma) \le -\ln\tilde{\gamma}((a-\varepsilon)\sigma), \quad \sigma \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \quad \varepsilon \in (0,a).$$

Отже,

$$\left| D_\sigma^n \Phi_{\Delta t}(\sigma) \right| \le \tilde{c}\tilde{L}^n n^n e^{-\ln\tilde{\gamma}(a_1\sigma)} = \tilde{c}\tilde{L}^n n^n \gamma(a_1\sigma),$$

$$a_1 = a - \varepsilon, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad \sigma \in \mathbb{R}\setminus\{0\},$$

причому всі сталі не залежать від Δt, тобто умова 2) виконується.

Лему 6 доведено.

Наслідок 1. *Правильною є формула*

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(f * G(t,x)\big) = f * \frac{\partial G(t,x)}{\partial t} \quad \forall f \in \big(S_1^{a_n}\big)', \quad t > 0.$$

Доведення. Згідно з означенням згортки узагальненої функції з основною

$$f * G(t,x) = \big\langle f_\xi, T_{-x}\check{G}(t,\xi)\big\rangle, \quad \check{G}(t,\xi) = G(t,-\xi).$$

Тоді

$$\frac{\partial}{\partial t}\,(f * G(t,\cdot)) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\,[f * G(t+\Delta t,\cdot) - f * G(t,\cdot)] =$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\left\langle f_\xi, \frac{1}{\Delta t}\,\big[T_{-x}\check{G}(t+\Delta t,\cdot) - T_{-x}\check{G}(t,\cdot)\big]\right\rangle.$$

Внаслідок леми 6 граничне співвідношення

$$\frac{1}{\Delta t}\big[T_{-x}\check{G}(t+\Delta t,\xi) - T_{-x}\check{G}(t,\xi)\big] \to \frac{\partial}{\partial t}T_{-x}\check{G}(t,\xi), \quad \Delta t \to 0,$$

виконується в сенсі збіжності за топологією простору $S_1^{a_n}$. Тому

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(f * G(t,\cdot)\big) = \left\langle f_\xi, \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\big[T_{-x}\check{G}(t+\Delta t,\xi) - T_{-x}\check{G}(t,\xi)\big]\right\rangle =$$

$$= \left\langle f_\xi, \frac{\partial}{\partial t}T_{-x}\check{G}(t,\xi)\right\rangle = \left\langle f_\xi, T_{-x}\,\frac{\partial}{\partial t}\,\check{G}(t,\xi)\right\rangle = f * \frac{\partial}{\partial t}\,G(t,\cdot).$$

Наслідок 1 доведено.

Лема 7. *У просторі* $\big(S_1^{a_n}\big)'$ *виконуються граничні співвідношення*

1. $G(t,\cdot) \to F^{-1}[Q_2],\ \Delta t \to +0.$

2.

$$\mu G(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m}\mu_k G(t_k,\cdot) \to \delta, \quad t \to +0, \tag{23}$$

де δ *— дельта-функція Дірака.*

Доведення. 1. Урахувавши властивість неперервності перетворення Фур'є (прямого та оберненого) у просторах типу S', для доведення твердження досить встановити, що

$$F[G(t,\cdot)] = Q(t,\cdot) = Q_1(t,\cdot)Q_2(\cdot) \to Q_2(\cdot), \quad t \to +0,$$

у просторі $\big(S_{a_k}^1\big)'$. Для цього візьмемо довільну функцію $\psi \in S_{a_k}^1$ і, скориставшись тим, що Q_2 — мультиплікатор у просторі $S_{a_k}^1$, а також теоремою Лебега про граничний перехід під знаком інтеграла Лебега, отримаємо

$$\langle Q_1(t,\cdot)Q_2(\cdot),\psi\rangle = \langle Q_1(t,\cdot), Q_2(\cdot)\psi(\cdot)\rangle =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} Q_1(t,\sigma)Q_2(\sigma)\psi(\sigma)d\sigma \underset{t\to+0}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}} Q_2(\sigma)\psi(\sigma)d\sigma =$$

$$= \langle 1, Q_2(\cdot)\psi(\cdot)\rangle = \langle Q_2, \psi\rangle.$$

Звідси випливає твердження 1 леми 7.

2. Урахувавши твердження 1 знайдемо, що

$$\mu G(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k G(t_k,\cdot) \underset{t\to+0}{\longrightarrow} \mu F^{-1}[Q_2] - \sum_{k=1}^{m} \mu_k G(t_k,\cdot) =$$

$$= \mu F^{-1}[Q_2] - \sum_{k=1}^{m} \mu_k F^{-1}[Q_1(t_k,\cdot)Q_2(\cdot)] =$$

$$= F^{-1}\left[\mu Q_2 - \sum_{k=1}^{m} \mu_k Q_1(t_k,\cdot)Q_2(\cdot)\right] = F^{-1}\left[\left(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k Q_1(t_k,\cdot)\right) Q_2(\cdot)\right] =$$

$$= F^{-1}\left[\left(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k Q_1(t_k,\sigma)\right)\left(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k Q_1(t_k,\sigma)\right)^{-1}\right] = F^{-1}[1] = \delta.$$

Отже, співвідношення (23) виконується в просторі $\left(S_1^{a_n}\right)'$.

Лему 7 доведено.

Зауваження 2. Якщо $\mu = 1,\ \mu_1 = \ldots = \mu_m = 0,$ то задача (12), (13) перетворюється в задачу Коші для рівняння (12). У цьому випадку $Q_2(\sigma) = 1\ \forall \sigma \in \mathbb{R},\ G(t,x) = F^{-1}\left[e^{-t\varphi(\sigma)}\right]$ і $G(t,\cdot) \to F^{-1}[1] = \delta,\ t \to +0,$ у просторі $\left(S_1^{a_n}\right)'$.

Теорема 3. *Нехай*

$$\omega(t,x) = f * G(t,x), \quad f \in \left(S_{1,*}^{a_n}\right)', \quad (t,x) \in \Omega_+,$$

де $\left(S_{1,*}^{a_n}\right)'$ *— клас згортувачів у просторі* $S_1^{a_n}$. *Тоді у просторі* $\left(S_1^{a_n}\right)'$ *виконується граничне співвідношення*

$$\mu\omega(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \omega(t_k,\cdot) \to f, \quad t \to +0. \tag{24}$$

Доведення. Доведемо, що граничне співвідношення

$$F\left[\mu\omega(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \omega(t_k,\cdot)\right] \to F[f], \quad t \to +0, \tag{25}$$

виконується у просторі $\left(S_{a_k}^1\right)'$. Оскільки $f \in \left(S_{1,*}^{a_n}\right)',\ G(t,\cdot) \in S_1^{a_n}$ при кожному $t > 0,$ то (див. теорему 2)

$$F[\omega(t,\cdot)] = F[f * G(t,\cdot)] = F[f]F[G(t,\cdot)] = F[f]Q(t,\cdot).$$

Отже, потрібно довести, що

$$F[f]\left(\mu Q(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k Q(t_k,\cdot)\right) \to F[f]$$

при $t \to +0$ у просторі $\left(S^1_{a_k}\right)'$. Оскільки $Q(t,\cdot) = Q_1(t,\cdot)Q_2(\cdot) \to Q_2(\cdot)$ при $t \to +0$ у просторі $\left(S^1_{a_k}\right)'$ (див. доведення твердження 1 леми 7), то

$$\mu Q(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k Q(t_k,\cdot) \underset{t\to+0}{\longrightarrow} \mu Q_2(\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k Q_1(t_k,\cdot)Q_2(\cdot) =$$

$$= \left(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k Q_1(t_k,\sigma)\right) Q_2(\sigma) = 1$$

у просторі $\left(S^1_{a_k}\right)'$. Таким чином, співвідношення (25), а отже, й (24) виконуються у відповідних просторах.

Теорему 3 доведено.

Функція $G(t,x),\ (t,x) \in \Omega_+$, задовольняє рівняння (12). Справді,

$$\frac{\partial}{\partial t} G(t,x) = \frac{\partial}{\partial t} F^{-1}[Q(t,\sigma)] = F^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial t} Q(t,\sigma)\right] = -F^{-1}[\varphi(\sigma)Q(t,\sigma)],$$

$$\varphi\left(\frac{i\partial}{\partial x}\right) G(t,x) = F^{-1}\left[\varphi(\sigma)F^{-1}[G(t,\cdot)]\right] = F^{-1}[\varphi(\sigma)Q(t,\sigma)].$$

Отже,

$$\frac{\partial G(t,x)}{\partial t} + \varphi\left(\frac{i\partial}{\partial x}\right) G(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \Omega_+,$$

що й потрібно було довести.

З теореми 3 випливає, що нелокальну багатоточкову за часом задачу для рівняння (12) можна ставити так: знайти функцію $u(t,x),\ (t,x) \in \Omega_+$, яка задовольняє рівняння (12) і умову

$$\mu \lim_{t\to+0} u(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k u(t_k,\cdot) = f, \quad f \in \left(S^{a_n}_{1,*}\right)' \tag{26}$$

(граничне співвідношення (26) розглядається у просторі $\left(S^{a_n}_1\right)'$, обмеження на параметри $\mu,\ \mu_1,\ldots,\mu_m, t_1,\ldots,t_m$ такі ж, як у випадку задачі (12), (13)).

Теорема 4. *Нелокальна багатоточкова за часом задача (12), (13) коректно розв'язна, розв'язок визначає формула*

$$u(t,x) = f * G(t,x), \quad (t,x) \in \Omega_+,$$

$u(t,\cdot) \in S^{a_n}_1$ *при кожному* $t > 0$.

Доведення. Переконаємося в тому, що функція $u(t,x),\ (t,x) \in \Omega_+$, задовольняє рівняння (12). Справді (див. наслідок 1),

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(f * G(t,\cdot)\right) = f * \frac{\partial G(t,\cdot)}{\partial t}$$

і

$$\varphi\left(\frac{i\partial}{\partial x}\right) u(t,x) = F^{-1}[\varphi(\sigma)F[f * G(t,\cdot)]].$$

Оскільки f — згортувач у просторі $S_1^{a_n}$, то

$$F[f * G(t,\cdot)] = F[f]F[G(t,\cdot)] = F[f]Q(t,\cdot).$$

Отже,

$$\varphi\left(\frac{i\partial}{\partial x}\right) u(t,x) = F^{-1}\big[\varphi(\sigma)Q(t,\sigma)F[f](\sigma)\big] =$$

$$= -F^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial t}\, Q(t,\sigma)F[f]\right] = -F^{-1}\left[F\left[\frac{\partial G(t,\cdot)}{\partial t}\right]F[f]\right] =$$

$$= -F^{-1}\left[F\left[f * \frac{\partial G(t,\cdot)}{\partial t}\right]\right] = -f * \frac{\partial G(t,\cdot)}{\partial t}.$$

Звідси випливає, що функція $u(t,x),\ (t,x) \in \Omega_+$, задовольняє рівняння (12).

З теореми 3 випливає, що функція $u(t,x),\ (t,x) \in \Omega_+$, задовольняє умову (26) у вказаному сенсі.

Залишається переконатися в тому, що задача (12), (26) має єдиний розв'язок. Для цього розглянемо задачу Коші

$$\frac{\partial v}{\partial t} - Av = 0, \quad (t,x) \in [0,t_0) \times \mathbb{R} \equiv \Omega', \quad 0 \le t < t_0 < +\infty, \tag{27}$$

$$v(t,\cdot)|_{t=t_0} = \psi, \quad \psi \in \big(S_{1,*}^{a_n}\big)', \tag{28}$$

де A — звуження спряженого оператора до оператора $\varphi\left(\dfrac{i\partial}{\partial x}\right) = F^{-1}[\varphi F]$ на простір $S_1^{a_n} \subset \subset \big(S_{1,*}^{a_n}\big)'$. Умову (28) розуміємо в слабкому сенсі. Задача Коші (27), (28) є розв'язною, при цьому $v(t,\cdot) \in S_1^{a_n}$ при кожному $t \in [0,t_0)$ $\Big($задача Коші (27), (28) досліджується за схемою дослідження задачі (10), (26) з параметрами $\mu = 1,\ \mu_1 = \ldots = \mu_m = 0$ з урахуванням того, що $A = F^{-1}[\varphi \cdot F]$; при цьому $v(t,x) = \psi * \tilde{G}(t,x),\ \tilde{G}(t,x) = F^{-1}\big[e^{(t-t_0)\varphi(\sigma)}\big]\Big)$.

Нехай $Q_{t_0}^t \colon \big(S_{1,*}^{a_n}\big)' \to S_1^{a_n}$ — оператор, який зіставляє функції $\psi \in \big(S_{1,*}^{a_n}\big)'$ розв'язок задачі (27), (28). Оператор $Q_{t_0}^t$ є лінійним і неперервним, він визначений для довільних t і t_0 таких, що $0 \le t < t_0 < +\infty$, і має властивості

$$\forall \psi \in \big(S_{1,*}^{a_n}\big)' \colon \quad \frac{dQ_{t_0}^t \psi}{dt} - AQ_{t_0}^t \psi = 0, \quad \lim_{t \to t_0} Q_{t_0}^t \psi = \psi$$

(границя розглядається у просторі $\big(S_1^{a_n}\big)'$).

Розглянемо розв'язок $u(t,x),\ (t,x) \in \Omega_+$, задачі (12), (26), який розуміємо як регулярний функціонал із простору $\big(S_{1,*}^{a_n}\big)'$. Доведемо, що задача (12), (26) може мати лише єдиний розв'язок у просторі $\big(S_{1,*}^{a_n}\big)'$. Для цього досить довести, що єдиним розв'язком рівняння (12) при нульовій початковій умові може бути лише функціонал $u(t,x) \equiv 0$ (при кожному $t \in (0,+\infty)$). Застосуємо функціонал u до функції $Q_{t_0}^t \psi$, де ψ — довільно фіксований елемент з простору $S_1^{a_n} \subset \big(S_{1,*}^{a_n}\big)'$. Диференціюючи по t і використовуючи рівняння (12), (27), отримуємо

$$\frac{\partial}{\partial t}\, \langle u(t,\cdot), Q_{t_0}^t \psi \rangle = \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, Q_{t_0}^t \psi \right\rangle + \left\langle u, \frac{\partial Q_{t_0}^t \psi}{\partial t} \right\rangle =$$

$$= -\left\langle \varphi\left(\frac{i\partial}{\partial x}\right) u, Q_{t_0}^t \psi \right\rangle + \langle u, AQ_{t_0}^t \psi \rangle =$$

$$= -\left\langle \varphi\left(\frac{i\partial}{\partial x}\right) u, Q_{t_0}^t \psi \right\rangle + \left\langle \varphi\left(\frac{i\partial}{\partial x}\right) u, Q_{t_0}^t \psi \right\rangle = 0, \quad t \in [0, t_0).$$

Отже, $\left\langle u(t,\cdot), Q_{t_0}^t \psi \right\rangle$ є сталою величиною. Із властивостей абстрактних функцій випливає співвідношення

$$\lim_{t \to t_0} \left\langle u(t,\cdot), Q_{t_0}^t \psi \right\rangle = \langle u(t_0,\cdot), \psi \rangle = \mathrm{const}$$

у довільній точці $t_0 \in (0, +\infty)$. Якщо в (26) $f = 0$, то

$$\mu \lim_{t \to +0} \langle u(t,\cdot), \psi \rangle - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \langle u(t_k,\cdot), \psi \rangle = \mu c_0 - \sum_{k=1}^{m} \mu_k c_k = 0,$$

де $c_0, c_1, \ldots, c_m$ — довільні сталі. Звідси випливає, що $c_0 = c_1 = \ldots = c_m = 0$. Справді, нехай це не так, тобто, наприклад, $c_0 \neq 0$. Тоді маємо співвідношення $\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \alpha_k = 0$, де $\alpha_k = c_k / c_0$, $k \in \{1, \ldots, m\}$. Оскільки $\mu, \mu_1, \ldots, \mu_m$ — фіксовані параметри, причому $\mu > \sum_{k=1}^{m} \mu_k$, то отримана суперечність доводить, що $c_0 = 0$. Аналогічно доводимо, що $c_1 = c_2 = \ldots = c_m = 0$. Таким чином, $\langle u(t_0,\cdot), \psi \rangle = 0$ для довільного $\psi \in S_1^{a_n}$, тобто $u(t_0, x)$ — нульовий функціонал з простору $\left(S_{1,*}^{a_n}\right)'$. Оскільки $t_0 \in (0, +\infty)$ і t_0 вибране довільним чином, то $u(t,\cdot) = 0$ для всіх $t \in (0, +\infty)$.

Теорему 4 доведено.

Наприклад, якщо $\varphi\left(\dfrac{i\partial}{\partial x}\right) = \left(I - \left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)^2\right)^{\omega/2}$ — оператор диференціювання дробового порядку в просторі $S_1^{1/\omega} \equiv S_{k^k}^{n^{n/\omega}}$, побудований за функцією $\varphi(\sigma) = (1 + \sigma^2)^{\omega/2}$, $\sigma \in \mathbb{R}$, $\omega \in [1, 2)$ — фіксований параметр, яка є мультиплікатором у просторі $S_{1/\omega}^1 = S_{k^{k/\omega}}^{n^n}$, то з теореми 4 випливає, що нелокальна багатоточкова за часом задача для рівняння (12) з таким оператором коректно розв'язна, якщо узагальнена функція f в умові (26) є елементом простору $\left(S_{1,*}^{1/\omega}\right)'$.

Література

1. М. І. Матійчук, *Параболічні сингулярні крайові задачі*, Ін-т математики НАН України, Київ (1999).
2. А. М. Нахушев, *Уравнения математической биологии*, Высш. шк., Москва (1995).
3. А. А. Дезин, *Общие вопросы теории граничных задач*, Наука, Москва (1980).
4. В. К. Романко, *Граничные задачи для одного класса дифференциальных операторов*, Дифференц. уравнения, **10**, № 11, 117 – 131 (1974).
5. В. В. Городецкий, В. И. Мироник, *Двухточечная задача для одного класса эволюционных уравнений. I*, Дифференц. уравнения, **46**, № 3, 349 – 363 (2010).
6. В. В. Городецкий, В. И. Мироник, *Двухточечная задача для одного класса эволюционных уравнений. II*, Дифференц. уравнения, **46**, № 4, 520 – 526 (2010).
7. В. В. Городецкий, О. В. Мартынюк, *Многоточечная задача для одного класса эволюционных уравнений*, Дифференц. уравнения, **49**, № 8, 1005 – 1015 (2013).
8. В. В. Городецький, О. В. Мартинюк, *Задача Коші та нелокальні задачі для еволюційних рівнянь першого порядку за часовою змінною,* Родовід, Чернівці (2015).
9. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Пространства основных и обобщенных функций*, Физматгиз, Москва (1958).

10. В. И. Горбачук, М. Л. Горбачук, *Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений*, Наук. думка, Киев (1984).
11. M. L. Gorbachuk, V. I. Gorbachuk, *Boundary-value problems for operator differential equations*, Kluwer Acad. Publ. Group, Dordrecht (1991).
12. В. В. Городецкий, *О периодической задаче Коши для уравнений параболического типа в классах обобщенных функций*, Дифференц. уравнения, **23**, № 10, 1745 – 1750 (1987).
13. В. В. Городецкий, *О локализации решений задачи Коши для* $2b$*-перодических систем в классах обобщенных функций*, Дифференц. уравнения, **24**, № 2, 348 – 350 (1988).
14. В. В. Городецький, *Граничні властивості гладких у шарі розв'язків рівнянь параболічного типу*, Рута, Чернівці (1998).
15. В. В. Городецький, *Множини початкових значень гладких розв'язків диференціально-операторних рівнянь параболічного типу*, Рута, Чернівці (1998).
16. В. В. Городецький, *Еволюційні рівняння в зліченно-нормованих просторах нескінченно диференційовних функцій*, Рута, Чернівці (2000).
17. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Преобразование Фурье быстро растущих функций и вопросы единственности задачи Коши*, Успехи мат. наук, **8**, вып. 6, 3 – 54 (1953).
18. В. В. Городецкий, Н. И. Нагнибида, П. П. Настасиев, *Методы решения задач по функциональному анализу*, Выща шк., Киев (1990).

Одержано 26.12.20