УДК 517.983

КРАЙОВІ ЗАДАЧІ З КЕРУВАННЯМ ДЛЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ФРЕДГОЛЬМА З ВИРОДЖЕНИМ ЯДРОМ У БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ

В. П. Журавльов, М. П. Фомін

Поліс. нац. ун-т,
б-р Старий, 7, Житомир, 10008, Україна,
e-mail: vfz2008@ukr.net,
npfomin109@gmail.com

We obtain conditions for the existence of solutions of boundary-value problems with control for Fredholm integral equations with a degenerate kernel in Banach spaces and the general form of these solutions. We also find the general form of controls for which such a solution exists. This problem is solved by using the theory of generalized inversion of Fredholm integral operators with degenerate kernel in Banach spaces and pseudo-inversion of Fredholm integral operators with a degenerate kernel in finite-dimensional spaces.

Одержано умови існування та загальний вигляд розв'язків крайових задач із керуванням для інтегральних рівнянь Фредгольма з виродженим ядром у банахових просторах, а також знайдено загальний вигляд керування, при якому такий розв'язок існує. Цю задачу розв'язано з використанням теорії узагальненого обернення інтегральних операторів Фредгольма з виродженим ядром у банахових просторах і псевдообернення інтегральних операторів Фредгольма з виродженим ядром у скінченновимірних просторах.

Одним із численних підходів до розв'язання різноманітних задач із керуванням є підхід, який дозволяє розглядати їх як специфічні крайові задачі. При цьому права частина рівняння $Lx = g$ трактується як зовнішнє збурення, що складається з двох доданків $g = f + Hu$, де f — задана функція, H — оператор керування, а u — керування, яким можна за певних умов впливати на розв'язок.

Розроблення нових підходів до дослідження крайових задач із використанням теорії узагальненого обернення операторів у банахових просторах і псевдообернення нормально розв'язних операторів у гільбертових просторах [1, 2] дозволяє застосувати їх до дослідження не всюди розв'язних крайових задач із керуванням.

Застосовуючи псевдообернення матриць, у випадку, коли оператор діє в евклідових просторах, у [3] отримано умови існування та побудовано розв'язки інтегральних рівнянь із керуванням у випадку невиродженого ядра інтегрального оператора.

Для інтегро-диференціальних операторів, які не є всюди розв'язними і діють у скінченновимірних просторах, у [4] розглянуто питання нормальної розв'язності, керованості та індексу, а в [5] отримано критерій існування загального розв'язку та керування інтегро-диференціальної системи з керуванням.

Крайові задачі з керуванням для інтегральних рівнянь Фредгольма з виродженим ядром у банахових просторах не досліджувалися, тому актуальною є задача про встановлення умов керованості, побудови загальних розв'язків і відповідних керувань інтегральних рівнянь із виродженим ядром і крайових задач для них у банахових просторах.

Постановка задачі. Нехай $\mathbf{B}$, $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$, $\mathbf{B}_3$ — дійсні банахові простори, $\mathcal{I} = [a, b]$ — скінченний проміжок.

Розглянемо крайову задачу з керуванням для інтегрального рівняння Фредгольма з виродженим ядром

$$(Lz)(t) := z(t) - M(t) \int_a^b N(s) z(s) ds = f(t) + \int_a^b K(t,s) u(s) ds, \tag{1}$$

$$\ell z(\cdot) = \alpha + Su(\cdot), \tag{2}$$

де $z(t)$ — вектор-функція, яка діє з відрізка $\mathcal{I}$ у банаховий простір $\mathbf{B}_1$, $z(t) \in \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) := \{z(\cdot) \to \mathbf{B}_1, |||z||| = \sup_{t\in\mathcal{I}} \|z(t)\|_{\mathbf{B}_1}\}$, $\mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ — банаховий простір неперервних на $\mathcal{I}$ вектор-функцій, оператор-функція $M(t)$ діє з банахового простору $\mathbf{B}_2$ у $\mathbf{B}_1$, сильно неперервна [6, с. 141] з нормою $|||M||| = \sup_{t\in\mathcal{I}} \|M(t)\|_{\mathbf{B}_1} < \infty$, а оператор-функція $N(t)$ діє з банахового простору $\mathbf{B}_1$ у $\mathbf{B}_2$, сильно неперервна з нормою $|||N||| = \sup_{t\in\mathcal{I}} \|N(t)\|_{\mathbf{B}_2} < \infty$, оператор-функція $K(t,s)$ визначена у квадраті $\mathcal{I} \times \mathcal{I}$ і діє з банахового простору $\mathbf{B}_1$ у $\mathbf{B}_1$ по змінній t і з банахового простору $\mathbf{B}_3$ у $\mathbf{B}_3$ — по змінній s, сильно неперервна по t, s, з нормою $|||K||| = \sup_{t,s\in\mathcal{I}} \|K(t,s)\|_{\mathbf{B}_1\times\mathbf{B}_3} < \infty$, вектор-функції $f(t) \in \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$, $u(t) \in \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_3)$ визначені на тому ж проміжку $\mathcal{I}$ зі значеннями у банахових просторах $\mathbf{B}_1$ та $\mathbf{B}_3$ з нормами $|||f||| = \sup_{t\in\mathcal{I}} \|f(t)\|_{\mathbf{B}_1}$ та $|||u||| = \sup_{t\in\mathcal{I}} \|u(t)\|_{\mathbf{B}_3}$, $\ell\colon \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \to \mathbf{B}$ та $S\colon \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_3) \to \mathbf{B}$ — лінійні обмежені вектор-функціонали, $\alpha \in \mathbf{B}$.

Нехай крайова задача для інтегрального рівняння Фредгольма з виродженим ядром без керування

$$(Lz)(t) := z(t) - M(t) \int_a^b N(s) z(s) ds = f(t), \tag{3}$$

$$\ell z(\cdot) = \alpha$$

не має розв'язків при довільних $f(t) \in \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ та $\alpha \in \mathbf{B}$.

Ставимо задачу: знайти умови існування і загальний вигляд розв'язку $z(t)$ рівняння з керуванням (1) та крайової задачі з керуванням (1), (2), а також знайти загальний вигляд керування $u(t)$, при якому такий розв'язок існує.

Ця задача буде розв'язуватись із використанням теорії узагальненого обернення інтегральних операторів Фредгольма з виродженим ядром у банахових просторах [7] та псевдообернення інтегральних операторів Фредгольма з виродженим ядром у скінченновимірних просторах [8].

Попередні відомості. Лінійне інтегральне рівняння Фредгольма з виродженим ядром (3) у банаховому просторі не є всюди розв'язним. У [7] встановлено умови узагальненої оборотності інтегрального оператора Фредгольма з виродженим ядром у банаховому просторі та побудовано узагальнено обернений оператор L^- до нього.

Позначимо

$$D = I_{\mathbf{B}_2} - A, \quad A = \int_a^b N(s) M(s)\, ds, \quad D\colon \mathbf{B}_2 \to \mathbf{B}_2.$$

Нехай D — обмежений узагальнено оборотний, а отже, нормально розв'язний [9] оператор. Тоді існують [10] обмежені проектори: $\mathcal{P}_{N(D)} : \mathbf{B}_2 \to N(D)$, який проектує банаховий простір $\mathbf{B}_2$ на нуль-простір $N(D)$ оператора D, $\mathcal{P}_{Y_D} : \mathbf{B}_2 \to Y_D$, який проектує банаховий простір $\mathbf{B}_2$ на підпростір $Y_D = \mathbf{B}_2 \ominus R(D)$, та обмежений узагальнено-обернений оператор D^- [2].

Далі клас обмежених узагальнено оборотних операторів, які діють із банахового простору $\mathbf{X}$ у банаховий простір $\mathbf{Y}$ будемо позначати через $\mathbf{GI}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ *(generalized inverse)*.

Теорема 1 [7]**.** *Нехай $D \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_2, \mathbf{B}_2)$. Тоді за виконання умови*

$$\mathcal{P}_{Y_D} \int_a^b N(s) f(s) ds = 0$$

і лише за неї операторне рівняння (3) розв'язне та має сім'ю розв'язків

$$z(t) = M(t)\, \mathcal{P}_{N(D)} \hat{c} + \big(L^- f\big)(t),$$

де $M(t)\mathcal{P}_{N(D)}$ — оператор-функція, яка є розв'язком відповідного (3) однорідного $(f(t) = 0)$ інтегрального рівняння, $\hat{c}$ — довільний елемент банахового простору $\mathbf{B}_2$,

$$\big(L^- f\big)(t) = f(t) + M(t) D^- \int_a^b N(s) f(s) ds \tag{4}$$

— узагальнено-обернений оператор до інтегрального оператора L.

Основний результат. ***1. Інтегральні рівняння з керуванням у банахових просторах.*** Нехай операторне рівняння без керування (3) не має розв'язків при довільній функції $f(t) \in \in \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$. Знайдемо умову розв'язності інтегрального рівняння (1) та загальний вигляд керування, при якому розв'язок цього рівняння існує.

Нехай оператор D належить $\mathbf{GI}(\mathbf{B}_2, \mathbf{B}_2)$. Тоді нормально розв'язне рівняння (1) за теоремою 1 має розв'язок для тих і лише тих правих частин, які задовольняють умову [2, 7]

$$\mathcal{P}_{Y_D} \int_a^b N(s) \left[f(s) + \int_a^b K(s, \tau) u(\tau) d\tau \right] ds = 0. \tag{5}$$

З рівняння (5) маємо

$$\mathcal{P}_{Y_D} \int_a^b N(s) \int_a^b K(s, \tau) u(\tau) d\tau ds = -\mathcal{P}_{Y_D} \int_a^b N(s) f(s) ds.$$

Змінивши у лівій частині порядок інтегрування та позначивши

$$V(s) = \mathcal{P}_{Y_D} \int_a^b N(\tau) K(\tau, s) d\tau, \quad f_0 = -\int_a^b N(s) f(s) ds,$$

отримаємо операторне рівняння

$$\int_a^b V(s)u(s)ds = \mathcal{P}_{Y_D} f_0. \tag{6}$$

Для розв'язання рівняння (6) відносно $u(s)$ позначимо через $\{\psi_i\}_{i=1}^{\infty}$ систему базисних векторів банахового простору $\mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_3)$, з яких утворимо оператор-функцію

$$\Psi(t) = \big(\psi_1(t), \psi_2(t), \psi_3(t), \ldots, \psi_i(t), \ldots\big).$$

Розв'язок рівняння (6) будемо шукати у вигляді

$$u(s) = \Psi(s)d, \tag{7}$$

де $d \in \mathbf{B}_3$ — сталий вектор.

Підставивши (7) у (6), отримаємо операторне рівняння відносно сталого вектора d:

$$Bd = \mathcal{P}_{Y_D} f_0, \tag{8}$$

де

$$B = \int_a^b V(s)\Psi(s)ds, \quad B : \mathbf{B}_3 \to \mathbf{B}_2.$$

Нехай оператор B — узагальнено оборотний, а отже, нормально розв'язний. Тоді існують [10] обмежені проектори: $\mathcal{P}_{N(B)} : \mathbf{B}_3 \to N(B)$, який проектує банаховий простір $\mathbf{B}_3$ на нуль-простір $N(B)$ оператора B, $\mathcal{P}_{Y_B} : \mathbf{B}_2 \to Y_B$, який проектує банаховий простір $\mathbf{B}_2$ на підпростір $Y_B = \mathbf{B}_2 \ominus R(B)$, та обмежений узагальнено-обернений оператор $B^- : \mathbf{B}_2 \to \mathbf{B}_3$ [2].

Рівняння (8) має розв'язок для тих і лише тих $f \in \mathbf{B}_1$, які задовольняють умову

$$\mathcal{P}_{Y_B}\mathcal{P}_{Y_D} f_0 = -\mathcal{P}_{Y_B}\mathcal{P}_{Y_D} \int_a^b N(s)f(s)ds = 0, \tag{9}$$

при виконанні якої воно має сім'ю розв'язків

$$d = \mathcal{P}_{N(B)}\hat{d} + B^-\mathcal{P}_{Y_D} f_0, \tag{10}$$

де $\hat{d}$ — довільний вектор банахового простору $\mathbf{B}_3$.

Підставивши (10) у (7), отримаємо сім'ю керувань

$$u(s) = \Psi(s)\mathcal{P}_{N(B)}\hat{d} + \Psi(s)B^-\mathcal{P}_{Y_D} f_0, \tag{11}$$

при яких за теоремою 1 рівняння (1) буде мати сім'ю розв'язків

$$z(t) = M(t)\mathcal{P}_{N(D)}\hat{c} + \left(L^-\left[f(\cdot) + \int_a^b K(\cdot, s)u(s)ds\right]\right)(t) =$$

$$= M(t)\mathcal{P}_{N(D)}\hat{c} + \big(L^{-}f\big)(t) + \left(L^{-}\int\limits_a^b K(\cdot,s)u(s)ds\right)(t), \tag{12}$$

де оператор L^{-} діє на функцію $g(t) = \int_a^b K(t,s)u(s)ds$ за правилом (4):

$$\big(L^{-}g\big)(t) = g(t) + M(t)D^{-}\int\limits_a^b N(s)g(s)ds.$$

Підставивши (11) у (12), одержимо

$$z(t) = M(t)\mathcal{P}_{N(D)}\hat{c} + \big(L^{-}f\big)(t) +$$
$$+ \left(L^{-}\int\limits_a^b K(\cdot,s)\Psi(s)ds\mathcal{P}_{N(B)}\hat{d}\right)(t) +$$
$$+ \left(L^{-}\int\limits_a^b K(\cdot,s)\Psi(s)B^{-}\mathcal{P}_{Y_D}f_0 ds\right)(t).$$

Позначимо

$$[K\Psi](t) = \int\limits_a^b K(t,s)\Psi(s)ds.$$

Тоді після перетворень отримаємо

$$z(t) = \left[M(t)\mathcal{P}_{N(D)}, \left([K\Psi](t) + M(t)D^{-}\int\limits_a^b N(s)[K\Psi](s)ds\right)\mathcal{P}_{N(B)}\right]\begin{bmatrix}\hat{c}\\ \hat{d}\end{bmatrix} +$$
$$+ f(t) - M(t)D^{-}\int\limits_a^b N(s)f(s)ds +$$
$$+ \left([K\Psi](t) + M(t)D^{-}\int\limits_a^b N(s)[K\Psi](s)ds\right)B^{-}\mathcal{P}_{Y_D}f_0,$$

де $\hat{c} \in \mathbf{B}_2,\ \hat{d} \in \mathbf{B}_3$ — довільні елементи.

Таким чином, для інтегрального рівняння (1) із керуванням справджується така теорема.

Теорема 2. *Нехай оператори* $D \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_2, \mathbf{B}_2)$ *та* $B \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_3, \mathbf{B}_2)$. *Тоді за виконання умови (9) і лише за неї інтегральне рівняння (1) із керуванням має сім'ю розв'язків*

$$z(t) = \big[M(t)\mathcal{P}_{N(D)}, \big(L^{-}[K\Psi(\cdot)]\big)(t)\mathcal{P}_{N(B)}\big]\begin{bmatrix}\hat{c}\\ \hat{d}\end{bmatrix} +$$

$$+ \big(L^- f\big)(t) + \big(L^-[K\Psi(\cdot)]\big)(t)B^-\mathcal{P}_{Y_D} f_0, \tag{13}$$

де $\hat{c} \in \mathbf{B}_2$ *і* $\hat{d} \in \mathbf{B}_3$ *— довільні сталі,*

$$\big(L^-[K\Psi(\cdot)]\big)(t) = [K\Psi](t) + M(t)D^- \int\limits_a^b N(s)[K\Psi](s)ds.$$

При цьому воно має сім'ю допустимих керувань

$$u(s) = \Psi(s)\mathcal{P}_{N(B)}\hat{d} + \Psi(s)B^-\mathcal{P}_{Y_D} f_0. \tag{14}$$

Зауваження 1. Якщо $\mathcal{P}_{N(L)} = 0$, то операторне рівняння (1) буде n-нормальним [11] $n = \dim\ker L = 0$. У цьому випадку при виконанні умови (9) воно буде мати сім'ю розв'язків

$$z(t) = \big(L_l^{-1}[K\Psi(\cdot)]\big)(t)\mathcal{P}_{N(B)}\hat{d} + \big(L_l^{-1} f\big)(t) + \big(L_l^{-1}[K\Psi(\cdot)]\big)(t)B^-\mathcal{P}_{Y_D} f_0,$$

де $\hat{d} \in \mathbf{B}_3$ — довільний сталий вектор, L_l^{-1} — лівий обернений оператор до оператора L [12]. При цьому допустиме керування буде мати вигляд (14).

Зауваження 2. Якщо $\mathcal{P}_{N(L)} = 0$ та $\mathcal{P}_{N(B)} = 0$, то операторні рівняння (1) та (8) будуть n-нормальними [11] $\dim\ker L = 0$, $\dim\ker B = 0$). У цьому випадку операторне рівняння (1) буде однозначно розв'язним і при виконанні умови (9) мати єдиний розв'язок

$$z(t) = \big(L_l^{-1} f\big)(t) + \big(L_l^{-1}[K\Psi(\cdot)]\big)(t)B_l^{-1}\mathcal{P}_{Y_D} f_0,$$

де L_l^{-1} — лівий обернений оператор до оператора L, а B_l^{-1} — лівий обернений оператор до оператора B [12]. При цьому операторне рівняння (1) буде мати єдине допустиме керування

$$u(t) = \Psi(t)B_l^{-1}\mathcal{P}_{Y_D} f_0.$$

Зауваження 3. Якщо $\mathcal{P}_{N(L)} \neq 0$, а $\mathcal{P}_{Y_B} = 0$, то операторне рівняння (8) буде d-нормальним [11] $d = \dim\ker Y_B = 0$). У цьому випадку умова (9) буде завжди виконуватись, операторне рівняння (1) буде всюди розв'язним і мати сім'ю розв'язків

$$z(t) = \big[M(t)\mathcal{P}_{N(D)}, \big(L^-[K\Psi(\cdot)]\big)(t)\mathcal{P}_{N(B)}\big]\begin{bmatrix}\hat{c}\\ \hat{d}\end{bmatrix} +$$

$$+ \big(L^- f\big)(t) + \big(L^-[K\Psi(\cdot)]\big)(t)B_r^{-1}\mathcal{P}_{Y_D} f_0,$$

де $\hat{c} \in \mathbf{B}_2$, $\hat{d} \in \mathbf{B}_3$ — довільні сталі вектори, B_r^{-1} — правий обернений оператор [12] до оператора B. При цьому допустиме керування буде мати вигляд

$$u(s) = \Psi(s)\mathcal{P}_{N(B)}\hat{d} + \Psi(s)B_r^{-1}\mathcal{P}_{Y_D} f_0.$$

2. Крайові задачі з керуванням для інтегральних рівнянь у банахових просторах. Для скорочення запису позначимо

$$M_1(t) = M(t)\mathcal{P}_{N(D)}, \quad \Psi_1(t) = \big(L^-[K\Psi(\cdot)]\big)(t)\mathcal{P}_{N(B)}.$$

Тоді загальний розв'язок (13) запишемо у вигляді

$$z(t) = [M_1(t), \Psi_1(t)] \begin{bmatrix} \hat{c} \\ \hat{d} \end{bmatrix} + \big(L^- f\big)(t) + \big(L^-[K\Psi(\cdot)]\big)(t) B^- \mathcal{P}_{Y_D} f_0, \tag{15}$$

Підставимо загальний розв'язок (15) інтегрального рівняння (1) і відповідне йому керування (14) у крайову умову (2):

$$[\ell M_1(\cdot), \ell\Psi_1(\cdot)] \begin{bmatrix} \hat{c} \\ \hat{d} \end{bmatrix} + \ell(L^- f)(\cdot) +$$

$$+ \ell\left(L^-[K\Psi(\cdot)]\right)(\cdot) B^- \mathcal{P}_{Y_D} f_0 =$$

$$= \alpha + S\Psi(\cdot)\mathcal{P}_{N(B)}\hat{d} + S\Psi(\cdot) B^- \mathcal{P}_{Y_D} f_0.$$

Після перетворень отримаємо операторне рівняння відносно довільних сталих $\hat{c} \in \mathbf{B}_2$ та $\hat{d} \in \mathbf{B}_3$

$$\big[Q_1, Q_2\big] \begin{bmatrix} \hat{c} \\ \hat{d} \end{bmatrix} = \alpha - \ell(L^- f)(\cdot) - \big[\ell L^-[K\Psi(\cdot)](\cdot) - S\Psi(\cdot)\big] B^- \mathcal{P}_{Y_D} f_0, \tag{16}$$

де

$$Q_1 = \ell M_1(\cdot) \colon \mathbf{B}_2 \to \mathbf{B}, \qquad Q_2 = \ell\Psi_1(\cdot) - S\Psi(\cdot)\mathcal{P}_{N(B)} \colon \mathbf{B}_3 \to \mathbf{B}.$$

Для розв'язання операторного рівняння (16) скористаємося роботою [13].

Нехай операторна матриця $Q = \big[Q_1, Q_2\big]$ узагальнено оборотна. Необхідною й достатньою умовою узагальненої оборотності операторної матриці Q є узагальнена оборотність операторів Q_1 і $\widehat{Q}_2 = \mathcal{P}_{Y_{Q_1}} Q_2$.

Нехай оператори $Q_1 \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_2, \mathbf{B})$ і $\widehat{Q}_2 \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_3, \mathbf{B})$ — узагальнено оборотні. Тоді для них існують обмежені проектори $\mathcal{P}_{N(Q_1)} \colon \mathbf{B}_2 \to N(Q_1)$, $\mathcal{P}_{Y_{Q_1}} \colon \mathbf{B} \to \mathbf{B} \ominus R(Q_1)$ і $\mathcal{P}_{N(\widehat{Q}_2)} \colon \mathbf{B}_3 \to N(\widehat{Q}_2)$ і $\mathcal{P}_{Y_{\widehat{Q}_2}} \colon \mathbf{B} \to \mathbf{B} \ominus R(\widehat{Q}_2)$ [10] та обмежені узагальнено обернені оператори Q_1^-, $\widehat{Q}_2^-$ відповідно [2]. Наслідком узагальненої оборотності операторної матриці Q є нормальна розв'язність операторного рівняння (16). Тоді існують обмежені проектори $\mathcal{P}_{N(Q)} \colon \mathbf{B}_2 \times \mathbf{B}_3 \to N(Q)$, $\mathcal{P}_{Y_Q} \colon \mathbf{B} \to Y_Q$ й обмежений узагальнено обернений оператор $Q^- \colon \mathbf{B} \to \mathbf{B}_2 \times \mathbf{B}_3$ до оператора Q.

Нормально розв'язне операторне рівняння (16) може бути: однозначно розв'язним ($\mathcal{P}_{N(Q)} \equiv 0$), всюди розв'язним ($\mathcal{P}_{Y_Q} \equiv 0$), неоднозначно і не всюди розв'язним ($\mathcal{P}_{N(Q)} \neq 0$, $\mathcal{P}_{Y_Q} \neq 0$) [11].

Розглянемо найбільш загальний випадок, коли рівняння (16) неоднозначно і не всюди розв'язне, тобто $\mathcal{P}_{N(Q)} \neq 0,\ \mathcal{P}_{Y_Q} \neq 0$.

Нормально розв'язне операторне рівняння (16) має розв'язок тоді й лише тоді, коли виконується умова [2]

$$\mathcal{P}_{Y_Q}\left\{\alpha - \ell\big(L^- f\big)(\cdot) - \big[\ell\big(L^-[K\Psi(\cdot)]\big)(\cdot) - S\Psi(\cdot)\big] B^- \mathcal{P}_{Y_D} f_0\right\} = 0,$$

за виконання якої воно має сім'ю розв'язків

$$\begin{bmatrix} \hat{c} \\ \hat{d} \end{bmatrix} = \mathcal{P}_{N(Q)} \begin{bmatrix} \bar{c} \\ \bar{d} \end{bmatrix} + Q^- \left\{\alpha - \ell(L^- f)(\cdot) - \big[\ell\big(L^-[K\Psi(\cdot)]\big)(\cdot) - S\Psi(\cdot)\big] B^- \mathcal{P}_{Y_D} f_0\right\}, \tag{17}$$

де [13, с. 545]

$$\mathcal{P}_{Y_Q} = \mathcal{P}_{Y_{\widehat{Q}_2}} \mathcal{P}_{Y_{Q_1}}, \qquad \mathcal{P}_{N(Q)} = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{N(Q_1)} & -Q_1^- Q_2 \mathcal{P}_{N(\widehat{Q}_2)} \\ 0 & \mathcal{P}_{N(\widehat{Q}_2)} \end{bmatrix}, \tag{18}$$

$$Q^- = \begin{bmatrix} Q_1^- - Q_1^- Q_2 \widehat{Q}_2^- \mathcal{P}_{Y_{Q_1}} \\ \widehat{Q}_2^- \mathcal{P}_{Y_{Q_1}} \end{bmatrix}$$

— узагальнено обернений оператор до оператора Q, $\bar{c} \in \mathbf{B}_2$, $\bar{d} \in \mathbf{B}_3$ — довільні сталі вектори.

Позначивши

$$\widetilde{Q}_1^- = Q_1^- - Q_1^- Q_2 \widehat{Q}_2^- \mathcal{P}_{Y_{Q_1}}, \qquad \widetilde{Q}_2^- = \widehat{Q}_2^- \mathcal{P}_{Y_{Q_1}},$$

розв'язок (17) запишемо у вигляді

$$\begin{bmatrix} \hat{c} \\ \hat{d} \end{bmatrix} = \mathcal{P}_{N(Q)} \begin{bmatrix} \bar{c} \\ \bar{d} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \widetilde{Q}_1^- \\ \widetilde{Q}_2^- \end{bmatrix} \big\{ \alpha - \ell(L^- f)(\cdot) - \big[\ell\big(L^-[K\Psi(\cdot)]\big)(\cdot) - S\Psi(\cdot) \big] B^- \mathcal{P}_{Y_D} f_0 \big\}. \tag{19}$$

Підставивши (19) у (13), отримаємо

$$\begin{aligned} z(t) = [M_1(t), \Psi_1(t)] \Bigg\{ \mathcal{P}_{N(Q)} \begin{bmatrix} \bar{c} \\ \bar{d} \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} \widetilde{Q}_1^- \\ \widetilde{Q}_2^- \end{bmatrix} \big[\alpha - \ell(L^- f)(\cdot) - \big[\ell\big(L^-[K\Psi(\cdot)]\big)(\cdot) - S\Psi(\cdot) \big] B^- \mathcal{P}_{Y_D} f_0 \big] \Bigg\} + \\ + \big(L^- f\big)(t) + \big(L^-[K\Psi(\cdot)]\big)(t) B^- \mathcal{P}_{Y_D} f_0. \end{aligned}$$

Після перетворень запишемо загальний розв'язок крайової задачі (1), (2) з керуванням:

$$\begin{aligned} z(t) = [M_1(t), \Psi_1(t)] \mathcal{P}_{N(Q)} \begin{bmatrix} \bar{c} \\ \bar{d} \end{bmatrix} + \Big(M_1(t) \widetilde{Q}_1^- + \Psi_1(t) \widetilde{Q}_2^- \Big) \alpha + \\ + \big(L^- f\big)(t) - \Big(M_1(t) \widetilde{Q}_1^- + \Psi_1(t) \widetilde{Q}_2^- \Big) \ell(L^- f)(\cdot) + \\ + \Big\{ \big(L^-[K\Psi(\cdot)]\big)(t) - \Big(M_1(t) \widetilde{Q}_1^- + \Psi_1(t) \widetilde{Q}_2^- \Big) \big[\ell\big(L^-[K\Psi(\cdot)]\big)(\cdot) - S\Psi(\cdot) \big] \Big\} B^- \mathcal{P}_{Y_D} f_0. \end{aligned} \tag{20}$$

Враховуючи (18), з рівняння (19), яке набуде вигляду

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{c} \\ \hat{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{N(Q_1)} & -Q_1^- Q_2 \mathcal{P}_{N(\widehat{Q}_2)} \\ 0 & \mathcal{P}_{N(\widehat{Q}_2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{c} \\ \bar{d} \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} \widetilde{Q}_1^- \\ \widetilde{Q}_2^- \end{bmatrix} \big\{ \alpha - \ell(L^- f)(\cdot) - \big[\ell\big(L^-[K\Psi(\cdot)]\big)(\cdot) - S\Psi(\cdot) \big] B^- \mathcal{P}_{Y_D} f_0 \big\}, \end{aligned}$$

знайдемо елемент $\hat{d}$:

$$\hat{d} = \mathcal{P}_{N(\widehat{Q}_2)}\bar{d} + \widetilde{Q}_2^- \left\{\alpha - \ell(L^- f)(\cdot) - \left[\ell\big(L^-[K\Psi(\cdot)]\big)(\cdot) - S\Psi(\cdot)\right]B^-\mathcal{P}_{Y_D} f_0\right\}. \tag{21}$$

Підставивши $\hat{d}$ з (21) у (11), отримаємо сім'ю допустимих керувань для крайової задачі (1), (2):

$$\begin{aligned} u(t) &= \Psi(t)\mathcal{P}_{N(B)}\Big[\mathcal{P}_{N(\widehat{Q}_2)}\bar{d} + \widetilde{Q}_2^-\Big\{\alpha - \ell(L^- f)(\cdot) - \\ &\quad - \left[\ell\big(L^-[K\Psi(\cdot)]\big)(\cdot) - S\Psi(\cdot)\right]B^-\mathcal{P}_{Y_D} f_0\Big\}\Big] + \Psi(t)B^-\mathcal{P}_{Y_D} f_0 = \\ &= \Psi(t)\mathcal{P}_{N(B)}\mathcal{P}_{N(\widehat{Q}_2)}\bar{d} + \Psi(t)\mathcal{P}_{N(B)}\widetilde{Q}_2^-\alpha - \Psi(t)\mathcal{P}_{N(B)}\widetilde{Q}_2^-\ell(L^- f)(\cdot) + \\ &\quad + \Psi(t)\Big\{I_{\mathbf{B}_3} + \mathcal{P}_{N(B)}\widetilde{Q}_2^-\left[\ell\big(L^-[K\Psi(\cdot)]\big)(\cdot) - S\Psi(\cdot)\right]\Big\}B^-\mathcal{P}_{Y_D} f_0, \end{aligned}$$

де $\bar{d} \in \mathbf{B}_3$ — довільний вектор.

Теорема 3. *Нехай лінійні оператори $L \in \mathbf{GI}(\mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1), \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1))$ та $B \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_3, \mathbf{B}_2)$. Тоді, якщо оператори $Q_1 \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_2, \mathbf{B})$ та $\widehat{Q}_2 \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_3, \mathbf{B})$, то крайова задача з керуванням (1), (2) розв'язна для тих і лише тих $f(t) \in \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ і $\alpha \in \mathbf{B}$, які задовольняють систему умов*

$$\mathcal{P}_{Y_B}\mathcal{P}_{Y_D}\int\limits_a^b N(s)f(s)ds = 0,$$

$$\mathcal{P}_{Y_{\widehat{Q}_2}}\mathcal{P}_{Y_{Q_1}}\left\{\alpha - \ell(L^- f)(\cdot) - \left[\ell\big(L^-[K\Psi(\cdot)]\big)(\cdot) - S\Psi(\cdot)\right]B^-\mathcal{P}_{Y_D}\int\limits_a^b N(s)f(s)ds\right\} = 0$$

і при виконанні яких вона має сім'ю розв'язків (20) та сім'ю допустимих керувань

$$\begin{aligned} u(t) &= \Psi(t)\mathcal{P}_{N(B)}\mathcal{P}_{N(\widehat{Q}_2)}\bar{d} + \Psi(t)\mathcal{P}_{N(B)}\widetilde{Q}_2^-\alpha - \Psi(t)\mathcal{P}_{N(B)}\widetilde{Q}_2^-\ell\big(L^- f\big)(\cdot) + \\ &\quad + \Psi(t)\Big\{I_{\mathbf{B}_3} + \mathcal{P}_{N(B)}\widetilde{Q}_2^-\left[\ell\left(L^-[K\Psi(\cdot)]\right)(\cdot) - S\Psi(\cdot)\right]\Big\}B^-\mathcal{P}_{Y_D} f_0. \end{aligned}$$

3. Інтегральні рівняння з керуванням у евклідових просторах. Проілюструємо запропонований метод дослідження інтегральних рівнянь Фредгольма з виродженим ядром із керуванням і крайових задач із керуванням для них, розглянувши їх у евклідових просторах. У цьому випадку зазначений підхід можна уточнити й конкретизувати.

Розглянемо крайову задачу для інтегрального рівняння Фредгольма з виродженим ядром із керуванням

$$(Lz)(t) := z(t) - M(t)\int\limits_a^b N(s)z(s)ds = f(t) + \int\limits_a^b K(t,s)u(s)ds, \tag{22}$$

$$\ell z(\cdot) = \alpha + Su(\cdot), \tag{23}$$

де $M(t)$ — $(n \times m)$-вимірна матриця, $N(t)$ — $(m \times n)$-вимірна матриця, $K(t,s)$ — $(n \times q)$-вимірна матриця, визначена у квадраті $\mathcal{I} \times \mathcal{I}$, $f(t)$ — $(n \times 1)$-вимірний вектор-стовпчик, $u(t)$ — $(q \times 1)$-вимірний вектор-стовпчик, елементи яких належать простору $\mathbf{L}_2[a,b]$, $\ell\colon \mathbf{L}_2\big([a,b],\mathbf{R}^n\big) \to \mathbf{R}^k$ і $S\colon \mathbf{L}_2\big([a,b],\mathbf{R}^q\big) \to \mathbf{R}^k$ — лінійні обмежені вектор-функціонали, $\alpha \in \mathbf{R}^k$.

Тоді оператор $D = I_m - A$, $A = \int_a^b N(s)M(s)\,ds$ й ортопроектори $P_{N(D)}$, $P_{N(D^*)}$ [2, с. 61] будуть $(m \times m)$-вимірними матрицями.

Оскільки задача розглядається в гільбертових просторах, то для її розв'язку застосуємо теорію псевдообернених операторів [1, 2, 8].

Нехай $\operatorname{rank} D = n_1$. Позначимо через $P_{N_r(D)}$ $(m \times r)$-вимірну матрицю, яка складена з $r = m - n_1$ лінійно незалежних стовпців матриці-ортопроектора $P_{N(D)}$, а через $P_{N_r(D^*)}$ — $(r \times m)$-вимірну матрицю, яка складена з r лінійно незалежних рядків матриці-ортопроектора $P_{N(D^*)}$.

Позначимо [8]

$$X_r(t) = M(t)P_{N_r(D)}, \qquad Y_r(t) = N^*(t)P^*_{N_r(D^*)}$$

повні системи лінійно незалежних вектор-функцій, які складають базиси нуль-просторів $N(L)$ і $N\big(L^*\big)$ інтегральних операторів L і L^* відповідно, та

$$\alpha = \int\limits_a^b X_r^*(t)X_r(t)dt, \qquad \beta = \int\limits_a^b Y_r^*(t)Y_r(t)dt$$

— самоспряжені невироджені $(r \times r)$-вимірні матриці Грама.

Тоді за теоремою 8.3.2 з [2, с. 273] маємо, що за виконання r лінійно незалежних умов

$$P_{N_r(D^*)} \int\limits_a^b N(s)f(s)ds = 0 \tag{24}$$

і лише за них інтегральне рівняння без керування (22) має сім'ю r лінійно незалежних розв'язків

$$z(t) = M(t)\,P_{N_r(D)}\hat{c}_r + \big(L^+f\big)(t),$$

де $\hat{c}_r$ — довільний елемент евклідового простору $\mathbf{R}^r$, L^+ — псевдообернений за Муром – Пенроузом оператор до інтегрального оператора L.

Псевдообернений оператор L^+ має вигляд [2, с. 261]

$$\big(L^+f\big)(t) = f(t) + M(t)\int\limits_a^b \Big[D^+N(s) - \tilde{\alpha}^{(-1)}M^*(s)\Big]f(s)ds +$$

$$+ \Big[M(t)\tilde{\alpha}^{(-1)}\tilde{\beta}^{(-1)} - N^*(t)\tilde{\beta}^{(-1)}\Big]\int\limits_a^b N(s)f(s)ds, \tag{25}$$

де

$$\tilde{\alpha}^{(-1)} = P_{N_r(D)}\alpha^{-1}P^*_{N_r(D)}, \qquad \tilde{\beta}^{(-1)} = P^*_{N_r(D^*)}\beta^{-1}P_{N_r(D^*)}$$

— $(m \times m)$-вимірні матриці.

Для компактності викладу позначимо блокові матриці

$$\widetilde{M}(t) = \Big[M(t), \big(M(t)\tilde{\alpha}^{(-1)}\tilde{\beta}^{(-1)} - N^*(t)\tilde{\beta}^{(-1)}\big)\Big],$$

$$\widetilde{N}(s) = \operatorname{col}\Big[\big(D^+N(s) - \tilde{\alpha}^{(-1)}M^*(s)\big), N(s)\Big].$$

Тоді псевдообернений оператор L^+ (25) запишемо у вигляді

$$\big(L^+f\big)(t) = f(t) + \widetilde{M}(t)\int\limits_a^b \widetilde{N}(s)f(s)ds. \tag{26}$$

З умови (24) маємо, що інтегральне рівняння з керуванням (22) має розв'язок для тих і лише тих правих частин, які задовольняють r лінійно незалежні умови [2]

$$P_{N_r(D^*)}\int\limits_a^b N(s)\left[f(s) + \int\limits_a^b K(s,\tau)u(\tau)d\tau\right]ds = 0. \tag{27}$$

З рівняння (27) отримаємо операторне рівняння відносно керування $u(s)$:

$$\int\limits_a^b \Psi(s)u(s)ds = P_{N_r(D^*)}f_0, \tag{28}$$

де

$$\Psi(s) = P_{N_r(D^*)}\int\limits_a^b N(\tau)K(\tau,s)d\tau$$

— $(r\times q)$-вимірна матриця,

$$f_0 = -\int\limits_a^b N(s)f(s)ds$$

— m-вимірний вектор-стовпець.

Розв'язок рівняння (28) будемо шукати у вигляді

$$u(s) = \Psi^*(s)d_r, \tag{29}$$

де $\Psi^*(s)$ — $(q\times r)$-вимірна матриця, транспонована до матриці $\Psi(s)$, $d_r \in \mathbf{R}^r$ — невідомий вектор, який треба знайти.

Підставивши (29) у (28), отримаємо алгебраїчне рівняння відносно вектора d_r:

$$Bd_r = P_{N_r(D^*)}f_0, \tag{30}$$

де

$$B = \int\limits_a^b \Psi(s)\Psi^*(s)ds$$

— $(r\times r)$-вимірна матриця.

Нехай $\operatorname{rank} B = n_2$. Позначимо через $P_{N_p(B)}$ $(r \times p)$-вимірну матрицю, яка складена з $p = r - n_2$ лінійно незалежних стовпців матриці-ортопроектора $P_{N(B)}$, а через $P_{N_p(B^*)}$ — $(p \times r)$-вимірну матрицю, яка складена з p лінійно незалежних рядків матриці-ортопроектора $P_{N(B^*)}$.

Алгебраїчна система (30) має розв'язок для тих і лише тих векторів f_0, які задовольняють умову

$$P_{N_p(B^*)} P_{N_r(D^*)} f_0 = -P_{N_p(B^*)} P_{N_r(D^*)} \int\limits_a^b N(s) f(s) ds = 0 \tag{31}$$

і при виконанні якої вона має сім'ю лінійно незалежних розв'язків

$$d_r = P_{N_p(B)} \hat{d}_p + B^+ P_{N_r(D^*)} f_0, \tag{32}$$

де $\hat{d}_p$ — довільний елемент евклідового простору $\mathbf{R}^p$, B^+ — псевдообернена за Муром–Пенроузом матриця до матриці B [1, 2].

Оскільки матриці $P_{N_p(B^*)}$, $P_{N_r(D^*)}$ мають повні ранги: $\operatorname{rank} P_{N_p(B^*)} = p$, $\operatorname{rank} P_{N_r(D^*)} = r$ і $p \leq r$, то за нерівністю Сильвестра [14, с. 31]

$$\operatorname{rank} P_{N_p(B^*)} + \operatorname{rank} P_{N_r(D^*)} - r \leq \operatorname{rank} \left(P_{N_p(B^*)} P_{N_r(D^*)} \right) \leq$$
$$\leq \min \left(\operatorname{rank} P_{N_p(B^*)}, \operatorname{rank} P_{N_r(D^*)} \right),$$

або

$$p + r - r \leq \operatorname{rank} \left(P_{N_p(B^*)} P_{N_r(D^*)} \right) \leq p.$$

Звідси $\operatorname{rank} \left(P_{N_p(B^*)} P_{N_r(D^*)} \right) = p$. Таким чином, умова (31) складається з p лінійно незалежних умов.

Після підстановки (32) у (29) отримаємо p-параметричну сім'ю лінійно незалежних керувань

$$u(s) = \Psi^*(s) P_{N_p(B)} \hat{d}_p + \Psi^*(s) B^+ P_{N_r(D^*)} f_0, \tag{33}$$

при яких інтегральне рівняння (22) буде мати сім'ю r лінійно незалежних розв'язків

$$z(t) = M(t)\, P_{N_r(D)} \hat{c}_r + f(t) + \int\limits_a^b K(t,s) u(s) ds +$$
$$+ \widetilde{M}(t) \int\limits_a^b \widetilde{N}(s) \left[f(s) + \int\limits_a^b K(s,\tau) u(\tau) d\tau \right] ds. \tag{34}$$

Підставивши (33) у (34), отримаємо

$$z(t) = M(t) P_{N_r(D)} \hat{c}_r + f(t) + \int\limits_a^b K(t,s) \left[\Psi^*(s) P_{N_p(B)} \hat{d}_p + \Psi^*(s) B^+ P_{N_r(D^*)} f_0 \right] ds +$$

$$+\widetilde{M}(t)\int\limits_a^b \widetilde{N}(s)\left\{f(s)+\int\limits_a^b K(s,\tau)\left[\Psi^*(\tau)P_{N_p(B)}\hat{d}_p+\Psi^*(\tau)B^+P_{N_r(D^*)}f_0\right]d\tau\right\}ds.$$

Позначивши

$$\left[K\Psi^*\right](t)=\int\limits_a^b K(t,s)\Psi^*(s)ds,$$

після перетворень одержимо

$$z(t)=\left[M(t)P_{N_r(D)},\left(\left[K\Psi^*\right](t)+\widetilde{M}(t)\int\limits_a^b \widetilde{N}(s)\left[K\Psi^*\right](s)ds\right)P_{N_p(B)}\right]\begin{bmatrix}\hat{c}_r\\ \hat{d}_p\end{bmatrix}+$$

$$+f(t)+\widetilde{M}(t)\int\limits_a^b \widetilde{N}(s)f(s)ds+$$

$$+\left\{\left[K\Psi^*\right](t)+\widetilde{M}(t)\int\limits_a^b \widetilde{N}(s)\left[K\Psi^*\right](s)ds\right\}B^+P_{N_r(D^*)}f_0.$$

Теорема 4. *Нехай* $\operatorname{rank} D=n_1,\ \operatorname{rank} B=n_2$. *Тоді за виконання* p *лінійно незалежних умов (31) і лише за них інтегральне рівняння з керуванням (22) має сім'ю* $r+p,\ r=m-n_1,$ $p=r-n_2$ *лінійно незалежних розв'язків*

$$z(t)=\left[M(t)P_{N_r(D)},\left(L^+\left[K\Psi^*(\cdot)\right]\right)(t)P_{N_p(B)}\right]\begin{bmatrix}\hat{c}_r\\ \hat{d}_p\end{bmatrix}+$$

$$+\left(L^+f\right)(t)+\left(L^+\left[K\Psi^*(\cdot)\right]\right)(t)B^+P_{N_r(D^*)}f_0, \tag{35}$$

де $\hat{c}_r\in\mathbf{R}^r$ *та* $\hat{d}_p\in\mathbf{R}^p$ *— довільні сталі,* $\left(L^+f\right)(t)$ *— псевдообернений оператор (26),*

$$\left(L^+\left[K\Psi^*(\cdot)\right]\right)(t)=\left[K\Psi^*\right](t)+\widetilde{M}(t)\int\limits_a^b \widetilde{N}(s)\left[K\Psi^*\right](s)ds.$$

При цьому воно має p*-параметричну сім'ю лінійно незалежних допустимих керувань*

$$u(s)=\Psi^*(s)P_{N_p(B)}\hat{d}_p+\Psi^*(s)B^+P_{N_r(D^*)}f_0. \tag{36}$$

4. Крайові задачі з керуванням для інтегральних рівнянь у евклідових просторах. Запишемо загальний розв'язок (35) у вигляді

$$z(t)=\left[X_r(t),\Psi_p^*(t)\right]\begin{bmatrix}\hat{c}_r\\ \hat{d}_p\end{bmatrix}+\left(L^+f\right)(t)+\left(L^+\left[K\Psi^*(\cdot)\right]\right)(t)B^+P_{N_r(D^*)}f_0, \tag{37}$$

де $X_r(t)=M(t)P_{N_r(D)},\ \Psi_p^*(t)=\left(L^+\left[K\Psi^*(\cdot)\right]\right)(t)P_{N_p(B)}$.

Після підстановки загального розв'язку (37) інтегрального рівняння з керуванням (22) і відповідного керування (36) у крайову умову (23) отримаємо алгебраїчне рівняння відносно довільних сталих $\hat{c}_r \in \mathbf{R}^r$ і $\hat{d}_p \in \mathbf{R}^p$

$$\begin{bmatrix} Q_1, & Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{c}_r \\ \hat{d}_p \end{bmatrix} = \alpha - \ell(L^+ f)(\cdot) - \big[\ell L^+ \big[K\Psi^*\big](\cdot) - S\Psi^*(\cdot)\big] B^+ \mathcal{P}_{Y_D} f_0, \tag{38}$$

де $Q_1 = \ell X_r(\cdot)$ — $(k \times r)$-вимірна, $Q_2 = \ell \Psi_p^*(\cdot) - S\Psi^*(\cdot) P_{N_p(B)}$ — $(k \times p)$-вимірна сталі матриці.

Позначимо $Q = \big[Q_1, Q_2\big]$ $(k \times (r+p))$-вимірну матрицю, а через Q^+ — $((r+p) \times k)$-вимірну матрицю, псевдообернену до матриці Q.

Розіб'ємо матрицю Q^+ на блоки

$$Q^+ = \begin{bmatrix} \widetilde{Q}_1^+ \\ \widetilde{Q}_2^+ \end{bmatrix},$$

де $\widetilde{Q}_1^+$ — $(r \times k)$-вимірний блок, а $\widetilde{Q}_2^+$ — $(p \times k)$-вимірний блок.

Використовуючи формули, які пов'язують псевдообернені матриці й ортопроектори [2, с. 93]

$$Q^+ Q = I_{\mathbf{R}^{r+p}} - P_{N(Q)}, \quad QQ^+ = I_{\mathbf{R}^k} - P_{N(Q^*)},$$

обчислимо $P_{N(Q)}$ та $P_{N(Q^*)}$.

Нехай $\operatorname{rank} Q = n_3$. Позначимо через $P_{N_\rho(Q)}$ $((r+p) \times \rho)$-вимірну матрицю, складену з $\rho = r+p-n_3$ лінійно незалежних стовпців $((r+p) \times (r+p))$-вимірної матриці-ортопроектора $P_{N(Q)}$, через $P_{N_\nu(Q^*)}$ — $(\nu \times k)$-вимірну матрицю, складену з $\nu = k - n_3$ лінійно незалежних рядків $(k \times k)$-вимірної матриці-ортопроектора $P_{N(Q^*)}$.

Розіб'ємо матрицю $P_{N_\rho(Q)}$ на блоки

$$P_{N_\rho(Q)} = \begin{bmatrix} \widetilde{P}_{N_\rho(Q_1)} \\ \widetilde{P}_{N_\rho(Q_2)} \end{bmatrix},$$

де $\widetilde{P}_{N_\rho(Q_1)}$ — $(r \times \rho)$-вимірний, а $\widetilde{P}_{N_\rho(Q_2)}$ — $(p \times \rho)$-вимірний блоки.

Тоді рівняння (38) має розв'язки для тих і лише тих α та $f(t)$, які задовольняють ν лінійно незалежних умов [1, 2]

$$P_{N_\nu(Q^*)} \big[\alpha - \ell\big(L^+ f\big)(\cdot) - \big[\ell L^+ \big[K\Psi^*\big](\cdot) - S\Psi^*(\cdot)\big] B^+ P_{N_r(D^*)} f_0\big] = 0,$$

за виконання яких воно має ρ-параметричну сім'ю лінійно незалежних розв'язків

$$\begin{bmatrix} \hat{c}_r \\ \hat{d}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{P}_{N_\rho(Q_1)} \\ \widetilde{P}_{N_\rho(Q_2)} \end{bmatrix} \hat{b}_\rho + \begin{bmatrix} \widetilde{Q}_1^+ \\ \widetilde{Q}_2^+ \end{bmatrix} \big[\alpha - \ell\big(L^+ f\big)(\cdot) - \big[\ell L^+ \big[K\Psi^*\big](\cdot) - S\Psi^*(\cdot)\big] B^+ \mathcal{P}_{Y_D} f_0\big], \tag{39}$$

де $\hat{b}_\rho$ — довільний вектор із евклідового простору R^ρ.

Для отримання загального розв'язку крайової задачі (22), (23) підставимо $\operatorname{col}\big[\hat{c}_r, \hat{d}_p\big]$ з (39) у (37):

$$z(t) = \big[X_r(t), \Psi_p^*(t)\big] \Bigg\{ \begin{bmatrix} \widetilde{P}_{N_\rho(Q_1)} \\ \widetilde{P}_{N_\rho(Q_2)} \end{bmatrix} \hat{b}_\rho +$$

$$+\begin{bmatrix}\widetilde{Q}_1^+\\ \widetilde{Q}_2^+\end{bmatrix}\big[\alpha-\ell\big(L^+f\big)(\cdot)-\big[\ell L^+\big[K\Psi^*\big](\cdot)-S\Psi^*(\cdot)\big]B^+P_{N_r(D^*)}f_0\big]\Bigg\}+$$
$$+\big(L^+f\big)(t)+\big(L^+\big[K\Psi^*(\cdot)\big]\big)(t)B^+P_{N_r(D^*)}f_0. \tag{40}$$

Позначивши

$$M_\rho(t)=\big[X_r(t),\Psi_p^*(t)\big]\begin{bmatrix}\widetilde{P}_{N_\rho(Q_1)}\\ \widetilde{P}_{N_\rho(Q_2)}\end{bmatrix},\qquad \overline{M}(t)=\big[X_r(t),\Psi_p^*(t)\big]\begin{bmatrix}\widetilde{Q}_1^+\\ \widetilde{Q}_2^+\end{bmatrix},$$

після перетворень із (40) отримаємо сім'ю ρ-лінійно незалежних розв'язків крайової задачі з керуванням (22), (23):

$$z(t)=M_\rho(t)\hat{b}_\rho+\overline{M}(t)\alpha+\big(L^+f\big)(t)-\overline{M}(t)\ell\big(L^+f\big)(\cdot)+$$
$$+\big\{\big(L^+\big[K\Psi^*(\cdot)\big]\big)(t)-\overline{M}(t)\left[\ell L^+\big[K\Psi^*\big](\cdot)-S\Psi^*(\cdot)\right]\big\}\,B^+P_{N_r(D^*)}f_0. \tag{41}$$

Для знаходження керування, при якому розв'язок (41) крайової задачі (22), (23) існує, знайдемо $\hat{d}_p$ з рівняння (39):

$$\hat{d}_p=\widetilde{P}_{N_\rho(Q_2)}\hat{b}_\rho+\widetilde{Q}_2^+\big[\alpha-\ell\big(L^+f\big)(\cdot)\,\big(\ell L^+\big[K\Psi^*\big](\cdot)-S\Psi^*(\cdot)\big)B^+P_{N_r(D^*)}f_0\big]. \tag{42}$$

Підставивши $\hat{d}_p$ з (42) у (33), отримаємо сім'ю ρ лінійно незалежних керувань

$$u(t)=\Psi^*(t)P_{N_p(B)}\widetilde{P}_{N_\rho(Q_2)}\hat{b}_\rho+$$
$$+\Psi^*(t)\Bigg\{I_r+P_{N_p(B)}\widetilde{Q}_2^+\Big[\alpha-\ell\big(L^+f\big)(\cdot)-$$
$$-\ell L^+\big[K\Psi^*\big](\cdot)+S\Psi^*(\cdot)\Big]\Bigg\}B^+P_{N_r(D^*)}f_0, \tag{43}$$

де I_r — $(r\times r)$-вимірна одинична матриця.

Таким чином, для крайової задачі (22), (23) справджується така теорема.

Теорема 5. *Нехай* $\operatorname{rank}D=n_1,\ \operatorname{rank}B=n_2,\ \operatorname{rank}Q=n_3$. *Тоді за виконання системи* $p+\nu$ *лінійно незалежних умов*

$$P_{N_p(B^*)}P_{N_r(D^*)}\int\limits_a^b N(s)f(s)ds=0,$$

$$P_{N_\nu(Q^*)}\left[\alpha-\ell(L^+f)(\cdot)-\big[\ell L^+\left[K\Psi^*\right](\cdot)-S\Psi^*(\cdot)\big]B^+P_{N_r(D^*)}f_0\right]=0$$

і лише за них крайова задача з керуванням (22), (23) має сім'ю $\rho,\ \rho=r+p-n_3$ *лінійно незалежних розв'язків (41).*

При цьому вона має ρ*-параметричну сім'ю лінійно незалежних допустимих керувань (43).*

Література

1. A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko, *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. Second edition*, Inverse and Ill-posed Problems Series, **59**, De Gruyter, Berlin (2016).
2. А. А. Бойчук, В. Ф. Журавлев, А. М. Самойленко, *Нормально разрешимые краевые задачи*, Наук. думка, Киев (2019).
3. Н. О. Козлова, В. А. Ферук, *Інтегральні рівняння Фредгольма з керуванням*, Буковин. мат. журн., **4**, № 1-2, 82 – 86 (2016).
4. Ю. К. Ландо, *Об управляемых интегро-дифференциальных операторах*, Дифференц. уравнения, **9**, № 12, 2227 – 2230 (1973).
5. І. А. Бондар, *Умови керування для не завжди розв'язних інтегро-диференціальних рівнянь з виродженим ядром та крайових задач для них*, Буковин. мат. журн., **4**, № 1-2, 13 – 17 (2016).
6. Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн, *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве*, Наука, Москва (1970).
7. V. P. Zhuravl'ov, *Generalized inversion of Fredholm integral operators with degenerate kernels in Banach spaces*, J. Math. Sci., **212**, № 3, 275 – 289 (2016).
8. В. П. Журавльов, *Псевдообернений оператор до інтегрального оператора Фредгольма з виродженим ядром у гільбертовому просторі*, Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Сер. математика і інформатика, вип. 25, № 1, 57 – 69 (2014).
9. И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник, *Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов*, Штиинца, Кишинев (1973).
10. М. М. Попов, *Доповнювальні простори і деякі задачі сучасної геометрії просторів Банаха*, Математика сьогодні'07, Вип. 13, 78 – 116 (2007).
11. С. Г. Крейн, *Линейные уравнения в банаховом пространстве*, Наука, Москва (1971).
12. В. Ф. Журавлев, *Критерий разрешимости и представление решений линейных n (d)-нормальных операторных уравнений в банаховом пространстве*, Укр. мат. журн., **62**, № 2, 167 – 182 (2010).
13. В. Ф. Журавлев, Н. П. Фомин, П. Н. Забродский, *Условия разрешимости и представление решений уравнений с операторными матрицами*, Укр. мат. журн., **71**, № 4, 471 – 485 (2019).
14. В. В. Воеводин, Ю. А. Кузнецов, *Матрицы и вычисления*, Наука, Москва (1984).

Одержано 21.02.21,
після доопрацювання — 27.02.21