УДК 517.9

СИСТЕМИ ЗІ ЗБУРЕННЯМИ ПАРАМЕТРІВ

М. О. Перестюк

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка,
просп. акад. Глушкова, 4е, Київ, 03127, Україна,
e-mail: pmo@mechmat.univ.kiev.ua

В. Ю. Слюсарчук

Нац. ун-т вод. госп-ва та природокористування,
вул. Соборна, 11, Рівне, 33000, Україна,
e-mail: V.E.Slyusarchuk@gmail.com

The Banach space of functions bounded on the numerical axis with a countable set of discontinuity points of the first kind and differential equations in this space are considered. We investigate a class of differential equations with continuous and impulse perturbations of the coefficients of equations. For these equations, we establish conditions for the existence of bounded solutions.

Розглянуто банаховий простір обмежених на числовій осі функцій зі зліченною множиною точок розриву першого роду і диференціальні рівняння в цьому просторі. Досліджено клас диференціальних рівнянь із неперервними та імпульсними збуреннями коефіцієнтів рівнянь. Для таких рівнянь встановлено умови існування обмежених розв’язків.

Вступ. У даній статті досліджено один клас диференціальних рівнянь, коефіцієнти яких зазнають неперервних або імпульсних збурень, що залежать від розв’язків і їхніх похідних. Завдяки таким збуренням коефіцієнтів ці рівняння є не розв’язними відносно похідної й нелінійними, що ускладнює дослідження рівнянь і, зокрема, встановлення для них умов існування обмежених розв’язків. Тому важливим є створення методів дослідження впливу збурень коефіцієнтів рівнянь на властивості їхніх розв’язків.

1. Основні позначення. Нехай $\mathbb{Z}$ — множина всіх цілих чисел, $\mathbb{R}$ — множина всіх дійсних чисел, E — дійсний або комплексний банаховий простір із нормою $\|\cdot\|_E$ і $L(X,Y)$ — банаховий простір лінійних неперервних операторів $L\colon X \to Y$ (X і Y — банахові простори) з нормою

$$\|L\|_{L(X,Y)} = \sup_{\|x\|_X=1} \|Lx\|_Y, \tag{1}$$

$B_X(a,r)$ — замкнена куля в просторі X з центром у точці a і радіусом $r>0$, що визначається рівністю

$$B_X(a,r) = \{x \in X\colon \|x-a\|_X \le r\},$$

$S^0(\mathbb{R},X)$ — лінійний простір усіх визначених і неперервних на $\mathbb{R}$ функцій $x=x(t)$ зі значеннями в X, $C^0(\mathbb{R},X)$ — банаховий простір усіх обмежених на $\mathbb{R}$ функцій $x \in$ $\in S^0(\mathbb{R},X)$ з нормою

$$\|x\|_{C^0(\mathbb{R},X)} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|x(t)\|_X$$

і $C^1(\mathbb{R}, X)$ — банаховий простір усіх неперервно диференційовних і обмежених на $\mathbb{R}$ функцій $x \in S^0(\mathbb{R}, X)$ з нормою

$$\|x\|_{C^1(\mathbb{R},X)} = \max\left\{\|x\|_{C^0(\mathbb{R},X)}, \left\|\frac{dx}{dt}\right\|_{C^0(\mathbb{R},X)}\right\}.$$

Розглянемо довільну строго зростаючу двосторонню послідовність

$$\tau = \langle \ldots, t_{-2}, t_{-1}, (t_0), t_1, t_2, \ldots \rangle \tag{2}$$

дійсних чисел $t_n,\ n \in \mathbb{Z}$, де елемент у круглих дужках відповідає індексу 0, для якої

$$\lim_{n\to-\infty} t_n = -\infty \tag{3}$$

і

$$\lim_{n\to+\infty} t_n = +\infty, \tag{4}$$

та множину

$$\mathcal{T} = \{t_n : n \in \mathbb{Z}\}. \tag{5}$$

Позначимо через $S^0(\mathbb{R}, \mathcal{T}, X)$ лінійний простір усіх визначених на $\mathbb{R}$ і обмежених на скінченних проміжках функцій $x = x(t)$ зі значеннями в X, кожна з яких неперервна на $\mathbb{R} \setminus \mathcal{T}$, неперервна праворуч у всіх точках множини $\mathcal{T}$ і має скінченну границю ліворуч $\lim_{t\to s-0} x(t)$ для кожної точки $s \in \mathcal{T}$, а через $C^0(\mathbb{R}, \mathcal{T}, X)$ — банаховий простір усіх обмежених на $\mathbb{R}$ функцій $x \in S^0(\mathbb{R}, \mathcal{T}, X)$ з нормою

$$\|x\|_{C^0(\mathbb{R},\mathcal{T},X)} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|x(t)\|_X.$$

Аналогічно через $C^1(\mathbb{R}, \mathcal{T}, X)$ позначимо множину всіх функцій $x \in C^0(\mathbb{R}, \mathcal{T}, X)$, кожна з яких неперервно диференційовна на $\mathbb{R}\setminus\mathcal{T}$, диференційовна праворуч у всіх точках множини $\mathcal{T}$ з неперервною і обмеженою на $\mathbb{R}$ правою похідною $d_+x(t)/dt$ і має скінченну границю ліворуч $\lim_{t\to s-0} d_x(t)/dt$ для кожної точки $s \in \mathcal{T}$. Ця множина є банаховим простором із нормою

$$\|x\|_{C^1(\mathbb{R},\mathcal{T},X)} = \max\left\{\sup_{t\in\mathbb{R}} \|x(t)\|_X,\ \sup_{t\in\mathbb{R}} \left\|\frac{d_+x(t)}{dt}\right\|_X\right\}. \tag{6}$$

Також розглянемо підпростір $C_0^1(\mathbb{R}, \mathcal{T}, X)$ простору $C^1(\mathbb{R}, \mathcal{T}, X)$, елементами якого є функції $x \in C^0(\mathbb{R}, X) \cap C^1(\mathbb{R}, \mathcal{T}, X)$, з нормою

$$\|x\|_{C_0^1(\mathbb{R},\mathcal{T},X)} = \|x\|_{C^1(\mathbb{R},\mathcal{T},X)}.$$

Зазначимо, що для кожної точки $t_n \in \mathcal{T}$ для похідної $dx(t)/dt$ функції $x \in C_0^1(\mathbb{R}, \mathcal{T}, X)$ може виконуватися співвідношення

$$\frac{dx(t_n)}{dt} \neq \frac{dx(t_n - 0)}{dt}, \tag{7}$$

тобто функція $dx(t)/dt$ в точці t_n може мати розрив першого роду.

2. Основні об'єкти досліджень. Розглянемо довільні векторну й операторну функції $f = f(t)$ і $A = A(t)$, що є елементами просторів $C^0(\mathbb{R}, \mathcal{T}, E)$ і $C^0(\mathbb{R}, \mathcal{T}, L(E, E))$ відповідно. Цим функціям відповідають диференціальні рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} + A(t)x(t) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{8}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} + A(t)x(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{9}$$

і лінійний неперервний диференціальний оператор $\mathscr{L} : C_0^1(\mathbb{R}, \mathcal{T}, E) \to C^0(\mathbb{R}, \mathcal{T}, E)$, що визначається співвідношенням

$$(\mathscr{L}y)(t) = \frac{dy(t)}{dt} + A(t)y(t), \quad y \in C_0^1(\mathbb{R}, \mathcal{T}, E), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{10}$$

де при $t \in \mathcal{T}$ під $dx(t)/dt$ і $dy(t)/dt$ розуміємо праві похідні $d_+x(t)/dt$ і $d_+y(t)/dt$ відповідно.

Також розглянемо обмежені неперервні відображення $B : \mathbb{R} \times E \times E \to L(E, E)$ і $C : \mathbb{R} \times E \to L(E, E)$.

Нагадаємо, що відображення B і C є обмеженими, якщо вони переводять обмежені множини просторів $\mathbb{R} \times E \times E$ і $\mathbb{R} \times E$ в обмежені множини простору $L(E, E)$, і з неперервності цих відображень у випадку нескінченновимірного простору E не випливає їхньої обмеженості (див. [1, с. 41]). У випадку скінченновимірного простору E неперервні відображення B і C є обмеженими згідно з теоремою Вейєрштрасса [2].

Від обмежених неперервних відображень B і C додатково вимагатимемо, щоб для довільних обмежених множин $M_1, M_2 \subset E$ виконувалися співвідношення

$$\sup_{(t,x,y) \in \mathbb{R} \times M_1 \times M_2} \|B(t, x, y)\|_{L(E,E)} < +\infty \tag{11}$$

і

$$\sup_{(t,x) \in \mathbb{R} \times M_1} \|C(t, x)\|_{L(E,E)} < +\infty. \tag{12}$$

Далі розглянемо складніші, ніж рівняння (8), диференціальні рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} + \left(A(t) + B\left(t, x(t), \frac{dx(t)}{dt}\right)\right) x(t) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{13}$$

і

$$\frac{dx(t)}{dt} + \big(A(t) + C(t, x(t))\big)x(t) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{14}$$

Рівняння (13) відрізняється від (8) збуренням операторного коефіцієнта, залежним від часової змінної, розв'язку та його похідної, а рівняння (14) — збуренням операторного коефіцієнта, залежним від часової змінної та розв'язку.

Згідно з тим, що в рівнянні (13) $x \in C^0(\mathbb{R}, E)$ і $dx/dt \in C^0(\mathbb{R}, \mathcal{T}, E)$, маємо

$$B\left(t_n, x(t_n), \frac{dx(t_n)}{dt}\right) = B\left(t_n, x(t_n), \frac{dx(t_n - 0)}{dt} + \left(\frac{dx(t_n)}{dt} - \frac{dx(t_n - 0)}{dt}\right)\right)$$

для кожного $t_n \in \mathcal{T}$. Тому в цій рівності завдяки (7) різниця $dx(t_n)/dt - dx(t_n - 0)/dt$ може не дорівнювати 0 і збурення операторного коефіцієнта рівняння (13) є імпульсним.

Зазначимо, що теорію диференціальних рівнянь із імпульсною дією викладено в монографіях [3, 4], в яких, зокрема, досліджено диференціальні рівняння, розв'язки яких за деяким законом у певні моменти часу зазнають залежних від них імпульсних збурень.

Також розглянемо диференціальні оператори $\mathscr{L}_B : C_0^1(\mathbb{R}, \mathcal{T}, E) \to C^0(\mathbb{R}, \mathcal{T}, E)$ і $\mathscr{L}_C : C_0^1(\mathbb{R}, \mathcal{T}, E) \to C^0(\mathbb{R}, \mathcal{T}, E)$, що визначається співвідношеннями

$$(\mathscr{L}_B y)(t) = (\mathscr{L} y)(t) + (\mathscr{B} y)(t), \quad y \in C_0^1(\mathbb{R}, \mathcal{T}, E), \quad t \in \mathbb{R},$$

$$(\mathscr{L}_C y)(t) = (\mathscr{L} y)(t) + (\mathscr{C} y)(t), \quad y \in C_0^1(\mathbb{R}, \mathcal{T}, E), \quad t \in \mathbb{R},$$

і

$$(\mathscr{B} y)(t) = B\left(t, y(t), \frac{dy(t)}{dt}\right) y(t), \quad y \in C_0^1(\mathbb{R}, \mathcal{T}, E), \quad t \in \mathbb{R},$$

$$(\mathscr{C} y)(t) = C(t, y(t)) y(t), \quad y \in C_0^1(\mathbb{R}, \mathcal{T}, E), \quad t \in \mathbb{R},$$

де, як і в (10), при $t \in \mathcal{T}$ під $dy(t)/dt$ розуміємо праву похідну $d_+ y(t)/dt$. Очевидно, що в загальному випадку ці оператори є нелінійними.

Зазначимо, що завдяки неперервності функцій $B(t, x, y)$ і $C(t, x)$ на $\mathbb{R} \times E \times E$ і $\mathbb{R} \times \times E$ відповідно та виконанню співвідношень (11) і (12) справджуються включення $\mathscr{B} y \in \in C^0(\mathbb{R}, \mathcal{T}, E)$ і $\mathscr{C} y \in C^0(\mathbb{R}, \mathcal{T}, E)$ для кожного $y \in C_0^1(\mathbb{R}, \mathcal{T}, E)$. Якщо додатково для кожного $r > 0$ вимагати, щоб функції $B(t, x, y)$ і $C(t, x)$ були рівномірно неперервними на множинах $\mathbb{R} \times B_E(0, r) \times B_E(0, r)$ і $\mathbb{R} \times B_E(0, r)$ відповідно, то оператори $\mathscr{B} : C_0^1(\mathbb{R}, \mathcal{T}, E) \to \to C^0(\mathbb{R}, \mathcal{T}, E)$ і $\mathscr{C} : C_0^1(\mathbb{R}, \mathcal{T}, E) \to C^0(\mathbb{R}, \mathcal{T}, E)$ будуть обмеженими й неперервними.

За допомогою операторів $\mathscr{L}$, $\mathscr{B}$ і $\mathscr{C}$ диференціальні рівняння (13) і (14) можна подати у вигляді

$$(\mathscr{L} x)(t) + (\mathscr{B} x)(t) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{15}$$

і

$$(\mathscr{L} x)(t) + (\mathscr{C} x)(t) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{16}$$

У припущенні, що оператор $\mathscr{L} : C_0^1(\mathbb{R}, \mathcal{T}, E) \to C^0(\mathbb{R}, \mathcal{T}, E)$ має обернений неперервний оператор $\mathscr{L}^{-1}$, встановимо умови, при виконанні яких диференціальне рівняння (13) і (14) мають у просторі $C_0^1(\mathbb{R}, \mathcal{T}, E)$ розв'язки.

Встановлення цих умов у загальному випадку є складною задачею. Тому обмежимося розглядом випадку ліпшіцевого оператора $\mathscr{B}$, коли $\dim E = \infty$, і неліпшіцевого оператора $\mathscr{C}$, коли $\dim E < +\infty$.

3. Умови обмеженості розв'язків рівняння (15) з ліпшіцевим оператором $\mathscr{B}$. Будемо вважати, що для кожного числа $r > 0$ існує таке залежне від r число $l(r) \geq 0$, що для неперервного відображення $B : \mathbb{R} \times E \times E \to L(E, E)$ виконується співвідношення

$$\|B(t, u_1, v_1) - B(t, u_2, v_2)\|_{L(E,E)} \leq l(r) \max\{\|u_1 - u_2\|_E, \|v_1 - v_2\|_E\} \tag{17}$$

для всіх

$$t \in \mathbb{R} \quad \text{і} \quad u_1, u_2, v_1, v_2 \in B_E(0, r),$$

тобто операторна функція $B(t,u,v)$ по змінних u і v є ліпшіцевою на кулі $B_E(0,r)$ зі сталою Ліпшіца $l(r)$.

Завдяки виконанню такої вимоги та нерівності трикутника ця функція є неперервною на $\mathbb{R}\times E\times E$, причому

$$\sup_{t\in\mathbb{R};u,v\in B_E(0,r)}\|B(t,u,v)\|_{L(E,E)}\leq\sup_{t\in\mathbb{R}}\|B(t,0,0)\|_{L(E,E)}+l(r)r \tag{18}$$

для кожного $r>0$.

Тоді для деякого числа $L(r)$ для всіх $t\in\mathbb{R}$ і $u_1,u_2,v_1,v_2\in B_E(0,r)$ для відображення B також буде виконуватися більш складне співвідношення

$$\|B(t,u_1,v_1)u_1-B(t,u_2,v_2)u_2\|_E\leq L(r)\max\{\|u_1-u_2\|_E,\|v_1-v_2\|_E\}. \tag{19}$$

У цьому співвідношенні число $L(r)$ вибрано найменшим.

Величини $l(r)$ і $L(r)$ пов'язані між собою співвідношенням

$$L(r)\leq\sup_{t\in\mathbb{R}}\|B(t,0,0)\|_{L(E,E)}+2l(r)r. \tag{20}$$

Справді, для всіх $t\in\mathbb{R}$ і $u_1,u_2,v_1,v_2\in B_E(0,r)$ з урахуванням (17) і (18) отримуємо

$$\begin{aligned}
&\|B(t,u_1,v_1)u_1-B(t,u_2,v_2)u_2\|_E=\\
&\quad=\|(B(t,u_1,v_1)u_1-B(t,u_1,v_1)u_2)+(B(t,u_1,v_1)u_2-B(t,u_2,v_2)u_2)\|_E\leq\\
&\quad\leq\|B(t,u_1,v_1)u_1-B(t,u_1,v_1)u_2\|_E+\|B(t,u_1,v_1)u_2-B(t,u_2,v_2)u_2\|_E=\\
&\quad=\|B(t,u_1,v_1)(u_1-u_2)\|_E+\|(B(t,u_1,v_1)-B(t,u_2,v_2))u_2\|_E\leq\\
&\quad\leq\|B(t,u_1,v_1)\|_{L(E,E)}\|u_1-u_2\|_E+\|B(t,u_1,v_1)-B(t,u_2,v_2)\|_{L(E,E)}\|u_2\|_E\leq\\
&\quad\leq\left(\sup_{t\in\mathbb{R}}\|B(t,0,0)\|_{L(E,E)}+l(r)r\right)\|u_1-u_2\|_E+l(r)\max\{\|u_1-u_2\|_E,\|v_1-v_2\|_E\}r\leq\\
&\quad\leq\left(\sup_{t\in\mathbb{R}}\|B(t,0,0)\|_{L(E,E)}+2l(r)r\right)\max\{\|u_1-u_2\|_E,\|v_1-v_2\|_E\}.
\end{aligned}$$

Тому згідно з (19), (20) і означенням оператора $\mathscr{B}$ для кожного $r>0$ справджується співвідношення

$$\|\mathscr{B}y_1-\mathscr{B}y_2\|_{C^0(\mathbb{R},\mathcal{T},E)}\leq L(r)\|y_1-y_2\|_{C_0^1(\mathbb{R},\mathcal{T},E)},\quad y_1,y_2\in B_{C_0^1(\mathbb{R},\mathcal{T},E)}(0,r),$$

і більш інформативне співвідношення

$$\|\mathscr{B}y_1-\mathscr{B}y_2\|_{C^0(\mathbb{R},\mathcal{T},E)}\leq\left(\sup_{t\in\mathbb{R}}\|B(t,0,0)\|_{L(E,E)}+2l(r)r\right)\|y_1-y_2\|_{C_0^1(\mathbb{R},\mathcal{T},E)} \tag{21}$$

для всіх $y_1,y_2\in B_{C_0^1(\mathbb{R},\mathcal{T},E)}(0,r)$.

Отже, справджується таке важливе для подальшого викладу твердження.

Лема 1. *Нехай виконується співвідношення (11). Якщо для кожних чисел* $t \in \mathbb{R}$ *і* $r > 0$ *операторна функція* $B(t, u, v)$ *є ліпшицевою по змінних* u *і* v *на замкненій кулі* $B_E(0, r)$ *зі сталою Ліпшиця* $l(r)$ *(тобто виконується співвідношення (17)), то оператор* $\mathscr{B}\colon C_0^1(\mathbb{R}, \mathcal{T}, E) \to C^0(\mathbb{R}, \mathcal{T}, E)$ *є ліпшицевим на замкненій кулі* $B_{C_0^1(\mathbb{R},\mathcal{T},E)}(0, r)$ *зі сталою Ліпшиця*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|B(t, 0, 0)\|_{L(E,E)} + 2l(r)r$$

(тобто виконується співвідношення (21)).

Ця лема дає можливість встановити таке твердження.

Теорема 1. *Нехай:*

1) оператор $\mathscr{L}\colon C_0^1(\mathbb{R}, \mathcal{T}, E) \to C^0(\mathbb{R}, \mathcal{T}, E)$ *має обернений неперервний оператор* $\mathscr{L}^{-1}$;

2) для неперервного відображення $B\colon \mathbb{R} \times E \times E \to L(E, E)$ *виконується співвідношення (17) для деякого* $r = r_* > 0$;

3) виконується співвідношення

$$\left\|\mathscr{L}^{-1}\right\|_{L(C^0(\mathbb{R},\mathcal{T},E),C_0^1(\mathbb{R},\mathcal{T},E))} \left(\sup_{t\in\mathbb{R}} \|B(t, 0, 0)\|_{L(E,E)} + 2l(r_*)r_*\right) < 1. \tag{22}$$

Тоді для кожної функції $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathcal{T}, E)$, *для якої*

$$\left\|\mathscr{L}^{-1}f\right\|_{C_0^1(\mathbb{R},\mathcal{T},E)} + \\ + \left\|\mathscr{L}^{-1}\right\|_{L(C^0(\mathbb{R},\mathcal{T},E),C_0^1(\mathbb{R},\mathcal{T},E))} \left(\sup_{t\in\mathbb{R}} \|B(t, 0, 0)\|_{L(E,E)} + 2l(r_*)r_*\right) r_* \le r_*, \tag{23}$$

диференціальне рівняння (13) має єдиний розв'язок $x_* \in B_{C_0^1(\mathbb{R},\mathcal{T},E)}(0, r_*)$.

Доведення. Зафіксуємо довільну функцію $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathcal{T}, E)$, для якої виконується співвідношення (23). Множина таких функцій є не порожньою на підставі (22).

Завдяки першій умові теореми задача про існування розв'язків рівняння (13) рівносильна задачі про існування розв'язків рівняння

$$x = \mathscr{L}^{-1}(f - \mathscr{B}x).$$

Це рівняння подамо у вигляді

$$x = \mathcal{D}x, \tag{24}$$

де $\mathcal{D}$ — діючий у просторі $C_0^1(\mathbb{R}, \mathcal{T}, E)$ оператор, що визначається співвідношенням

$$\mathcal{D}x = \mathscr{L}^{-1}(f - \mathscr{B}x), \quad x \in C_0^1(\mathbb{R}, \mathcal{T}, E). \tag{25}$$

У випадку виконання умов теореми до рівняння (24) застосовний принцип стискаючих відображень [5, с. 64 – 65].

Справді, використаємо замкнену кулю $B_{C_0^1(\mathbb{R},\mathcal{T},E)}(0, r_*)$ як метричний простір із метрикою ρ, що визначається співвідношенням

$$\rho(x, y) = \|x - y\|_{C_0^1(\mathbb{R},\mathcal{T},E)}, \quad x, y \in C_0^1(\mathbb{R}, \mathcal{T}, E).$$

Такий метричний простір є повним завдяки замкненості кулі $B_{C_0^1(\mathbb{R},\mathcal{T},E)}(0, r_*)$.

Куля $B_{C_0^1(\mathbb{R},\mathcal{T},E)}(0,r_*)$ є інваріантною по відношенню до оператора $\mathcal{D}$, тобто

$$\mathcal{D}B_{C_0^1(\mathbb{R},\mathcal{T},E)}(0,r_*) \subset B_{C_0^1(\mathbb{R},\mathcal{T},E)}(0,r_*). \tag{26}$$

Дійсно, на підставі співвідношень (23), (25), означення оператора $\mathscr{B}$, леми 1 і умови 2) теореми 1 для кожної функції $u \in B_{C_0^1(\mathbb{R},\mathcal{T},E)}(0,r_*)$ справджуються співвідношення

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{D}u\|_{C_0^1(\mathbb{R},\mathcal{T},E)} &= \left\|\mathscr{L}^{-1}(f-\mathscr{B}u)\right\|_{C_0^1(\mathbb{R},\mathcal{T},E)} = \left\|\mathscr{L}^{-1}\left(f-(\mathscr{B}u-\mathscr{B}0)\right)\right\|_{C_0^1(\mathbb{R},\mathcal{T},E)} = \\
&= \left\|\mathscr{L}^{-1}f-\mathscr{L}^{-1}(\mathscr{B}u-\mathscr{B}0)\right\|_{C_0^1(\mathbb{R},\mathcal{T},E)} \le \\
&\le \left\|\mathscr{L}^{-1}f\right\|_{C_0^1(\mathbb{R},\mathcal{T},E)} + \left\|\mathscr{L}^{-1}(\mathscr{B}u-\mathscr{B}0)\right\|_{C_0^1(\mathbb{R},\mathcal{T},E)} \le \\
&\le \left\|\mathscr{L}^{-1}f\right\|_{C_0^1(\mathbb{R},\mathcal{T},E)} + \left\|\mathscr{L}^{-1}\right\|_{L(C^0(\mathbb{R},\mathcal{T},E),C_0^1(\mathbb{R},\mathcal{T},E))} \|\mathscr{B}u-\mathscr{B}0\|_{C_0^1(\mathbb{R},\mathcal{T},E)} \le \\
&\le \left\|\mathscr{L}^{-1}f\right\|_{C_0^1(\mathbb{R},\mathcal{T},E)} + \left\|\mathscr{L}^{-1}\right\|_{L(C^0(\mathbb{R},\mathcal{T},E),C_0^1(\mathbb{R},\mathcal{T},E))} \times \\
&\quad \times \left(\sup_{t\in\mathbb{R}} \|B(t,0,0)\|_{L(E,E)} + 2l(r_*)r_*\right) \|u\|_{C_0^1(\mathbb{R},\mathcal{T},E)} \le \\
&\le \left\|\mathscr{L}^{-1}f\right\|_{C_0^1(\mathbb{R},\mathcal{T},E)} + \left\|\mathscr{L}^{-1}\right\|_{L\left(C^0(\mathbb{R},\mathcal{T},E),C_0^1(\mathbb{R},\mathcal{T},E)\right)} \times \\
&\quad \times \left(\sup_{t\in\mathbb{R}} \|B(t,0,0)\|_{L(E,E)} + 2l(r_*)r_*\right) r_* \le r_*,
\end{aligned}$$

з яких випливає (26).

Оператор $\mathcal{D}$ є стискаючим на кулі $B_{C_0^1(\mathbb{R},\mathcal{T},E)}(0,r_*)$. Дійсно, завдяки умові 3) теореми 1 і лемі 1 для довільних $u_1,u_2 \in B_{C_0^1(\mathbb{R},\mathcal{T},E)}(0,r_*)$ правильними є такі співвідношення

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{D}u_1-\mathcal{D}u_2\|_{C_0^1(\mathbb{R},\mathcal{T},E)} &= \left\|\mathscr{L}^{-1}(f-\mathscr{B}u_1)-\mathscr{L}^{-1}(f-\mathscr{B}u_2)\right\|_{C_0^1(\mathbb{R},\mathcal{T},E)} = \\
&= \left\|\mathscr{L}^{-1}\mathscr{B}u_1-\mathscr{L}^{-1}\mathscr{B}u_2\right\|_{C_0^1(\mathbb{R},\mathcal{T},E)} = \left\|\mathscr{L}^{-1}(\mathscr{B}u_1-\mathscr{B}u_2)\right\|_{C_0^1(\mathbb{R},\mathcal{T},E)} \le \\
&\le \left\|\mathscr{L}^{-1}\right\|_{L\left(C^0(\mathbb{R},\mathcal{T},E),C_0^1(\mathbb{R},\mathcal{T},E)\right)} \|\mathscr{B}u_1-\mathscr{B}u_2\|_{C^0(\mathbb{R},\mathcal{T},E)} \le \\
&\le \left\|\mathscr{L}^{-1}\right\|_{L(C^0(\mathbb{R},\mathcal{T},E),C_0^1(\mathbb{R},\mathcal{T},E))} \left(\sup_{t\in\mathbb{R}} \|B(t,0,0)\|_{L(E,E)} + 2l(r_*)r_*\right) \times \\
&\quad \times \|u_1-u_2\|_{C_0^1(\mathbb{R},\mathcal{T},E)} = k\|u_1-u_2\|_{C_0^1(\mathbb{R},\mathcal{T},E)},
\end{aligned}$$

де

$$k = \left\|\mathscr{L}^{-1}\right\|_{L\left(C^0(\mathbb{R},\mathcal{T},E),C_0^1(\mathbb{R},\mathcal{T},E)\right)} \left(\sup_{t\in\mathbb{R}} \|B(t,0,0)\|_{L(E,E)} + 2l(r_*)r_*\right) < 1.$$

Отже, принцип стискаючих відображень застосовний до рівняння (24). Тому це рівняння та рівносильне йому рівняння (13) мають єдиний розв'язок $x_* \in B_{C_0^1(\mathbb{R},\mathcal{T},E)}(0,r_*)$.

Теорему 1 доведено.

Зауваження 1. Якщо для відображення B стала Ліпшіца $l(r)$ є нульовою для кожного $r > 0,$ то справджується тотожність

$$B(t, x, y) \equiv B(t, 0, 0).$$

У цьому випадку диференціальне рівняння (13) є лінійним і має вигляд

$$\frac{dx(t)}{dt} + (A(t) + B(t, 0, 0))x(t) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{27}$$

Згідно з цим зауваженням окремим випадком теореми 1 є таке твердження.

Теорема 2. *Якщо оператор* $\mathscr{L} : C_0^1(\mathbb{R}, \mathcal{T}, E) \to C^0(\mathbb{R}, \mathcal{T}, E)$ *має обернений неперервний оператор* $\mathscr{L}^{-1}$ *і*

$$\left\|\mathscr{L}^{-1}\right\|_{L\left(C^0(\mathbb{R},\mathcal{T},E), C_0^1(\mathbb{R},\mathcal{T},E)\right)} \sup_{t\in\mathbb{R}} \|B(t, 0, 0)\|_{L(E,E)} < 1,$$

то диференціальне рівняння (27) для кожної функції $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathcal{T}, E)$ *має єдиний розв'язок* $x \in C_0^1(\mathbb{R}, \mathcal{T}, E)$.

У теоремах 1 і 2 одна з основних вимог до оператора $\mathscr{L}$ — це вимога про його оборотність.

Правильною є така теорема.

Теорема 3. *Оператор* $\mathscr{L} : C_0^1(\mathbb{R}, \mathcal{T}, E) \to C^0(\mathbb{R}, \mathcal{T}, E)$ *має обернений неперервний оператор* $\mathscr{L}^{-1}$ *тоді й тільки тоді, коли диференціальне рівняння (9) експоненціально дихотомічне.*

Зауваження 2. Обернений оператор $\mathscr{L}^{-1} : C^0(\mathbb{R}, \mathcal{T}, E) \to C_0^1(\mathbb{R}, \mathcal{T}, E)$ можна подати у вигляді

$$\left(\mathscr{L}^{-1} f\right)(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t, \tau) f(\tau)\, d\tau, \quad t \in \mathbb{R}, \quad f \in C^0(\mathbb{R}, \mathcal{T}, E), \tag{28}$$

де $G(t, \tau)$ — неперервна на $\{(t, \tau) \in E \times E : t \neq \tau\}$ функція зі значеннями в $L(E, E)$, яка при $t \neq \tau$ задовольняє диференціальні рівняння

$$\frac{dG(t, \tau)}{dt} = A(t) G(t, \tau) \qquad \text{і} \qquad \frac{dG(t, \tau)}{d\tau} = -G(t, \tau) A(\tau),$$

при $t = \tau$ має розрив, причому

$$G(\tau + 0, \tau) - G(\tau - 0, \tau) = -I \qquad \text{і} \qquad G(t, t + 0) - G(t, t - 0) = I.$$

Для $G(t, \tau)$ при деяких додатних числах M і γ справджується оцінка

$$\|G(t, \tau)\|_{L(E,E)} \le M e^{-\gamma|t-\tau|}, \quad (t, \tau) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad t \neq \tau. \tag{29}$$

Методи обгрунтування тверджень, подібних до теореми 3 й рівності (28) наведено в [6 – 12].

4. Умови періодичності розв'язків рівняння (15) з ліпшіцевим оператором $\mathscr{B}$. Далі будемо вважати, що для послідовності (2) для деяких чисел $i_* \in \mathbb{N}$ і $T_* > 0$ виконується співвідношення

$$\tau_{i+i_*} = \tau_i + T_*, \quad i \in \mathbb{Z}.$$

У цьому випадку множину $\mathcal{T}$, визначену рівністю (5), будемо позначати через $\mathcal{P}$ і замість просторів $C^0(\mathbb{R}, \mathcal{T}, E)$ і $C_0^1(\mathbb{R}, \mathcal{T}, E)$ будемо використовувати простори $C^0(\mathbb{R}, \mathcal{P}, E)$ і $C_0^1(\mathbb{R}, \mathcal{P}, E)$ з нормами $\|\cdot\|_{C^0(\mathbb{R},\mathcal{T},E)}$ і $\|\cdot\|_{C_0^1(\mathbb{R},\mathcal{T},E)}$ відповідно.

Очевидно, що послідовність

$$\big\langle \ldots, \Delta t_{-2}, \Delta t_{-1}, (\Delta t_0), \Delta t_1, \Delta t_2, \ldots \big\rangle,$$

де $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$, є періодичною і для кожного числа $m \in \mathbb{N}$

$$\tau_{i+mi_*} = \tau_i + mT_*, \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Правильним є таке твердження.

Теорема 4. *Нехай:*

1) справджуються тотожності

$$A(t+T_*) \equiv A(t) \qquad i \qquad B(t+T_*, x, y) \equiv B(t, x, y), \quad x, y \in E;$$

2) виконуються умови теореми 1.

Тоді для кожної T-періодичної функції $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathcal{P}, E)$, де $T \in \{mT_* : m \in \mathbb{N}\}$, для якої виконується співвідношення (23) при $\mathcal{T} = \mathcal{P}$, диференціальне рівняння (13) має єдиний T-періодичний розв'язок $x_* \in B_{C_0^1(\mathbb{R},\mathcal{P},E)}(0, r_*)$.

Доведення. Використаємо оператор зсуву S_T, що діє в просторах $C^0(\mathbb{R}, \mathcal{P}, E)$ і $C_0^1(\mathbb{R}, \mathcal{P}, E)$, і визначається формулою

$$(S_T x)(t) = x(t+T), \quad t \in \mathbb{R},$$

а також рівняння

$$(\mathscr{L} + \mathscr{B})x = f, \tag{30}$$

що рівносильне рівнянню (13).

Зазначимо, що оператор S_T має обернений неперервний оператор S_{-T}.

Згідно з вимогами до f у рівнянні (30) $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathcal{P}, E)$ і

$$S_T f = f. \tag{31}$$

Завдяки умові 2) теореми 4 та твердженню теореми 1 рівняння (30) має єдиний розв'язок $x_* \in B_{C_0^1(\mathbb{R},\mathcal{P},E)}(0, r_*)$ і

$$(\mathscr{L} + \mathscr{B})x_* = f. \tag{32}$$

Застосуємо до обох частин рівності (32) оператор S_T. З урахуванням (31) і оборотності цього оператора отримаємо рівності

$$S_T\,(\mathscr{L} + \mathscr{B})\,x_* = S_T(\mathscr{L} + \mathscr{B})S_{-T}S_T x_* = (S_T(\mathscr{L} + \mathscr{B})S_{-T})\,S_T x_* = S_T f = f. \tag{33}$$

Завдяки умові 1) теореми 4 оператор $(\mathscr{L}+\mathscr{B})\colon C_0^1(\mathbb{R},\mathcal{P},E)\to C^0(\mathbb{R},\mathcal{P},E)$ є T-періодичним, тобто

$$S_T(\mathscr{L}+\mathscr{B})S_{-T}=\mathscr{L}+\mathscr{B}.$$

Тому на підставі (33)

$$(\mathscr{L}+\mathscr{B})S_Tx_*=f.$$

Отже, рівняння (30) з розв'язком x_* має також розв'язок S_Tx_*. Згідно з єдиністю розв'язку цього рівняння (за теоремою 1)

$$S_Tx_*=x_*. \tag{34}$$

Рівність (34) означає, що розв'язок x_* рівняння (30) є T-періодичним і за теоремою 1 $x_*\in B_{C_0^1(\mathbb{R},\mathcal{P},E)}(0,r_*)$.

Теорему 4 доведено.

5. Умови обмеженості розв'язків рівняння (16) з неліпшіцевим оператором $\mathscr{C}$. При дослідженні рівняння (16) будемо використовувати локально збіжні послідовності елементів простору $C^0(\mathbb{R},\mathcal{T},E)$.

За аналогією з [13] говоритимемо, що послідовність функцій $y_n\in C^0(\mathbb{R},\mathcal{T},E),\ n\geq 1$, *локально збігається* до функції $y\in C^0(\mathbb{R},\mathcal{T},E)$ і позначатимемо

$$y_n\xrightarrow{\text{loc},\ C^0(\mathbb{R},\mathcal{T},E)}y\quad\text{при}\quad n\to\infty,$$

якщо ця послідовність обмежена і для кожного $m>0$

$$\lim_{n\to+\infty}\max_{|t|\leq m}\|y_n(t)-y(t)\|_E=0.$$

Поняття локально збіжної послідовності введено в [14, 15].

Важливим для подальшого є таке твердження.

Лема 2. *Нехай банаховий простір E скінченновимірний. Для кожної послідовності функцій $x_n\in B_{C^0(\mathbb{R},\mathcal{T},E)}(0,r_1)\cap B_{C_0^1(\mathbb{R},\mathcal{T},E)}(0,r_2),\ n\geq 1$, де r_1 і r_2 — довільні додатні числа, існують такі строго зростаюча послідовність натуральних чисел $n_k,\ k\geq 1$, і функція $x\in B_{C^0(\mathbb{R},\mathcal{T},E)}(0,r_1)$, що*

$$x_{n_k}\xrightarrow{\text{loc},\ C^0(\mathbb{R},\mathcal{T},E)}x\quad\textit{при}\quad k\to\infty.$$

Доведення цієї леми з використанням теореми Арцела [5, с. 95–97] повторює доведення аналогічного твердження з [13] у випадку просторів $C^0(\mathbb{R},E)$ і $C^1(\mathbb{R},E)$. Тому ми його не наводимо.

Продовжимо підготовчу роботу для дослідження рівняння (16).

Виконання для обмеженого неперервного відображення $C\colon\mathbb{R}\times E\to L(E,E)$ співвідношення (12) дає змогу ввести в розгляд функцію $\mu\colon[0,+\infty)\to[0,+\infty)$:

$$\mu(r)=\sup_{t\in\mathbb{R},\|x\|_E\leq r}\|C(t,x)\|_{L(E,E)}.$$

Завдяки цій функції для кожного числа $r>0$

$$\|\mathscr{C}x\|_{C^0(\mathbb{R},\mathcal{T},E)}\leq\mu(r)r\quad\text{для всіх}\quad x\in B_{C^0(\mathbb{R},\mathcal{T},E)}(0,r).$$

Правильним є таке твердження.

Теорема 5. *Нехай:*

1) банаховий простір E скінченновимірний;

2) для деякого числа $r_* > 0$ функція $C(t,x)$ рівномірно неперервна на $\mathbb{R} \times B_E(0,r_*)$;

3) оператор $\mathscr{L} : C_0^1(\mathbb{R},\mathcal{T},E) \to C^0(\mathbb{R},\mathcal{T},E)$ має обернений неперервний оператор $\mathscr{L}^{-1}$;

4) справджується нерівність

$$\left\|\mathscr{L}^{-1}\right\|_{L(C^0(\mathbb{R},\mathcal{T},E),C_0^1(\mathbb{R},\mathcal{T},E))}\, \mu(r_*)r_* < 1.$$

Тоді для кожної функції $f \in C^0(\mathbb{R},\mathcal{T},E)$, для якої виконується співвідношення

$$\left\|\mathscr{L}^{-1}f\right\|_{C_0^1(\mathbb{R},\mathcal{T},E)} + \|\mathscr{L}^{-1}\|_{L\left(C^0(\mathbb{R},\mathcal{T},E),C_0^1(\mathbb{R},\mathcal{T},E)\right)}\, \mu(r_*)r_* < 1, \tag{35}$$

диференціальне рівняння (14) має хоча б один розв'язок $x_* \in B_{C_0^1(\mathbb{R},\mathcal{T},E)}(0,r_*)$.

Доведення. Завдяки умові 3) теореми рівняння (14) і (16) рівносильні рівнянню

$$x = \mathscr{L}^{-1}(f - \mathscr{C}x).$$

Це рівняння подамо у вигляді

$$x = \mathscr{E}x, \tag{36}$$

де $\mathscr{E}$ — визначений у просторі $C^0(\mathbb{R},\mathcal{T},E)$ оператор зі значеннями в $C_0^1(\mathbb{R},\mathcal{T},E)$, що визначається співвідношенням

$$\mathscr{E}x = \mathscr{L}^{-1}f - \mathscr{L}^{-1}\mathscr{C}x, \quad x \in C^0(\mathbb{R},\mathcal{T},E). \tag{37}$$

Цей оператор є неперервним завдяки неперервності оператора $\mathscr{C}$ на підставі умов 1) – 3) теореми 5.

Замкнені кулі $B_{C_0^1(\mathbb{R},\mathcal{T},E)}(0,r_*)$ і $B_{C^0(\mathbb{R},\mathcal{T},E)}(0,r_*)$ є інваріантними по відношенню до відображення $\mathscr{E}$ згідно з (35), причому

$$\mathscr{E}B_{C_0^1(\mathbb{R},\mathcal{T},E)}(0,r_*) \subset \mathscr{E}B_{C^0(\mathbb{R},\mathcal{T},E)}(0,r_*) \subset B_{C_0^1(\mathbb{R},\mathcal{T},E)}(0,r_*) \subset B_{C^0(\mathbb{R},\mathcal{T},E)}(0,r_*), \tag{38}$$

і розв'язки рівняння (14) збігаються з нерухомими точками цього відображення.

Теорема Шаудера про нерухому точку [16, с. 36 – 37] не застосовна до відображення $\mathscr{E} : B_{C^0(\mathbb{R},\mathcal{T},E)}(0,r_*) \to B_{C^0(\mathbb{R},\mathcal{T},E)}(0,r_*)$, оскільки відображення $\mathscr{E}$ може не бути цілком неперервним.

Розглянемо діючі в просторі $C_0^1(\mathbb{R},\mathcal{T},E)$ оператори $\mathscr{Q}_n$ і $\mathscr{E}_n$, $n \geq 1$, що визначаються співвідношеннями

$$(\mathscr{Q}_n y)(t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad t < t_{-n} - n, \\ \cos^2 \dfrac{\pi(t - t_{-n})}{2n}\, y(t), & \text{якщо} \quad t_{-n} - n \leq t < t_{-n}, \\ y(t), & \text{якщо} \quad t_{-n} \leq t \leq t_n, \\ \cos^2 \dfrac{\pi(t - t_n)}{2n}\, y(t), & \text{якщо} \quad t_n < t \leq t_n + n, \\ 0, & \text{якщо} \quad t_n + n < t, \end{cases} \tag{39}$$

і

$$\mathscr{E}_n y = \mathscr{Q}_n \left(\mathscr{L}^{-1} f - \mathscr{L}^{-1} \mathscr{C} y \right), \tag{40}$$

де $y \in C_0^1(\mathbb{R}, \mathcal{T}, E)$.

Враховуючи (1) і (6), легко показати, що

$$\|\mathscr{Q}_n\|_{L(C_0^1(\mathbb{R},\mathcal{T},E), C_0^1(\mathbb{R},\mathcal{T},E))} < \frac{\pi}{n} + 1, \quad n \geq 1. \tag{41}$$

Завдяки умові 4) теореми та співвідношенням (35) і (41) існує таке натуральне число n_0, що

$$\left(\frac{\pi}{n} + 1\right) \left(\left\|\mathscr{L}^{-1} f\right\|_{C_0^1(\mathbb{R},\mathcal{T},E)} + \left\|\mathscr{L}^{-1}\right\|_{L(C^0(\mathbb{R},\mathcal{T},E), C_0^1(\mathbb{R},\mathcal{T},E))} \mu(r_*) r_* \right) < 1, \quad n \geq n_0.$$

Це співвідношення означає, що замкнена куля $B_{C^0(\mathbb{R},\mathcal{T},E)}(0, r_*)$ інваріантна по відношенню до операторів $\mathscr{E}_n,\ n \geq n_0$, причому для кожного $n \geq n_0$ справджуються співвідношення, аналогічні (38):

$$\mathscr{E}_n B_{C_0^1(\mathbb{R},\mathcal{T},E)}(0, r_*) \subset \mathscr{E}_n B_{C^0(\mathbb{R},\mathcal{T},E)}(0, r_*) \subset B_{C_0^1(\mathbb{R},\mathcal{T},E)}(0, r_*) \subset B_{C^0(\mathbb{R},\mathcal{T},E)}(0, r_*). \tag{42}$$

Використаємо носій $\operatorname{supp} \mathscr{E}_n y$ функції $\mathscr{E}_n y$, тобто замикання множини $\{t : (\mathscr{E}_n y)(t) \neq 0\}$ в $\mathbb{R}$.

Згідно з (39) і (40)

$$\operatorname{supp} \mathscr{E}_n y \subset [t_{-n} - n, t_n + n], \quad n \geq n_0,$$

для всіх $y \in B_{C^0(\mathbb{R},\mathcal{T},E)}(0, r_*)$. Тому на підставі (42) і скінченної розмірності простору E для кожного $n \geq n_0$ елементи множини $\mathscr{E}_n B_{C^0(\mathbb{R},\mathcal{T},E)}(0, r_*)$ як функції з простору $C^0(\mathbb{R}, \mathcal{T}, E)$ є рівномірно обмеженими й рівностепенево неперервними [5, с. 95]. Тоді за теоремою Арцела [5, с. 95 – 97] множина $\mathscr{E}_n B_{C^0(\mathbb{R},\mathcal{T},E)}(0, r_*)$ є передкомпактною в $B_{C^0(\mathbb{R},\mathcal{T},E)}(0, r_*)$.

Це означає, що до рівнянь

$$x = \mathscr{E}_n x, \quad n \geq n_0, \tag{43}$$

застосовна теорема Шаудера. За цією теоремою множини розв'язків рівнянь (43) є непорожніми. Нехай $x_n \in B_{C^0(\mathbb{R},\mathcal{T},E)}(0, r_*)$ — один із розв'язків відповідного рівняння (43), тобто

$$x_n = \mathscr{E}_n x_n, \quad n \geq n_0. \tag{44}$$

Згідно з (42)

$$\|x_n\|_{C_0^1(\mathbb{R},\mathcal{T},E)} \leq r_* \qquad \text{і} \qquad \|x_n\|_{C^0(\mathbb{R},\mathcal{T},E)} \leq r_*, \quad n \geq n_0.$$

Тому за лемою 2 існують такі строго зростаюча послідовність натуральних чисел $n_k,\ k \geq 1$, і функція $x_* \in B_{C^0(\mathbb{R},\mathcal{T},E)}(0, r_*)$, що

$$x_{n_k} \xrightarrow{\text{loc},\ C^0(\mathbb{R},\mathcal{T},E)} x_* \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{45}$$

Покажемо, що x_* — розв'язок рівняння (36).

Зафіксуємо довільне $t \in \mathbb{R}$. Згідно з (44) правильними є співвідношення

$$\begin{aligned}
x_*(t) - (\mathscr{E}x_*)(t) &= (x_*(t) - (\mathscr{E}x_*)(t)) - (x_{n_k}(t) - (\mathscr{E}_{n_k}x_{n_k})(t)) = \\
&= \big(x_*(t) - x_{n_k}(t)\big) - ((\mathscr{E}x_*)(t) - (\mathscr{E}_{n_k}x_{n_k})(t)) = \\
&= \big(x_*(t) - x_{n_k}(t)\big) - ((\mathscr{E}x_*)(t) - (\mathscr{E}x_{n_k})(t)) + ((\mathscr{E}x_{n_k})(t) - (\mathscr{E}_{n_k}x_{n_k})(t)) = \\
&= \big(x_*(t) - x_{n_k}(t)\big) - ((\mathscr{E}x_*)(t) - (\mathscr{E}x_{n_k})(t)) + ((\mathscr{E}x_{n_k})(t) - (\mathscr{Q}_{n_k}\mathscr{E}x_{n_k})(t)) = \\
&= \big(x_*(t) - x_{n_k}(t)\big) - ((\mathscr{E}x_*)(t) - (\mathscr{E}x_{n_k})(t)) + ((\mathcal{I} - \mathscr{Q}_{n_k})\mathscr{E}x_{n_k})(t), \qquad (46)
\end{aligned}$$

де $\mathcal{I}$ — одиничний оператор простору $L\big(C^0(\mathbb{R}, \mathcal{T}, E), C^0(\mathbb{R}, \mathcal{T}, E)\big)$.

Завдяки (45)

$$\lim_{k \to +\infty} \big(x_*(t) - x_{n_k}(t)\big) = 0. \qquad (47)$$

Завдяки (37), (45), умові 2) теореми, на підставі якої $\mathscr{C}x_{n_k} \xrightarrow{\text{loc},\, C^0(\mathbb{R},\mathcal{T},E)} \mathscr{C}x_*$ при $k \to \infty$, та рівності (28) й оцінці (29)

$$\lim_{k \to +\infty} \big((\mathscr{E}x_*)(t) - (\mathscr{E}x_{n_k})(t)\big) = 0. \qquad (48)$$

Завдяки означенню оператора $\mathscr{Q}_n$ (див. (39)) та співвідношенням (3) і (4)

$$\lim_{k \to +\infty} \big((\mathcal{I} - \mathscr{Q}_{n_k})\mathscr{E}x_{n_k}\big)(t) = 0. \qquad (49)$$

Із (46) – (49) та завдяки довільності вибору $t \in \mathbb{R}$ випливає, що

$$x_* = \mathscr{E}x_*, \qquad (50)$$

тобто x_* — розв'язок рівняння (36).

Зауважимо, що згідно з (38) $x_* \in B_{C_0^1(\mathbb{R},\mathcal{T},E)}(0, r_*)$. Застосовуючи до обох частин рівності (50) оператор $\mathscr{L}$, отримаємо

$$\mathscr{L}x_* + \mathscr{C}x_* = f.$$

Отже, x_* — розв'язок рівняння (14).

Теорему 5 доведено.

6. Приклади систем зі збуреннями параметрів. Збурення параметрів динамічних систем можуть суттєво впливати на їхні властивості (див. [17 – 19]). Класичними прикладами таких збурень систем є параметричні підсилювачі в радіотехніці, що ілюструють процес збудження і підсилення коливань [19, 20], та коливання маятника відносно станів рівноваги у випадку коливань точки підвісу маятника у вертикальному напрямку [21 – 25].

Приділимо увагу цим прикладам.

Приклад 1. Найбільш дослідженим і найпростішим у радіотехніці є коливальний контур із індуктивністю L, опором R і змінною ємністю C, зображений на рис. 1.

Якщо ємність C змінюється за законом

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_0}\,(1 + \varepsilon \cos \Omega t), \qquad (51)$$

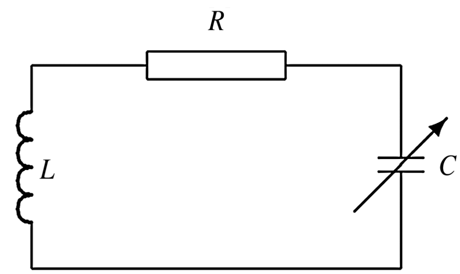

Рис. 1. Коливальний контур зі змінною ємністю.

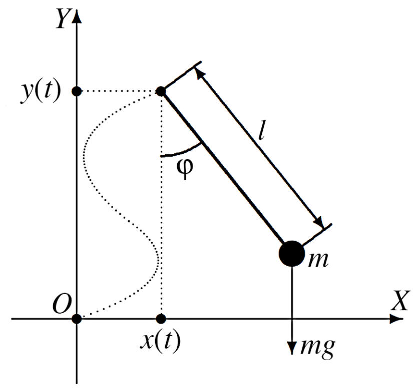

Рис. 2. Математичний маятник із рухомою точкою підвісу.

де ε і Ω — коефіцієнт модуляції і частота модуляції ємності відповідно, то величина заряду q конденсатора залежно від часу описується диференціальним рівнянням

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\alpha\,\frac{dq}{dt} + \omega_0^2\,(1 + \varepsilon\cos\Omega t)q = 0, \tag{52}$$

де $\alpha = R/2L$ і $\omega_0^2 = 1/LC_0$ (див. [19], розд. 8).

Рівняння (52) аналогічне рівнянню (9). Ускладнення розглянутого коливального контура діючою електрорушійною силою й додатковими елементами, при яких на закон про залежність ємності C від часу (51) впливатиме також q, приводить до складнішого, ніж (52), рівняння, аналогічного (13) або (14).

При $\Omega \cong 2\omega_0$ в розглянутому коливальному контурі при певних обмеженнях на R спостерігається явище параметричного збудження й підсилення коливань із малими внутрішніми шумами [19], чого немає при $\varepsilon = 0$.

Приклад 2. Розглянемо рух математичного маятника, що складається з матеріальної точки маси m і невагомого нерозтяжного стрижня довжини l, на якому підвішено цю точку, в полі сили тяжіння у відсутності сил тертя й опору з точкою підвісу $(x(t), y(t))$ [25] (див. рис. 2).

Згідно з [25] рух маятника описується диференціальним рівнянням

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\varphi + \frac{1}{l}\left(\frac{d^2x(t)}{dt^2}\cos\varphi + \frac{d^2y(t)}{dt^2}\sin\varphi\right) = 0, \tag{53}$$

де φ — кут між стрижнем і віссю, напрямним вектором якої є вектор сили тяжіння, і g — прискорення вільного падіння.

У випадку нерухомої точки підвісу (тоді $x(t) \equiv y(t) \equiv 0$) верхній $\varphi = \pi$ і нижній $\varphi = 0$ вертикальні стани маятника є нестійкими та стійкими станами рівноваги відповідно.

У цьому випадку рівняння (53) має вигляд

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0.$$

М. М. Боголюбов [21] і П. Л. Капиця [22] показали, що верхній стан рівноваги маятника при коливаннях точки підвісу вздовж вертикалі за законом

$$x(t) = 0, \quad y(t) = a\sin\omega t \tag{54}$$

є стійким при

$$\omega > \frac{\sqrt{2gl}}{a}. \tag{55}$$

Зазначимо, що a в (54) і (55) може бути як завгодно малим і в цьому випадку коливання маятника описуються рівнянням

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g - a\omega^2\sin\omega t}{l}\,\sin\varphi = 0.$$

Наведені приклади показують, що навіть малі збурення параметрів динамічних систем можуть суттєво змінювати поведінку цих систем. Тому природною є увага до впливу збурень коефіцієнтів рівнянь на властивості розв'язків цих рівнянь.

Література

1. Ю. В. Трубников, А. И. Перов, *Дифференциальные уравнения с монотонными нелинейностями*, Наука и техника, Минск (1986).
2. Г. М. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления, Т. 1*, в 3-х т., Наука, Москва (1966).
3. А. М. Самойленко, Н. А. Перестюк, *Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием*, Вища шк., Киев (1987).
4. A. M. Samoilenko, N. A. Perestyuk, *Impulsive differential equations*, World Sci., Singapore (1995).
5. А. М. Колмогоров, С. В. Фомін, *Елементи теорії функцій і функціонального аналізу*, Вища шк., Київ (1974).
6. Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн, *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве*, Наука, Москва (1970).
7. М. А. Красносельский, В. Ш. Бурд, Ю. С. Колесов, *Нелинейные почти периодические колебания*, Наука, Москва (1970).
8. Х. Л. Массера, Х. Х. Шеффер, *Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства*, Мир, Москва (1970).
9. Ф. Хартман, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Мир, Москва (1970).
10. Ю. А. Митропольский, А. М. Самойленко, В. Л. Кулик, *Исследования дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова*, Наук. думка, Киев (1990).
11. В. Г. Курбатов, *О дихотомии решений уравнений нейтрального типа*, Исследования по устойчивости и теории колебаний, Межвуз. темат. сб., Ярослав. ун-т, 156 – 166 (1977).
12. В. Е. Слюсарчук, *Об экспоненциальной дихотомии решений дискретных систем*, Укр. мат. журн., **35**, № 1, 109 – 115 (1983).

13. В. Е. Слюсарчук, *Необходимые и достаточные условия существования и единственности ограниченных решений нелинейных дифференциальных уравнений*, Нелін. коливання, **2**, № 4, 523 – 539 (1999).
14. В. Е. Слюсарчук, *Метод c-непрерывных операторов в теории импульсных систем*, Тезисы докладов Всесоюзной конференции по теории и приложениям функционально-дифференциальных уравнений, Душанбе, 102 – 103 (1987).
15. В. Е. Слюсарчук, *Слабо нелинейные возмущения нормально разрешимых функционально-дифференциальных и дискретных уравнений*, Укр. мат. журн., **39**, № 5, 660 – 662 (1987).
16. Л. Ниренберг, *Лекции по нелинейному функциональному анализу*, Мир, Москва (1977).
17. И. И. Блехман, *Вибрационная механика*, Наука, Москва (1994).
18. В. Н. Яковлев, В. В. Воскресенский, А. А. Генис и др.; под ред. В. Н. Яковлева, *Справочник по импульсной технике*, Техника, Киев (1970).
19. М. И. Конторович, *Нелинейные колебания в радиотехнике*, Сов. радио, Москва (1973).
20. М. В. Капранов, В. Н. Кулешов, Г. М. Уткин, *Теория колебаний в радиотехнике*, Наука, Москва (1984).
21. Н. Н. Боголюбов, *Теория возмущений в нелинейной механике*, Сб. тр. Ин-та строит. механики АН УССР, **14**, 9 – 34 (1950).
22. П. Л. Капица, *Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса*, Журн. эксперим. и теор. физики, **51**, № 54, 588 – 597 (1951).
23. П. Л. Капица, *Маятник с вибрирующим подвесом*, Успехи физ. наук, **44**, № 1, 7 – 20 (1951).
24. А. М. Самойленко, *Н. Н. Боголюбов и нелинейная механика*, Успехи мат. наук, **49**, № 5, 103 – 146 (1994).
25. В. Н. Неспиртный, В. А. Королев, *Стабилизация колебаний маятника с подвижной точкой подвеса относительно наклонного равновесия*, Механика тверд. тела, **25**, вып. 39, 195 – 206 (2009).

Одержано 04.06.21