УДК 517.929+517.958

ДИНАМІКА ДВОХ ТІЛ ІЗ ТРАЄКТОРІЯМИ НА НЕРУХОМІЙ ПРЯМІЙ З УРАХУВАННЯМ СКІНЧЕННОСТІ ШВИДКОСТІ ГРАВІТАЦІЇ

В. Ю. Слюсарчук

Нац. ун-т вод. госп-ва та природокористування
вул. Соборна, 11, Рівне, 33000, Україна
e-mail: V.E.Slyusarchuk@gmail.com

We investigate the dynamics of two bodies that move along a fixed straight line taking into account the finiteness of the speed of gravity. It is shown that the escape velocity is greater than the corresponding velocity of the classical celestial mechanics. Estimates for this velocity are given.

Досліджено динаміку двох тіл, рух яких здійснюється на нерухомій прямій, з урахуванням скінченності швидкості гравітації. Показано, що друга космічна швидкість більша відповідної швидкості класичної небесної механіки. Наведено оцінки для цієї швидкості.

1. Вступ. У цій статті встановлено незбіжність других космічних швидкостей небесних механіки Ньютона і механіки зі скінченною швидкістю гравітації. Цю властивість космічних швидкостей отримано у випадку двох небесних тіл із використанням системи диференціальних рівнянь із запізнювальним аргументом та функціональних рівнянь, що разом із виконанням деяких додаткових умов для розв'язків рівнянь є математичною моделлю руху досліджуваних тіл. Ці рівняння краще описують динаміку тіл, ніж звичайні диференціальні рівняння в механіці Ньютона. Підставою для використання таких рівнянь є скінченність швидкості гравітації. Ця властивість гравітації узгоджується як із загальною теорією Ейнштейна, в якій для швидкості гравітації c_g приймається, що $c_g = c$, де c — швидкість світла [1, 2], так і з експериментальними дослідженнями, пов'язаними з оцінками швидкості передачі впливу гравітаційного поля на результати вимірювань [3] та вимірюваннями швидкості гравітації, пов'язаними з фіксацією гравітаційних хвиль від далеких зіркових джерел одночасно зі світловим сигналом [4].

Рух двох тіл із урахуванням скінченності швидкості гравітації досліджувався автором у [5], де показано некеплеровість і нестійкість руху тіл.

У цій статті наведено дослідження руху двох тіл, розміщених на нерухомій прямій, коли $c_g = c$. Показано, що в цьому випадку друга космічна швидкість більша другої космічної швидкості класичної небесної механіки й отримано оцінки для їхньої різниці. Незбіжність космічних швидкостей спричинена запізненням гравітаційного поля.

Для подальшого потрібні закон всесвітнього тяжіння зі скінченною швидкістю гравітації та другий закон Ньютона, за допомогою яких отримуються рівняння руху тіл, у яких суттєве значення має запізнення гравітаційного поля, і досліджується динаміка тіл.

2. Закон всесвітнього тяжіння зі скінченною швидкістю гравітації. Розглянемо дві точки M_1 і M_2 з масами m_1 і m_2 відповідно. Згідно із законом всесвітнього тяжіння та другим законом Ньютона ці точки здійснюють рух у просторі. Рух точок будемо розглядати по відношенню до інерціальної прямокутної системи координат $x,\ y,\ z$ з початком координат у деякій точці O. Вважатимемо, що на кожну точку діє тільки сила тяжіння, породжена іншою точкою. Положення точок M_1 і M_2 в момент часу t визначається їхніми радіусами-векторами $\vec{r}_1(t)$ і $\vec{r}_2(t)$.

Для дослідження руху точок M_1 і M_2 потрібно знати сили, з якими кожна з цих точок притягую іншу.

Якби швидкість гравітації була нескінченною, як у класичній небесній механіці, то на підставі закону всесвітнього тяжіння в момент часу t точка M_2 притягувала б точку M_1 із силою

$$\vec{F}_{2,1,\infty}(t) = \frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t)|^3}\ (\vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t))\,,$$

де G — гравітаційна стала і $\left|\vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t)\right|$ — евклідова довжина вектора $\vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t)$. Напрямок цієї сили збігається з напрямком вектора $\vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t)$.

Аналогічно в момент часу t точка M_1 притягувала б точку M_2 з силою

$$\vec{F}_{1,2,\infty}(t) = \frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)|^3}\ (\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)).$$

Оскільки згідно з п. 1 швидкість гравітації є скінченною, то дія однієї точки на іншу здійснюється з урахуванням запізнювання гравітаційного поля. Тому на точку M_1 діє інша сила

$$\vec{F}_{2,1,c}(t) = \frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_2(t-\tau_{2,1}(t)) - \vec{r}_1(t)|^2}\ (\vec{r}_2(t-\tau_{2,1}(t)) - \vec{r}_1(t))\,, \tag{1}$$

де запізнення гравітації $\tau_{2,1}(t)$ в (1) задовольняє співвідношення

$$c\tau_{2,1}(t) = |\vec{r}_2(t-\tau_{2,1}(t)) - \vec{r}_1(t)| \tag{2}$$

і c — швидкість гравітації (див. [5, 6]).

Притягувальною точкою для точки M_1 в момент часу t є не точка M_2, а точка, що збігається з кінцем вектора $\vec{r}_2(t-\tau_{2,1}(t))$.

Аналогічно на точку M_2 діє сила

$$\vec{F}_{1,2,c}(t) = \frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_1(t-\tau_{1,2}(t)) - \vec{r}_2(t)|^3}\ (\vec{r}_1(t-\tau_{1,2}(t)) - \vec{r}_2(t))\,, \tag{3}$$

притягувальною точкою для точки M_2 в момент часу t є не точка M_1, а точка, що збігається з кінцем вектора $\vec{r}_1(t-\tau_{1,2}(t))$, і запізнення гравітації $\tau_{1,2}(t)$ в (3) задовольняє співвідношення

$$c\tau_{1,2}(t) = |\vec{r}_1(t-\tau_{1,2}(t)) - \vec{r}_2(t)|. \tag{4}$$

Сили $\vec{F}_{2,1,c}(t)$ і $\vec{F}_{1,2,c}(t)$ можуть відрізнятися за величиною і не бути колінеарними. Згідно з (2) і (4) для кожного моменту часу t

$$\lim_{c\to+\infty} \vec{F}_{i,j,c}(t) = \vec{F}_{i,j,\infty}(t) \qquad \text{і} \qquad \lim_{c\to+\infty} \tau_{i,j}(t) = 0, \quad i \neq j. \tag{5}$$

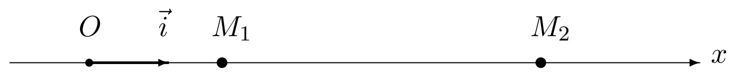

Рис. 1. Розміщення точок M_1 і M_2 в момент часу t.

3. Математична модель руху точок M_1 і M_2. На підставі другого закону Ньютона, закону всесвітнього тяжіння зі скінченною швидкістю гравітації та співвідношень (1)–(4) отримуємо, що рух точок M_1 і M_2 описується системою диференціальних рівнянь із відхилювальним аргументом та функціональних рівнянь

$$\begin{cases} m_1\ddot{\vec{r}}_1(t) = \dfrac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_2(t-\tau_{2,1}(t)) - \vec{r}_1(t)|^3}\ (\vec{r}_2(t-\tau_{2,1}(t)) - \vec{r}_1(t))\,, \\ m_2\ddot{\vec{r}}_2(t) = \dfrac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_1(t-\tau_{1,2}(t)) - \vec{r}_2(t)|^3}\ (\vec{r}_1(t-\tau_{1,2}(t)) - \vec{r}_2(t))\,, \\ c\tau_{2,1}(t) = |\vec{r}_2(t-\tau_{2,1}(t)) - \vec{r}_1(t)|\,, \\ c\tau_{1,2}(t) = |\vec{r}_1(t-\tau_{1,2}(t)) - \vec{r}_2(t)|\,. \end{cases} \tag{6}$$

Детальний опис отримання системи (6) і її дослідження міститься в [5–7].

Очевидно, що додатково для системи (6) має виконуватися співвідношення

$$|\vec{r}_2(t-\tau_{2,1}(t)) - \vec{r}_1(t)| \cdot |\vec{r}_1(t-\tau_{1,2}(t)) - \vec{r}_2(t)| \neq 0. \tag{7}$$

Згідно з (5) система (6) є узагальненням класичної моделі руху точок M_1 і M_2:

$$\begin{cases} m_1\ddot{\vec{r}}_1(t) = \dfrac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t)|^3}\ (\vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t))\,, \\ m_2\ddot{\vec{r}}_2(t) = \dfrac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)|^3}\ (\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t))\,, \end{cases} \tag{8}$$

що отримується з (6) при $c \to +\infty$.

Завдяки (7) для системи (8) має виконуватися нерівність $\vec{r}_2(t) \neq \vec{r}_1(t)$.

При знаходженні траєкторій руху точок M_1 і M_2 крім системи рівнянь (6) потрібно використовувати також початкові або крайові умови (див. [5–7]). Система (6) разом із цими умовами є математичною моделлю руху точок M_1 і M_2, що враховує скінченність швидкості гравітації.

4. Дослідження прямолінійного руху точок M_1 і M_2. Дослідимо рух точок M_1 і M_2 у випадку їхнього розміщення на зафіксованій прямій.

Не обмежуючи загальності, можна вважати, що точки M_1 і M_2 знаходяться на осі Ox з напрямним одиничним вектором $\vec{i}$ як на рис. 1, і швидкість руху початку координат (точки O) є нульовою.

Вважатимемо, що така система координат є інерціальною.

Очевидно, що розташування точок O, M_1 і M_2 на осі Ox залежить від часу t. Суттєвою до розташування точок M_1 і M_2 є вимога, щоб вектор $\overrightarrow{M_1M_2} \neq \vec{0}$ був ненульовим (немає зіткнення точок) і його напрямок збігався з напрямком вектора $\vec{i}$, що узгоджується з рис. 1.

У цьому випадку рух точок M_1 і M_2 можна описати векторними функціями $\vec{r}_1(t) = x_1(t)\,\vec{i}$ і $\vec{r}_2(t) = x_2(t)\,\vec{i}$, де $x_1(t)$ і $x_2(t)$ — скалярні функції зі значеннями в $\mathbb{R}$, властивості яких потрібно з'ясувати.

Функції $x_1(t)$ і $x_2(t)$ згідно з (6) (випадок $c_g = c$) є розв'язками системи рівнянь

$$\begin{cases} \ddot{x}_1(t) = Gm_2 \dfrac{x_2(t-\tau_{2,1}(t)) - x_1(t)}{|x_2(t-\tau_{2,1}(t)) - x_1(t)|^3}, \\ \ddot{x}_2(t) = Gm_1 \dfrac{x_1(t-\tau_{1,2}(t)) - x_2(t)}{|x_1(t-\tau_{1,2}(t)) - x_2(t)|^3}, \\ c\tau_{2,1}(t) = |x_2(t-\tau_{2,1}(t)) - x_1(t)|, \\ c\tau_{1,2}(t) = |x_1(t-\tau_{1,2}(t)) - x_2(t)|, \end{cases} \tag{9}$$

а згідно з (8) (випадок $c_g = \infty$) — розв'язками наступної системи рівнянь:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1(t) = Gm_2 \, \dfrac{x_2(t) - x_1(t)}{|x_2(t) - x_1(t)|^3}, \\ \ddot{x}_2(t) = Gm_1 \, \dfrac{x_1(t) - x_2(t)}{|x_1(t) - x_2(t)|^3}. \end{cases} \tag{10}$$

Властивості розв'язків $x_1(t)$ і $x_2(t)$ систем (9) і (10) залежать від початкового моменту часу $t_0 \in \mathbb{R}$ і початкових умов.

Нас буде цікавити рух точки M_2 відносно точки M_1, тобто величина $x_2(t) - x_1(t)$.

Розглянемо властивості величини $x_2(t) - x_1(t)$ для кожної із систем (9) і (10) окремо. Спочатку наведемо деякі властивості розв'язків добре дослідженої системи (10) (див., наприклад, [8 – 11]), які потрібні для з'ясування властивостей розв'язків основної системи (9).

4.1. Випадок системи (10). Будемо враховувати значення $x_1(t_0)$ і $x_2(t_0)$ розв'язків $x_1(t)$ і $x_2(t)$ системи (10) та їхніх похідних $v_1(t_0) = \dot{x}_1(t_0)$ і $v_2(t_0) = \dot{x}_2(t_0)$ в початковий момент часу t_0. Тут $v_1(t_0)$ і $v_2(t_0)$ — швидкості руху точок M_1 і M_2 в момент часу t_0 відповідно. Вважатимемо, що

$$x_1(t_0) < x_2(t_0), \tag{11}$$

що узгоджується з вимогою стосовно розташування точок M_1 і M_2.

Розглянемо величину

$$v^*_{2,\infty} = \sqrt{\frac{2G(m_1 + m_2)}{x_2(t_0) - x_1(t_0)}}. \tag{12}$$

Правильним є таке твердження.

Теорема 1. *Нехай виконується співвідношення (11).*

Тоді для системи (10) правильними є такі твердження:

1) якщо

$$v_2(t_0) - v_1(t_0) \in (-c, 0], \tag{13}$$

то існує таке число $T > t_0$, що функція $x_2(t) - x_1(t)$ є строго спадною на проміжку $[t_0, T)$ і $\lim_{t \to T-0}(x_2(t) - x_1(t)) = 0$ (точки M_1 і M_2 в момент часу T зіткнуться);

2) якщо

$$v_2(t_0) - v_1(t_0) \in \big(0, v^*_{2,\infty}\big), \tag{14}$$

то для деяких чисел T_1, T_2 ($t_0 < T_1 < T_2$) *функція* $x_2(t) - x_1(t)$ *на проміжках* $[t_0, T_1)$ *і* $[T_1, T_2)$ *є строго зростаючою і строго спадною відповідно і* $\lim_{t\to T_2-0}(x_2(t) - x_1(t)) = 0$ *(точки* M_1 *і* M_2 *в момент часу* T_2 *зіткнуться);*

3) якщо

$$v_2(t_0) - v_1(t_0) \ge v^*_{2,\infty}, \tag{15}$$

то функція $x_2(t) - x_1(t)$ *строго зростає на* $[t_0, +\infty)$ *і* $\lim_{t\to+\infty}(x_2(t) - x_1(t)) = +\infty$.

Доведення. Спочатку наведемо потрібні для подальшого співвідношення.

Важливою є рівність

$$\ddot{x}_2(t) - \ddot{x}_1(t) = -G(m_1 + m_2)\frac{x_2(t) - x_1(t)}{|x_2(t) - x_1(t)|^3}, \tag{16}$$

що випливає з (10). Враховуючи цю рівність, отримуємо

$$\frac{d(\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t))^2}{dt} = -2G(m_1 + m_2)\,\frac{x_2(t) - x_1(t)}{|x_2(t) - x_1(t)|^3}\,(\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)).$$

Звідси на підставі (11) та рівності $(\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t))\,dt = d(x_2(t) - x_1(t))$ випливає, що для всіх $t > t_0$

$$(\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t))^2 = (v_2(t_0) - v_1(t_0))^2 - 2G(m_1 + m_2)\int\limits_{t_0}^{t} \frac{x_2(s) - x_1(s)}{|x_2(s) - x_1(s)|^3}\, d(x_2(s) - x_1(s)) =$$

$$= (v_2(t_0) - v_1(t_0))^2 - 2G(m_1 + m_2)\int\limits_{t_0}^{t} \frac{d(x_2(s) - x_1(s))}{(x_2(s) - x_1(s))^2} =$$

$$= (v_2(t_0) - v_1(t_0))^2 - \frac{2G(m_1 + m_2)}{x_2(t_0) - x_1(t_0)} + \frac{2G(m_1 + m_2)}{x_2(t) - x_1(t)}, \tag{17}$$

якщо $x_2(s) > x_1(s)$ для кожного $s \in [t_0, t)$. Множина таких t є непорожньою завдяки (11) і неперервності функцій $x_1(t)$ і $x_2(t)$ в точці t_0.

Із (16) також випливає, що для всіх $t > t_0$

$$\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t) = v_2(t_0) - v_1(t_0) - \int\limits_{t_0}^{t} \frac{G(m_1 + m_2)\,ds}{|x_2(s) - x_1(s)|^2} \tag{18}$$

і

$$x_2(t) - x_1(t) = x_2(t_0) - x_1(t_0) + (v_2(t_0) - v_1(t_0))(t - t_0) - \int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{\tau} \frac{G(m_1 + m_2)\,ds}{|x_2(s) - x_1(s)|^2}\,d\tau, \tag{19}$$

якщо $x_2(s) > x_1(s)$ для кожного $s \in [t_0, t)$.

Використаємо наведені співвідношення для обґрунтування тверджень теореми.

Нехай виконується включення (13).

Згідно з нерівністю (11) та рівняннями (16) і (18) точка M_2 по відношенню до точки M_1 рухається зі сповільненням, величина якого

$$-\frac{G(m_1+m_2)}{(x_2(t)-x_1(t))^2}<0.$$

Тому на підставі (18) і (19) для деякого моменту часу $T>t_0$ функції $\dot{x}_2(t)-\dot{x}_1(t)$ і $x_2(t)-x_1(t)$ є строго спадними на проміжку $[t_0,T)$ і $\lim_{t\to T-0}(x_2(t)-x_1(t))=0.$

З механічної точки зору це означає, що в момент часу T відбувається зіткнення точок M_1 і M_2.

Отже, перша частина твердження теореми є правильною.

Нехай виконується включення (14).

У цьому випадку функція $x_2(t)-x_1(t)$ не може бути додатною і необмеженою на $[t_0,+\infty)$, оскільки на підставі (17) функція $(\dot{x}_2(t)-\dot{x}_1(t))^2$ для деяких достатньо великих t набуватиме від'ємних значень (тут ураховано (12)), що неможливо.

Також функція $x_2(t)-x_1(t)$ не може бути додатною й обмеженою на проміжку $[t_0,+\infty)$, оскільки тоді завдяки (18) для деякого $t_1>t_0$ функція $\dot{x}_2(t)-\dot{x}_1(t)$ при $t>t_1$ набуватиме від'ємних значень і $\dot{x}_2(t)-\dot{x}_1(t)$ монотонно спадатиме. Тому $\lim_{t\to t_2-0}(x_2(t)-x_1(t))=0$ для деякого $t_2>t_1$ і $x_2(t_2)-x_1(t_2)>0,$ що неможливо.

Отже, неперервна функція $x_2(t)-x_1(t)$ буде додатною й обмеженою на деякому проміжку $[t_0,T_2)$ і $\lim_{t\to T_2-0}(x_2(t)-x_1(t))=0.$

Справді, завдяки (14) і (18) функція $x_2(t)-x_1(t)$ на деякому проміжку $[t_0,T_1)$, де T_1 — момент часу, для якого $\dot{x}_2(T_1)-\dot{x}_1(T_1)=0,$ є строго зростаючою, а на проміжку $[T_1,T_2)$, де T_2 — момент часу, для якого $\lim_{t\to T_2-0}(x_2(t)-x_1(t))=0,$ є строго спадною.

Рівність $\lim_{t\to T_2-0}(x_2(t)-x_1(t))=0$ означає, що в момент часу T_2 відбувається зіткнення точок M_1 і M_2.

Отже, друга частина твердження теореми також є правильною.

Нехай виконується включення (15). Тоді на підставі (12) і (17)

$$(\dot{x}_2(t)-\dot{x}_1(t))^2\geq\frac{2G(m_1+m_2)}{x_2(t)-x_1(t)}>0\quad\text{для всіх}\quad t\geq t_0.$$

Звідси і з (18) випливає, що

$$\dot{x}_2(t)-\dot{x}_1(t)>0\quad\text{для всіх}\quad t\geq t_0. \tag{20}$$

Тому функція $x_2(t)-x_1(t)$ є строго зростаючою на проміжку $[t_0,+\infty)$.

Функція $x_2(t)-x_1(t)$ не може бути обмеженою на проміжку $[t_0,+\infty)$, оскільки тоді на підставі (18) функція $\dot{x}_2(t)-\dot{x}_1(t)$ для достатньо великих t буде набувати від'ємних значень, що суперечить (20), а отже,

$$\lim_{t\to+\infty}(x_2(t)-x_1(t))=+\infty. \tag{21}$$

Таким чином, третя частина твердження теореми також є правильною.

Теорему 1 доведено.

Зауваження 1. У теоремі 1 величина $v^*_{2,\infty}$, що визначається рівністю (12), є *другою космічною швидкістю* у випадку класичної небесної механіки. Це мінімальна відносна швидкість $v_2(t_0) - v_1(t_0)$, з якою має рухатися точка M_2 відносно точки M_1 у момент часу t_0, з координатами $x_2(t_0)$ і $x_1(t_0)$ відповідно, щоб виконувалося співвідношення (21).

4.2. Випадок системи (9). Покажемо, що *для (9) справджується твердження, аналогічне теоремі 1, з другою космічною швидкістю, більшою ніж* $v^*_{2,\infty}$.

Траєкторія руху точки M_2 відносно точки M_2 залежить від значень функцій $x_1(t)$ і $x_2(t)$ та їхніх похідних на проміжках $[t_0 - \tau_{2,1}(t_0), t_0]$ і $[t_0 - \tau_{1,2}(t_0), t_0]$ відповідно (значення похідних $v_1(t) = dx_1(t)/dt$ і $v_2(t) = dx_2(t)/dt$ на відповідних проміжках ми не виділяємо, оскільки вони визначаються функціями $x_1(t)$ і $x_2(t)$).

На підставі (9)

$$\ddot{x}_2(t) - \ddot{x}_1(t) = -Gm_1 \frac{x_2(t) - x_1(t - \tau_{1,2}(t))}{|x_1(t - \tau_{1,2}(t)) - x_2(t)|^3} - Gm_2 \frac{x_2(t - \tau_{2,1}(t)) - x_1(t)}{|x_2(t - \tau_{2,1}(t)) - x_1(t)|^3}. \tag{22}$$

Зазначимо, що чисельники в доданках правої частини (22) додатні.

Справді, припустимо, що

$$x_2(t) - x_1(t - \tau_{1,2}(t)) < 0. \tag{23}$$

Тоді завдяки четвертому рівнянню системи (9)

$$c\tau_{1,2}(t) = |x_2(t) - x_1(t - \tau_{1,2}(t))| = -(x_2(t) - x_1(t - \tau_{1,2}(t))) =$$
$$= -(x_2(t) - x_1(t)) - (x_1(t) - x_1(t - \tau_{1,2}(t))) = -(x_2(t) - x_1(t)) - v_1\tau_{1,2}(t),$$

де

$$v_1 = \frac{x_1(t) - x_1(t - \tau_{1,2}(t))}{\tau_{1,2}(t)},$$

і, отже, $(-c - v_1)\tau_{1,2}(t) = x_2(t) - x_1(t)$. Звідси та з додатності $\tau_{1,2}(t)$ і $x_2(t) - x_1(t)$ випливає, що $-c - v_1 > 0$. Ця нерівність виконується лише при $-v_1 > c$, що неможливо згідно з [1] (швидкість руху точки M_1 не може бути більшою c).

Отже, припущення про виконання співвідношення (23) є хибним. Тому з урахуванням (7)

$$x_2(t) - x_1(t - \tau_{1,2}(t)) > 0. \tag{24}$$

Аналогічно

$$x_2(t - \tau_{2,1}(t)) - x_1(t) > 0. \tag{25}$$

Завдяки (24) і (25) співвідношення (22) можна подати у вигляді

$$\ddot{x}_2(t) - \ddot{x}_1(t) = -\frac{Gm_1}{(x_2(t) - x_1(t - \tau_{1,2}(t)))^2} - \frac{Gm_2}{(x_2(t - \tau_{2,1}(t)) - x_1(t))^2}. \tag{26}$$

Для подальшого нам потрібні замкнений та відкритий початкові проміжки

$$I_{t_0} = [t_0 - \max\{\tau_{1,2}(t_0), \tau_{2,1}(t_0)\}, t_0] \qquad \text{і} \qquad \operatorname{int} I_{t_0} = (t_0 - \max\{\tau_{1,2}(t_0), \tau_{2,1}(t_0)\}, t_0).$$

Для дослідження руху точки M_2 відносно точки M_1 задамо початкові значення $\psi_1(s)$ і $\psi_2(s)$ для $x_1(t)$ і $x_2(t)$ на проміжку I_{t_0}, вважаючи, що:

1) $\psi_1(s)$ і $\psi_2(s)$ — неперервно диференційовні на $\operatorname{int} I_{t_0}$ і неперервні на I_{t_0};
2) $\psi_2(s)-\psi_1(s)>0$ для всіх $s\in I_{t_0}$ (точка M_2 не може збігатися з точкою M_1);
3) похідні $\dot\psi_1(s)$ і $\dot\psi_2(s)$ обмежені та інтегровні на $\operatorname{int} I_{t_0}$ й існують границі $\lim_{s\to t_0-0}\dot\psi_i(s)$, $i=\overline{1,2}$.

Відхилення $\tau_{1,2}(t_0)$ і $\tau_{2,1}(t_0)$ згідно з третім і четвертим рівняннями системи (9) мають задовольняти співвідношення

$$c\tau_{2,1}(t_0)=\psi_2(t_0-\tau_{2,1}(t_0))-\psi_1(t_0),$$

$$c\tau_{1,2}(t_0)=\psi_2(t_0)-\psi_1(t_0-\tau_{1,2}(t_0)),$$

$$x_1(t-\tau_{1,2}(t))=\psi_1(t-\tau_{1,2}(t))$$

для всіх $t\ge t_0$, для яких $t-\tau_{1,2}(t)\in[t_0-\tau_{1,2}(t_0),t_0]$, і

$$x_2(t-\tau_{2,1}(t))=\psi_2(t-\tau_{2,1}(t))$$

для всіх $t\ge t_0$, для яких $t-\tau_{2,1}(t)\in[t_0-\tau_{2,1}(t_0),t_0]$.

Зазначимо тут, що $t-\tau_{2,1}(t)>t_0-\tau_{2,1}(t_0)$ для всіх $t>t_0$. Справді, враховуючи, що $c\tau_{2,1}(t)=x_2(t-\tau_{2,1}(t))-x_1(t)$, для кожних $t>t_0$ і достатньо малого числа $\Delta>0$ отримуємо

$$c\,\frac{\tau_{2,1}(t+\Delta)-\tau_{2,1}(t)}{\Delta}=\frac{x_2(t+\Delta-\tau_{2,1}(t+\Delta))-x_2(t-\tau_{2,1}(t))}{\Delta-(\tau_{2,1}(t+\Delta)-\tau_{2,1}(t))}\times$$

$$\times\,\frac{\Delta-(\tau_{2,1}(t+\Delta)-\tau_{2,1}(t))}{\Delta}-\frac{x_1(t+\Delta)-x_1(t)}{\Delta}=$$

$$=v_2^*\left(1-\frac{\tau_{2,1}(t+\Delta)-\tau_{2,1}(t)}{\Delta}\right)-v_1^*,$$

де

$$v_1^*=\frac{x_1(t+\Delta)-x_1(t)}{\Delta}\qquad\text{і}\qquad v_2^*=\frac{x_2(t+\Delta-\tau_{2,1}(t+\Delta))-x_2(t-\tau_{2,1}(t))}{\Delta-(\tau_{2,1}(t+\Delta)-\tau_{2,1}(t))}.$$

Звідси та з того, що швидкості руху точок M_1 і M_2 згідно з [1] менші c, випливає, що для кожних $t>t_0$ і достатньо малого числа $\Delta>0$

$$1-\frac{\tau_{2,1}(t+\Delta)-\tau_{2,1}(t)}{\Delta}=\frac{c+v_1^*}{c+v_2^*}>0.$$

Тому функція $t-\tau_{2,1}(t)$ є строго зростаючою і виконується відповідне співвідношення.

Аналогічно $t-\tau_{1,2}(t)>t_0-\tau_{1,2}(t_0)$ для всіх $t>t_0$.

Також у момент часу t_0 задамо швидкості $v_1(t_0)$ і $v_2(t_0)$ руху точок M_1 і M_2 відповідно. Ми не будемо вимагати, щоб виконувалися рівності

$$\lim_{s\to t_0-0}\dot\psi_1(s)=v_1(t_0)\qquad\text{і}\qquad\lim_{s\to t_0-0}\dot\psi_2(s)=v_2(t_0).\tag{27}$$

Початкові швидкості $v_1(s)$ і $v_2(s)$ на $\operatorname{int} I_{t_0}$ визначаються функціями $\psi_1(s)$ і $\psi_1(s)$.

Рис. 2. Розміщення точок M_1 і M_2 в момент часу t.

Аналогічно до [7] можна показати, що система (9) з розглянутими вище початковими умовами має єдиний розв'язок. Цей розв'язок є двічі неперервно диференційовним у точках $t > t_0$, для яких справджується (7), неперервним у точці t_0 і похідні $dx_1(t)/dt$, $dx_2(t)/dt$ в цій точці мають стрибки, якщо не виконуються рівності (27).

Згідно з наведеними початковими умовами та (26) для $v_2(t) - v_1(t)$ і $x_2(t) - x_1(t)$ виконуються інтегральні співвідношення

$$v_2(t) - v_1(t) = v_2(t_0) - v_1(t_0) - \\ - \int\limits_{t_0}^{t} \left(\frac{Gm_1}{(x_2(s) - x_1(s - \tau_{1,2}(s)))^2} + \frac{Gm_2}{(x_2(s - \tau_{2,1}(s)) - x_1(s))^2} \right) ds \qquad (28)$$

і

$$x_2(t) - x_1(t) = x_2(t_0) - x_1(t_0) + (t - t_0)(v_2(t_0) - v_1(t_0)) - \\ - \int\limits_{t_0}^{t} \left(\int\limits_{t_0}^{\tau} \left(\frac{Gm_1}{(x_2(s) - x_1(s - \tau_{1,2}(s)))^2} + \frac{Gm_2}{(x_2(s - \tau_{2,1}(s)) - x_1(s))^2} \right) ds \right) d\tau, \qquad (29)$$

де t — довільний момент часу з деякого проміжку $\left[t_0, t^*\right) \subset [t_0, +\infty)$, на якому $x_2(t) - - x_1(t) > 0$.

Ми використаємо співвідношення (28) і (29) для вивчення динаміки точки M_2 відносно точки M_1.

У подальшому зафіксуємо функції $\psi_1(s)$, $\psi_2(s)$ і швидкість $v_1(t_0)$. Швидкість $v_2(t_0)$ може набувати довільних значень. Для швидкостей $v_1(t_0)$ і $v_2(t_0)$ позначимо через $\mathcal{V}_1$ і $\mathcal{V}_2$ множини всіх різниць $v_2(t_0) - v_1(t_0)$, для кожної з яких функція $x_2(t) - x_1(t)$, що описує рух точки M_2 відносно точки M_1, є обмеженою або необмеженою на $[t_0, +\infty)$ відповідно.

Далі будемо використовувати одну важливу властивість системи (9). До цього часу ми проводили підготовчу роботу, використовуючи інерціальну систему, що відповідає рис. 1. Далі ми розглянемо інерціальну систему $\tilde{O}\tilde{x}$, для якої точка $\tilde{O}$ рухається відносно точки O зі сталою швидкістю $\vec{v} = \tilde{\nu}\vec{i}$ ($\tilde{\nu}$ може бути довільним елементом множини $\mathbb{R}$). Напрямний вектор осі $\tilde{O}\tilde{x}$ збігається з вектором $\vec{i}$ і точки M_1, M_2 розташовані на осі $\tilde{O}\tilde{x}$ (рис. 2).

Рух точок M_1 і M_2 описується новими векторними функціями $\vec{\tilde{r}}_1(t) = \tilde{x}_1(t)\vec{i}$ і $\vec{\tilde{r}}_2(t) = = \tilde{x}_2(t)\vec{i}$.

Важливим для подальшого є таке очевидне твердження.

Лема 1. *Для кожного $\tilde{\nu} \in \mathbb{R}$ для точок M_1 і M_2 справджуються тотожності*

$$\begin{gathered}\tilde{x}_2(t) - \tilde{x}_1(t) \equiv x_2(t) - x_1(t),\\ \dot{\tilde{x}}_2(t) - \dot{\tilde{x}}_1(t) \equiv \dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t),\\ \ddot{\tilde{x}}_2(t) - \ddot{\tilde{x}}_1(t) \equiv \ddot{x}_2(t) - \ddot{x}_1(t),\\ \ddot{\tilde{x}}_1(t) \equiv \ddot{x}_1(t) \quad i \quad \ddot{\tilde{x}}_2(t) \equiv \ddot{x}_2(t).\end{gathered} \tag{30}$$

Якщо записати співвідношення (26) стосовно нової інерціальної системи (рис. 2), то отримаємо

$$\ddot{\tilde{x}}_2(t) - \ddot{\tilde{x}}_1(t) = -\frac{Gm_1}{(\tilde{x}_2(t) - \tilde{x}_1(t - \tau_{1,2}(t)))^2} - \frac{Gm_2}{(\tilde{x}_2(t - \tau_{2,1}(t)) - \tilde{x}_1(t))^2}. \tag{31}$$

Зазначимо, що відхилення $\tau_{1,2}(t)$ і $\tau_{2,1}(t)$, як і часова змінна t, не залежать від $\tilde{\nu}$.

Завдяки лемі 1 та співвідношенням (26) і (31) справджується таке твердження.

Наслідок 1. *Для точок M_1 і M_2 для всіх $\tilde{\nu} \in \mathbb{R}$ виконується співвідношення*

$$\frac{Gm_1}{(x_2(t) - x_1(t - \tau_{1,2}(t)))^2} + \frac{Gm_2}{(x_2(t - \tau_{2,1}(t)) - x_1(t))^2} =$$
$$= \frac{Gm_1}{(\tilde{x}_2(t) - \tilde{x}_1(t - \tau_{1,2}(t)))^2} + \frac{Gm_2}{(\tilde{x}_2(t - \tau_{2,1}(t)) - \tilde{x}_1(t))^2}.$$

Далі розглянемо систему (9) з використанням інерціальної системи, що відповідає рис. 1.

Справджуються такі допоміжні твердження, що прояснюють властивості руху точки M_2 відносно точки M_1.

Лема 2. $\mathcal{V}_1 \neq \varnothing$ *і* $v^*_{2,\infty} \in \mathcal{V}_1$.

Доведення. Нехай $v_2(t_0) - v_1(t_0) \in (-c, 0]$. Згідно з (26) швидкість руху точки M_2 відносно точки M_1 буде від'ємною і значення цієї швидкості строго спадатиме, оскільки

$$\frac{Gm_1}{(x_2(s) - x_1(s - \tau_{1,2}(s)))^2} + \frac{Gm_2}{(x_2(s - \tau_{2,1}(s)) - x_1(s))^2} > 0.$$

Тому функція $x_2(t) - x_1(t)$, що описує рух точки M_2 відносно точки M_1, є строго спадною і $\lim_{t \to T-0}(x_2(t) - x_1(t)) = 0$ для деякого моменту часу $T > t_0$.

Із механічної точки зору це означає, що в момент часу T відбудеться зіткнення точок M_1 і M_2. Отже, $\mathcal{V}_1 \neq \varnothing$.

Для подальшого нам потрібні співвідношення

$$\begin{aligned}&\frac{d\big(v_2(t) - v_1(t)\big)^2}{dt} =\\ &\quad = 2\big(v_2(t) - v_1(t)\big)(\dot{v}_2(t) - \dot{v}_1(t)) =\\ &\quad = 2\big(v_2(t) - v_1(t)\big)\left(-\frac{Gm_1}{(x_2(t) - x_1(t - \tau_{1,2}(t)))^2} - \frac{Gm_2}{(x_2(t - \tau_{2,1}(t)) - x_1(t))^2}\right)\end{aligned} \tag{32}$$

і

$$\big(v_2(t)-v_1(t)\big)^2=(v_2(t_0)-v_1(t_0))^2-$$
$$-\int\limits_{t_0}^{t}\frac{2Gm_1\,d(x_2(s)-x_1(s))}{(x_2(s)-x_1(s-\tau_{1,2}(s)))^2}-\int\limits_{t_0}^{t}\frac{2Gm_2\,d(x_2(s)-x_1(s))}{(x_2(s-\tau_{2,1}(s))-x_1(s))^2},\qquad(33)$$

що отримуються з використанням (26) та рівності $\big(v_2(t)-v_1(t)\big)\,dt=d(x_2(t)-x_1(t))$.

Покажемо, що правильним є включення $v^*_{2,\infty}\in\mathcal{V}_1$. Припустимо, що це включення є хибним, тобто у випадку $v_2(t_0)-v_1(t_0)=v_{2,\infty}$ виконуються співвідношення

$$v_2(t)-v_1(t)>0\quad\text{для всіх}\quad t>t_0\qquad(34)$$

і

$$\lim_{t\to+\infty}(x_2(t)-x_1(t))=+\infty.\qquad(35)$$

Зауважимо, що у випадку $v_{2,\infty}\notin\mathcal{V}_1$ згідно з (28) і (29) виконання рівності (35) та співвідношення

$$v_2(t)-v_1(t)\le 0,\quad t\ge t_1,$$

для деякого $t_1>t_0$ не можливе.

Завдяки строгому зростанню функцій $t-\tau_{1,2}(t)$ і $t-\tau_{2,1}(t)$ на проміжку $(t_0,+\infty)$, співвідношенням (34), (35) і лемі 1 для кожного $t>t_2$, де t_2 — таке число, що $\min\{t_2-\tau_{1,2}(t_2),t_2-\tau_{2,1}(t_2)\}>t_0$, існує $\tilde\nu\in\mathbb{R}$, для якого

$$v_2(t)-v_1(t)=\tilde v_2(t)-\tilde v_1(t)>0,$$

де $\tilde v_1(t)=\dot{\tilde x}_1(t)$ і $\tilde v_2(t)=\dot{\tilde x}_2(t)$,

$$\lim_{t\to+\infty}(\tilde x_2(t)-\tilde x_1(t))=+\infty,\qquad(36)$$

$$\tilde v_1(t)<0,\quad \tilde v_2(t)>0,\qquad(37)$$

$$\tilde x_1(t)<\tilde x_1(t-\tau_{1,2}(t))\qquad(38)$$

і

$$\tilde x_2(t)>\tilde x_2(t-\tau_{2,1}(t)).\qquad(39)$$

Нерівності (37) випливають із (34) при відповідному виборі $\tilde\nu\in\mathbb{R}$.

Нерівності (38) і (39) на підставі формули Тейлора [12], нерівностей (24), (25) і (37) та тотожностей (30) випливають із співвідношень

$$\tilde x_1(t-\tau_{1,2}(t))-\tilde x_1(t)=-\tau_{1,2}(t)\tilde v_1(t)+\frac12\,\tau^2_{1,2}(t)\,\frac{Gm_2}{(\tilde x_2(\xi_1-\tau_{2,1}(\xi_1))-\tilde x_1(\xi_1))^2}>0$$

і

$$\tilde x_2(t-\tau_{2,1}(t))-\tilde x_2(t)=-\tau_{2,1}(t)\tilde v_2(t)+\frac12\tau^2_{2,1}(t)\frac{Gm_1}{(\tilde x_1(\xi_2-\tau_{1,2}(\xi_2))-\tilde x_2(\xi_2))^2}<0,$$

в яких ξ_1 і ξ_2 — деякі числа з проміжків $(t-\tau_{1,2}(t),t)$ і $(t-\tau_{2,1}(t),t)$ відповідно, на яких функції $x_1(t)$ і $x_2(t)$ є двічі неперервно диференційовними.

Далі для розв'язків $x_1(t)$ і $x_2(t)$ системи (9) використаємо рівності

$$\int\limits_{t_2}^{t}\frac{2G(m_1+m_2)}{(\tilde{x}_2(s)-\tilde{x}_1(s))^2}\,d(\tilde{x}_2(s)-\tilde{x}_1(s))=$$

$$=\left(v^*_{2,\infty}\right)^2-\int\limits_{t_0}^{t_2}\frac{2G(m_1+m_2)}{(\tilde{x}_2(s)-\tilde{x}_1(s))^2}\,d(\tilde{x}_2(s)-\tilde{x}_1(s))-$$

$$-\frac{2G(m_1+m_2)}{\tilde{x}_2(t)-\tilde{x}_1(t)}=\frac{2G(m_1+m_2)}{\tilde{x}_2(t_2)-\tilde{x}_1(t_2)}-\frac{2G(m_1+m_2)}{\tilde{x}_2(t)-\tilde{x}_1(t)},\quad t\geq t_2,$$

що є правильними для кожного $\tilde{\nu}\in\mathbb{R}$ завдяки (12), (34), (35) і лемі 1.

Ці рівності у випадку $v_2(t_0)-v_1(t_0)=v^*_{2,\infty}$ дають змогу подати (33) у вигляді

$$\big(v_2(t)-v_1(t)\big)^2=(v_2(t_0)-v_1(t_0))^2-\int\limits_{t_0}^{t_2}\frac{2Gm_1\,d(x_2(s)-x_1(s))}{(x_2(s)-x_1(s-\tau_{1,2}(s)))^2}-$$

$$-\int\limits_{t_0}^{t_2}\frac{2Gm_2\,d(x_2(s)-x_1(s))}{(x_2(s-\tau_{2,1}(s))-x_1(s))^2}-\int\limits_{t_2}^{t}\frac{2Gm_1\,d(x_2(s)-x_1(s))}{(x_2(s)-x_1(s-\tau_{1,2}(s)))^2}-$$

$$-\int\limits_{t_2}^{t}\frac{2Gm_2\,d(x_2(s)-x_1(s))}{(x_2(s-\tau_{2,1}(s))-x_1(s))^2}=\frac{2G(m_1+m_2)}{x_2(t_2)-x_1(t_2)}-$$

$$-\int\limits_{t_2}^{t}\frac{2Gm_1\,d(x_2(s)-x_1(s))}{(x_2(s)-x_1(s-\tau_{1,2}(s)))^2}-\int\limits_{t_2}^{t}\frac{2Gm_2\,d(x_2(s)-x_1(s))}{(x_2(s-\tau_{2,1}(s))-x_1(s))^2}=$$

$$=\frac{2G(m_1+m_2)}{\tilde{x}_2(t)-\tilde{x}_1(t)}-\int\limits_{t_2}^{t}\frac{2Gm_1\,d(\tilde{x}_2(s)-\tilde{x}_1(s))}{(\tilde{x}_2(s)-\tilde{x}_1(s-\tau_{1,2}(s)))^2}-$$

$$-\int\limits_{t_2}^{t}\frac{2Gm_2\,d(\tilde{x}_2(s)-\tilde{x}_1(s))}{(\tilde{x}_2(s-\tau_{2,1}(s))-\tilde{x}_1(s))^2}+\int\limits_{t_2}^{t}\frac{2G(m_1+m_2)}{(\tilde{x}_2(s)-\tilde{x}_1(s))^2}\,d(\tilde{x}_2(s)-\tilde{x}_1(s)).$$

Тут також використано лему 1 і наслідок 1.

Отже,

$$\big(v_2(t)-v_1(t)\big)^2=\frac{2G(m_1+m_2)}{\tilde{x}_2(t)-\tilde{x}_1(t)}-\int\limits_{t_2}^{t}\Bigg(\frac{2Gm_1}{(\tilde{x}_2(s)-\tilde{x}_1(s-\tau_{1,2}(s)))^2}+$$

$$+\frac{2Gm_2}{(\tilde{x}_2(s-\tau_{2,1}(s))-\tilde{x}_1(s))^2}-$$

$$-\frac{2G(m_1+m_2)}{(\tilde{x}_2(s)-\tilde{x}_1(s))^2}\bigg)d\left(\tilde{x}_2(s)-\tilde{x}_1(s)\right), \quad t\geq t_2. \tag{40}$$

Оскільки згідно з лемою 1 і наслідком 1 інтеграл у правій частині (40) не залежить від вибору $\tilde{\nu}\in\mathbb{R}$, то на підставі (38) і (39) для кожного $s\in[t_0,t]$ можна вибрати $\tilde{\nu}$ так, щоб

$$|\tilde{x}_2(s)-\tilde{x}_1(s-\tau_{1,2}(s)))|<|\tilde{x}_2(s)-\tilde{x}_1(s)|$$

і

$$|\tilde{x}_2(s-\tau_{2,1}(s)))-\tilde{x}_1(s)|<|\tilde{x}_2(s)-\tilde{x}_1(s)|\,.$$

Тому функція

$$I(t)=\int\limits_{t_0}^{t}\bigg(\frac{2Gm_1}{(\tilde{x}_2(s)-\tilde{x}_1(s-\tau_{1,2}(s)))^2}+\frac{2Gm_2}{(\tilde{x}_2(s-\tau_{2,1}(s))-\tilde{x}_1(s))^2}-$$

$$-\frac{2G(m_1+m_2)}{(\tilde{x}_2(s)-\tilde{x}_1(s))^2}\bigg)d\left(\tilde{x}_2(s)-\tilde{x}_1(s)\right)$$

для кожного $t>t_2$ буде набувати додатних значень і буде строго зростаючою на $[t_0,+\infty)$. Тоді завдяки (36) і (40) $v_2(t_1)-v_1(t_1)=0$ для деякого $t_1>t_2$, що на підставі проведених на початку доведення леми міркувань суперечить (35).

Отже, припущення, що $v^*_{2,\infty}\notin\mathcal{V}_1$, є хибним.

Лему 2 доведено.

Лема 3. $\mathcal{V}_2\neq\varnothing$.

Доведення. Використаємо співвідношення (33) у випадку

$$v_2(t_0)-v_1(t_0)=2v^*_{2,\infty}. \tag{41}$$

Це співвідношення має вигляд

$$\big(v_2(t)-v_1(t)\big)^2=\frac{8G(m_1+m_2)}{x_2(t_0)-x_1(t_0)}-\int\limits_{t_0}^{t}\bigg(\frac{2Gm_1}{(x_2(s)-x_1(s-\tau_{1,2}(s)))^2}+$$

$$+\frac{2Gm_2}{(x_2(s-\tau_{2,1}(s))-x_1(s))^2}\bigg)d(x_2(s)-x_1(s)). \tag{42}$$

Виконується включення

$$2v^*_{2,\infty}\in\mathcal{V}_2.$$

Справді, функція $v_2(t)-v_1(t)$, для якої справджується рівність (41), є неперервною в точці t_0. Тому згідно з (42) множина проміжків $[t_0,\theta)$, $\theta>t_0$, на кожному з яких $v_2(t)-v_1(t)>0$, є не порожньою. Припустимо, що для деякого $T>t_0$

$$v_2(t)-v_1(t)>0 \quad \text{для всіх} \quad t\in[t_0,T) \tag{43}$$

і

$$v_2(T) - v_1(T) = 0. \tag{44}$$

Зазначимо, що завдяки (43)

$$x_2(T) - x_1(T) > 0. \tag{45}$$

Використаємо співвідношення

$$x_1(s - \tau_{1,2}(s)) < \frac{x_1(s) + x_2(s)}{2} < x_2(s - \tau_{2,1}(s)), \tag{46}$$

що легко встановлюється за допомогою таких співвідношень про розміщення точок M_1 і M_2 на осі Ox та їхніх швидкостей руху:

$$\max\{x_1(s), x_1(s - \tau_{1,2}(s))\} < x_2(s), \qquad x_1(s) < \min\{x_2(s), x_2(s - \tau_{2,1}(s))\}$$

(див. (24) і (25)) і

$$\max\left\{\big|\dot{x}_1(s)\big|, \big|\dot{x}_2(s)\big|\right\} < c$$

(обмеження на швидкості руху точок M_1 і M_2 потрібне для обґрунтування співвідношень (24) і (25)). У наведених допоміжних співвідношеннях s — довільний елемент із $[t_0 - \max\{\tau_{1,2}(t_0), \tau_{2,1}(t_0)\}, +\infty)$ такий, що $x_2(s) > x_1(s)$.

Із (46) випливає, що

$$\max\left\{\frac{x_2(s) - x_1(s)}{x_2(s) - x_1(s - \tau_{1,2}(s))}, \frac{x_2(s) - x_1(s)}{x_2(s - \tau_{2,1}(s)) - x_1(s)}\right\} < 2 \tag{47}$$

для всіх $s \in [t_0 - \max\{\tau_{1,2}(t_0), \tau_{2,1}(t_0)\}, +\infty)$, для яких $x_2(s) > x_1(s)$.

На підставі (47) для всіх $t \in (t_0, T]$

$$\int\limits_{t_0}^{t} \left(\frac{2Gm_1}{(x_2(s) - x_1(s - \tau_{1,2}(s)))^2} + \frac{2Gm_2}{(x_2(s - \tau_{2,1}(s)) - x_1(s))^2}\right) d(x_2(s) - x_1(s)) <$$

$$< 8G(m_1 + m_2) \int\limits_{t_0}^{t} \frac{d(x_2(s) - x_1(s))}{(x_2(s) - x_1(s))^2} = \frac{8G(m_1 + m_2)}{x_2(t_0) - x_1(t_0)} - \frac{8G(m_1 + m_2)}{x_2(t) - x_1(t)}.$$

Звідси з урахуванням (42) і (45) отримуємо співвідношення

$$\big(v_2(t) - v_1(t)\big)^2 > \frac{8G(m_1 + m_2)}{x_2(T) - x_1(T)} > 0,$$

що суперечить (44).

Отже, співвідношення (43) є правильним і при $T = +\infty$. Тоді на підставі (28)

$$\lim_{t \to +\infty} (x_2(t) - x_1(t)) = +\infty.$$

Отже, $2v^*_{2,\infty} \in \mathcal{V}_2$ і $\mathcal{V}_2 \neq \varnothing$.

Лему 3 доведено.

Лема 4. *Множина $\mathcal{V}_2$ є замкненою і зв'язною.*

Доведення. Використаємо стандартні початкові умови, що використовувалися на попередніх кроках. Нехай $x_1(t)$ і $x_2(t)$ — відповідні розв'язки системи (9) і

$$v_2(t_0) - v_1(t_0) \in \mathcal{V}_2. \tag{48}$$

Завдяки цьому включенню

$$v_2(t) - v_1(t) > 0, \quad t \geq t_0, \tag{49}$$

і

$$\lim_{t\to+\infty}(x_2(t) - x_1(t)) = +\infty. \tag{50}$$

Розглянемо довільне число $\delta \geq 0$ і розв'язки $x_{1,\delta}(t),\ x_{2,\delta}(t)$ системи (9), для яких

$$x_{1,\delta}(t) = x_1(t) \qquad \text{і} \qquad x_{2,\delta}(t) = x_2(t) \quad \text{для всіх} \quad t \in I_{t_0}, \tag{51}$$

$$x_{1,0}(t) = x_1(t) \qquad \text{і} \qquad x_{2,0}(t) = x_2(t) \quad \text{для всіх} \quad t \in I_{t_0} \cup [t_0, +\infty), \tag{52}$$

$$\lim_{t\to t_0+0} \dot{x}_{2,\delta}(t) = v_2(t_0) + \delta \tag{53}$$

і вимога $\lim_{t\to t_0-0} \dot{x}_{1,\delta}(t) = v_1(t_0)$ з урахуванням (27) може не справджуватися.

Тоді для функцій $x_{2,\delta}(t) - x_{1,\delta}(t)$ і $v_{2,\delta}(t) - v_{1,\delta}(t) = \dot{x}_{2,\delta}(t) - \dot{x}_{1,\delta}(t)$ виконуються інтегральні співвідношення

$$v_{2,\delta}(t) - v_{1,\delta}(t) = v_2(t_0) + \delta - v_1(t_0) -$$
$$- \int\limits_{t_0}^{t} \left(\frac{Gm_1}{(x_{2,\delta}(s) - x_{1,\delta}(s - \tau_{1,2,\delta}(s)))^2} + \frac{Gm_2}{(x_{2,\delta}(s - \tau_{2,1,\delta}(s)) - x_{1,\delta}(s))^2} \right) ds \tag{54}$$

і

$$x_{2,\delta}(t) - x_{1,\delta}(t) = x_2(t_0) - x_1(t_0) + (t - t_0)(v_2(t_0) + \delta - v_1(t_0)) -$$
$$- \int\limits_{t_0}^{t} \left(\int\limits_{t_0}^{\tau} \left(\frac{Gm_1}{(x_{2,\delta}(s) - x_{1,\delta}(s - \tau_{1,2,\delta}(s)))^2} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{Gm_2}{(x_{2,\delta}(s - \tau_{2,1,\delta}(s)) - x_{1,\delta}(s))^2} \right) ds \right) d\tau, \tag{55}$$

аналогічні співвідношенням (28) і (29), де t — довільний момент часу з деякого проміжку $\left[t_0, t^*\right) \subset [t_0, +\infty)$, на якому $x_{2,\delta}(t) - x_{1,\delta}(t) > 0$, і $\tau_{1,2,\delta}(s),\ \tau_{2,1,\delta}(s)$ — запізнення, що згідно з третім і четвертим рівняннями системи (9) та розміщенням точок M_1 і M_2 на осі Ox задовольняють співвідношення

$$c\tau_{2,1,\delta}(s) = x_{2,\delta}(s - \tau_{2,1,\delta}(s)) - x_{1,\delta}(s), \tag{56}$$

$$c\tau_{1,2,\delta}(s) = x_{2,\delta}(s) - x_{1,\delta}(s - \tau_{1,2,\delta}(s)). \tag{57}$$

Зазначимо, що при $\delta = 0$ співвідношення (54) і (55) збігаються із співвідношеннями (28) і (29) відповідно, а (56) і (57) — з третім і четвертим рівняннями системи (9) і $\tau_{1,2,0}(s) = = \tau_{1,2}(s),\ \tau_{2,1,0}(s) = \tau_{2,1}(s)$.

Згідно з (9) та (53) також виконуються співвідношення

$$x_{2,\delta}(t) = x_2(t_0) + (t - t_0)(v_2(t_0) + \delta) - \int\limits_{t_0}^{t} \left(\int\limits_{t_0}^{\tau} \frac{Gm_1}{(x_{2,\delta}(s) - x_{1,\delta}(s - \tau_{1,2,\delta}(s)))^2}\, ds \right) d\tau \tag{58}$$

і

$$x_{1,\delta}(t) = x_1(t_0) + (t - t_0)v_1(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \left(\int\limits_{t_0}^{\tau} \frac{Gm_2}{(x_{2,\delta}(s - \tau_{2,1,\delta}(s)) - x_{1,\delta}(s))^2}\, ds \right) d\tau. \tag{59}$$

З'ясуємо вплив величини δ на функції $x_{2,\delta}(t) - x_{1,\delta}(t)$ і $v_{2,\delta}(t) - v_{1,\delta}(t)$ при $t > t_0$.

Зазначимо, що завдяки (54) і (55) ці функції залежать від $x_{2,\delta}(s) - x_{1,\delta}(s - \tau_{1,2,\delta}(s))$ і $x_{2,\delta}(s - \tau_{2,1,\delta}(s)) - x_{1,\delta}(s)$ і в точках s множини

$$R_\delta = \{s : s - \tau_{1,2,\delta}(s) = t_0\} \cup \{s : s - \tau_{2,1,\delta}(s) = t_0\}$$

праві частини (56) і (57) є неперервними і можуть бути не диференційовними. На підставі строгого зростання функцій $s - \tau_{1,2,\delta}(s)$ і $s - \tau_{2,1,\delta}(s)$ множина R_δ для кожного $\delta \geq 0$ містить одну або дві точки.

Продиференціюємо обидві частини (56) і (57) по δ. При $s \in \big[t_0, t^*\big) \setminus R_\delta$ отримаємо

$$c\,\frac{d\tau_{2,1,\delta}(s)}{d\delta} = \frac{d(x_{2,\delta}(s - \tau_{2,1,\delta}(s)) - x_{1,\delta}(s))}{d\delta} = -v_{2,\delta}(s - \tau_{2,1,\delta}(s))\,\frac{d\tau_{2,1,\delta}(s)}{d\delta} - \frac{dx_{1,\delta}(s)}{d\delta},$$

$$c\,\frac{d\tau_{1,2,\delta}(s)}{d\delta} = \frac{d(x_{2,\delta}(s) - x_{1,\delta}(s - \tau_{1,2,\delta}(s)))}{d\delta} = \frac{dx_{2,\delta}(s)}{d\delta} + v_{1,\delta}(s - \tau_{1,2,\delta}(s))\,\frac{d\tau_{1,2,\delta}(s)}{d\delta}.$$

Звідси одержуємо, що

$$\frac{d\tau_{2,1,\delta}(s)}{d\delta} = -\frac{1}{c + v_{2,\delta}(s - \tau_{2,1,\delta}(s))}\,\frac{dx_{1,\delta}(s)}{d\delta}, \tag{60}$$

$$\frac{d\tau_{1,2,\delta}(s)}{d\delta} = \frac{1}{c - v_{1,\delta}(s - \tau_{1,2,\delta}(s))}\,\frac{dx_{2,\delta}(s)}{d\delta}, \tag{61}$$

якщо $s \in \big[t_0, t^*\big) \setminus R_\delta$.

Далі продиференціюємо обидві частини (58) і (59) по змінній δ. З урахуванням (60) і (61) маємо

$$\frac{dx_{2,\delta}(t)}{d\delta} = t - t_0 +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t} \left(\int\limits_{t_0}^{\tau} \frac{2Gm_1}{(x_{2,\delta}(s) - x_{1,\delta}\,(s - \tau_{1,2,\delta}(s)))^3}\,\frac{d((x_{2,\delta}(s) - x_{1,\delta}(s - \tau_{1,2,\delta}(s)))}{d\delta}\, ds \right) d\tau =$$

$$= t - t_0 + \int_{t_0}^{t} \left(\int_{t_0}^{\tau} \frac{2Gm_1}{(x_{2,\delta}(s) - x_{1,\delta}(s - \tau_{1,2,\delta}(s)))^3} \frac{c\, d\tau_{1,2,\delta}(s)}{d\delta}\, ds \right) d\tau =$$

$$= t - t_0 + \int_{t_0}^{t} \left(\int_{t_0}^{\tau} \frac{2Gm_1}{(x_{2,\delta}(s) - x_{1,\delta}(s - \tau_{1,2,\delta}(s)))^3} \frac{c}{c - v_{1,\delta}(s - \tau_{1,2,\delta}(s))} \frac{dx_{2,\delta(s)}}{d\delta}\, ds \right) d\tau \tag{62}$$

і

$$\frac{dx_{1,\delta}(t)}{d\delta} = -\int_{t_0}^{t} \left(\int_{t_0}^{\tau} \frac{2Gm_2}{(x_{2,\delta}(s - \tau_{2,1,\delta}(s)) - x_{1,\delta}(s))^3} \frac{d(x_{2,\delta}(s - \tau_{2,1,\delta}(s)) - x_{1,\delta}(s))}{d\delta}\, ds \right) d\tau =$$

$$= -\int_{t_0}^{t} \left(\int_{t_0}^{\tau} \frac{2Gm_2}{(x_{2,\delta}(s - \tau_{2,1,\delta}(s)) - x_{1,\delta}(s))^3} \frac{c\tau_{2,1,\delta}(s)}{d\delta}\, ds \right) d\tau =$$

$$= \int_{t_0}^{t} \left(\int_{t_0}^{\tau} \frac{2Gm_2}{(x_{2,\delta}(s - \tau_{2,1,\delta}(s)) - x_{1,\delta}(s))^3} \frac{c}{c + v_{2,\delta}(s - \tau_{2,1,\delta}(s))} \frac{dx_{1,\delta(s)}}{d\delta}\, ds \right) d\tau. \tag{63}$$

Диференціювання під знаками інтегралів в (62) і (63) можливе завдяки теоремам Лебега про граничний перехід під знаком інтеграла та інтегровності за Ріманом обмеженої майже скрізь неперервної функції [13, с. 120, 125] (підінтегральні функції в (62) і (63) неперервні й обмежені на $[t_0, t) \setminus R_\delta$, ці функції в точках множини R_δ мають скінченні верхні й нижні (праві й ліві) похідні числа [14], що не впливають на значення відповідних інтегралів).

Зазначимо, що завдяки (56), (57) та додатності запізнень $\tau_{2,1,\delta}(s)$ і $\tau_{1,2,\delta}(s)$ функції

$$\frac{2Gm_1}{(x_{2,\delta}(s) - x_{1,\delta}(s - \tau_{1,2,\delta}(s)))^3} \frac{c}{c - v_{1,\delta}(s - \tau_{1,2,\delta}(s))} \tag{64}$$

і

$$\frac{2Gm_2}{(x_{2,\delta}(s - \tau_{2,1,\delta}(s)) - x_{1,\delta}(s))^3} \frac{c}{c + v_{2,\delta}(s - \tau_{2,1,\delta}(s))} \tag{65}$$

в (62) і (63) неперервні і додатні на кожному проміжку $[t_0, t),$ для всіх точок якого

$$(x_{2,\delta}(s) - x_{1,\delta}(s - \tau_{1,2,\delta}(s)))(x_{2,\delta}(s - \tau_{2,1,\delta}(s)) - x_{1,\delta}(s)) \neq 0. \tag{66}$$

Тому на підставі (62) функція $dx_{2,\delta}(t)/d\delta$ набуватиме додатних значень на кожному інтервалі $(t_0, t),$ для всіх точок якого виконується співвідношення (66). Функція $dx_{1,\delta}(t)/d\delta$ на цьому інтервалі набуватиме нульового значення, оскільки співвідношення (63) по відношенню до $dx_{1,\delta}(t)/d\delta$ є лінійним однорідним рівнянням із квазінільпотентним оператором.

Отже,

$$\frac{d(x_{2,\delta}(t) - x_{1,\delta}(t))}{d\delta} = \frac{dx_{2,\delta}(t)}{d\delta} - \frac{dx_{1,\delta}(t)}{d\delta} = \frac{dx_{2,\delta}(t)}{d\delta} > 0 \tag{67}$$

для кожного $t > t_0,$ для якого для всіх точок $s \in (t_0, t)$ виконується співвідношення (66).

Далі продиференціюємо обидві частини (54) по змінній $\delta.$ Враховуючи (56), (57), (60), (61) та властивості функцій (64), (65), $dx_{2,\delta}(t)/d\delta$ і $dx_{1,\delta}(t)/d\delta,$ отримуємо, що

$$\frac{d(v_{2,\delta}(t) - v_{1,\delta}(t))}{d\delta} =$$

$$= 1 + \int\limits_{t_0}^{t} \frac{2Gm_1}{(x_{2,\delta}(s) - x_{1,\delta}(s - \tau_{1,2,\delta}(s)))^3} \frac{c}{c - v_{1,\delta}(s - \tau_{1,2,\delta}(s))} \frac{dx_{2,\delta(s)}}{d\delta}\, ds +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t} \frac{2Gm_2}{(x_{2,\delta}(s - \tau_{2,1,\delta}(s)) - x_{1,\delta}(s))^3} \frac{c}{c + v_{2,\delta}(s - \tau_{2,1,\delta}(s))} \frac{dx_{1,\delta(s)}}{d\delta}\, ds =$$

$$= 1 + \int\limits_{t_0}^{t} \frac{2Gm_1}{(x_{2,\delta}(s) - x_{1,\delta}(s - \tau_{1,2,\delta}(s)))^3} \frac{c}{c - v_{1,\delta}(s - \tau_{1,2,\delta}(s))} \frac{dx_{2,\delta(s)}}{d\delta}\, ds \geq 1 \qquad (68)$$

для кожного $t > t_0,$ для якого для всіх точок $s \in (t_0, t)$ виконується співвідношення (66).

Нерівність (68) виконується для всіх $\delta \geq 0.$

Із наведених міркувань та співвідношень (49), (50), (67) і (68) випливає, що

$$\lim_{t \to +\infty} (x_{2,\delta}(t) - x_{1,\delta}(t)) = +\infty$$

для всіх $\delta \geq 0.$

Отже, завдяки (48) $[v_2(t_0) - v_1(t_0), +\infty) \subset \mathcal{V}_2.$

Із наведених міркувань також випливає, що $\mathcal{V}_2 = \bigcup_{v \in \mathcal{V}_2} [v, +\infty).$ Тому $\mathcal{V}_2$ — зв'язна множина.

Розглянемо швидкість руху $v_{2,c}^* = v_2(t_0) - v_1(t_0)$ точки M_2 відносно точки $M_1,$ що визначається рівністю $v_{2,c}^* = \inf_{v \in \mathcal{V}_2} v.$

Покажемо, що

$$v_{2,c}^* \in \mathcal{V}_2. \qquad (69)$$

Звідси буде випливати замкненість множини $\mathcal{V}_2.$

Припустимо, що співвідношення (69) є хибним, тобто

$$v_{2,c}^* \in \mathcal{V}_1. \qquad (70)$$

Згідно з лемою 2 $v_{2,\infty}^* \leq v_{2,c}^*.$ Тому $v_{2,c}^* > 0.$ На підставі (32), (33) і (70) на деякому проміжку $[t_0, t_1),$ $t_1 > t_0,$ швидкість $v_2(t) - v_1(t)$ руху точки M_2 відносно точки M_1 буде додатною, строго зменшуватиметься і $v_2(t_1) - v_1(t_1) = 0,$ причому відстань $x_2(t) - x_1(t)$ між точками M_1 і M_2 на проміжку $[t_0, t_1)$ буде строго зростаючою. Завдяки міркуванням з доведення леми 2, на деякому проміжку $[t_1, t_2),$ $t_2 > t_1,$ різниця $x_2(t) - x_1(t)$ буде строго спадною і $\lim_{t \to t_2 - 0}(x_2(t) - x_1(t)) = 0$ (точки M_1 і M_2 в момент часу t_2 зіткнуться).

Зафіксуємо довільне $t_2^+ \in (t_1, t_2).$

Розглянемо довільне число $\delta > 0$ і розв'язки $x_{1,\delta}(t)$ і $x_{2,\delta}(t)$ системи (9), що задовольняють умови (51) – (53), для яких

$$v_{2,\delta}(t_0) - v_{1,\delta}(t_0) = v_2(t_0) - v_1(t_0) + \delta = v^*_{2,c} + \delta \in \mathcal{V}_2.$$

Із неперервної залежності розв'язків $x_{1,\delta}(t)$ і $x_{2,\delta}(t)$ від δ випливає, що

$$\lim_{\delta\to+0} \max_{t\in[t_0,t_2^+]} \left|(x_{2,\delta}(t) - x_{1,\delta}(t)) - (x_2(t) - x_1(t))\right| = 0.$$

Тому для достатньо малих значень $\delta > 0$ відстань $x_{2,\delta}(t) - x_{1,\delta}(t)$ між точками M_1 і M_2 не буде строго зростаючою на $[t_0, +\infty)$, що неможливо, оскільки $\left(v^*_{2,c}, +\infty\right) \subset \mathcal{V}_2$.

Отже, припущення про виконання співвідношення (70) є хибним.

Лему 4 доведено.

Лема 5. *Множина $\mathcal{V}_1$ є відкритою і зв'язною.*

Це твердження є наслідком леми 4.

Згідно з наведеними лемами та їхніми доведеннями правильним є таке твердження.

Теорема 2. *Нехай функції $\psi_1(s)$ і $\psi_2(s)$ є початковими значеннями розв'язку $x_1(t)$ і $x_2(t)$ системи (9), ці функції є неперервно диференційовними на $\operatorname{int} I_{t_0}$ і неперервними на I_{t_0}, $\psi_2(s) - \psi_1(s) > 0$ для всіх $s \in I_{t_0}$, похідні $\dot\psi_1(s)$, $\dot\psi_2(s)$ обмежені та інтегровні на $\operatorname{int} I_{t_0}$, існують границі $\lim_{s\to t_0-0} \dot\psi_i(s)$, $i = \overline{1,2}$, $v_1(t_0), v_2(t_0)$ — довільні числа з проміжку $(-c, c)$, для яких $v_2(t_0) - v_1(t_0) \in (-c, c)$, і границі $\lim_{s\to t_0-0} \dot\psi_1(s))$, $\lim_{s\to t_0-0} \dot\psi_2(s)$ можуть не збігатися з $v_1(t_0))$ і $v_2(t_0))$ відповідно.*

Нехай:

1) $x_1(t - \tau_{1,2}(t)) = \psi_1(t - \tau_{1,2}(t))$ для всіх $t \ge t_0$, для яких $t - \tau_{1,2}(t) \in [t_0 - \tau_{1,2}(t_0), t_0]$, і $x_2(t - \tau_{2,1}(t)) = \psi_2(t - \tau_{2,1}(t))$ для всіх $t \ge t_0$, для яких $t - \tau_{2,1}(t) \in [t_0 - \tau_{2,1}(t_0), t_0]$;

2) $c\tau_{2,1}(t_0) = \psi_2(t_0 - \tau_{2,1}(t_0)) - \psi_1(t_0)$ і $c\tau_{1,2}(t_0) = \psi_2(t_0) - \psi_1(t_0 - \tau_{1,2}(t_0))$.

Тоді:

1) якщо $v_2(t_0) - v_1(t_0) \in (-c, 0]$, то існує таке число $T > t_0$, що для розв'язку $x_1(t)$, $x_2(t)$ системи (9) різниця $x_2(t) - x_1(t)$ на проміжку $[t_0, T)$ є строго спадною і $\lim_{t\to T-0}(x_2(t) - x_1(t)) = 0$ (точки M_1 і M_2 в момент часу T зіткнуться);

2) існує таке число $v^*_{2,c} > v^*_{2,\infty}$, що

а) якщо $v_2(t_0) - v_1(t_0) \in \left(0, v^*_{2,c}\right)$, то для деяких чисел T_1, T_2 ($t_0 < T_1 < T_2$) для розв'язку $x_1(t)$, $x_2(t)$ системи (9) різниця $x_2(t) - x_1(t)$ на проміжках $[t_0, T_1)$ і $[T_1, T_2)$ є строго зростаючою і строго спадною відповідно і $\lim_{t\to T_2-0}(x_2(t) - x_1(t)) = 0$ (точки M_1 і M_2 в момент часу T_2 зіткнуться);

б) якщо $v_2(t_0) - v_1(t_0) \ge v^*_{2,c}$, то для розв'язку $x_1(t)$, $x_2(t)$ системи (9) різниця $x_2(t) - x_1(t)$ на $[t_0, +\infty)$ є строго зростаючою і $\lim_{t\to+\infty}(x_2(t) - x_1(t)) = +\infty$.

Зауваження 2. У теоремі 2 $x_2(t) - x_1(t)$ — це відстань між точками M_1 і M_2.

Зауваження 3. Швидкість $v^*_{2,c}$ в теоремі 2 є другою космічною швидкістю з урахуванням швидкості гравітації. Це мінімальна швидкість $v_2(t_0) - v_1(t_0)$, з якою має рухатися точка M_2 відносно точки M_1 у момент часу t_0, з координатами $x_2(t)$ і $x_1(t)$ в момент часу t, щоб $\lim_{t\to+\infty}(x_2(t) - x_1(t)) = +\infty$. Згідно з лемою 2 і доведенням леми 4 $v^*_{2,c} > v^*_{2,\infty}$, тобто *реальна друга космічна швидкість $v^*_{2,c}$ (завдяки скінченності швидкості гравітації) більша другої космічної швидкості $v^*_{2,\infty}$, що розглядається в класичній небесній механіці.*

4.3. Оцінки різниці $v^*_{2,c} - v^*_{2,\infty}$. Для з'ясування величини різниці $v^*_{2,c} - v^*_{2,\infty}$ нам потрібні допоміжні твердження.

Лема 6. *Нехай для розв'язку $x_1(t)$ і $x_2(t)$ системи (9) виконуються умови теореми 2. Якщо*

$$(x_2(s) - x_1(s - \tau_{1,2}(s)))(x_2(s - \tau_{2,1}(s)) - x_1(s)) \neq 0$$

для кожного $s \in [t_0, T)$, то справджуються рівності

$$\frac{1}{(x_2(s) - x_1(s - \tau_{1,2}(s)))^2} = \left(1 + \frac{v_1^*(s)}{c}\right)^2 \frac{1}{(x_2(s) - x_1(s))^2} \tag{71}$$

і

$$\frac{1}{(x_2(s - \tau_{2,1}(s)) - x_1(s))^2} = \left(1 + \frac{v_2^*(s)}{c}\right)^2 \frac{1}{(x_2(s) - x_1(s))^2} \tag{72}$$

для всіх $s \in [t_0, T)$, де

$$v_1^*(s) = \frac{x_1(s - \tau_{1,2}(s)) - x_1(s)}{\tau_{1,2}(s)} \qquad \text{і} \qquad v_2^*(s) = \frac{x_2(s) - x_2(s - \tau_{2,1}(s))}{\tau_{2,1}(s)}.$$

Зазначимо, що $v_1^*(s)$ і $v_2^*(s)$ є середніми швидкостями руху точок M_1 і M_2 на проміжках $[s - \tau_{1,2}(s), s]$ і $[s - \tau_{2,1}(s), s]$ відповідно.

Доведення. Зафіксуємо довільне $s \in [t_0, T)$. Легко перевірити, що правильними є рівності

$$\frac{1}{(x_2(s) - x_1(s - \tau_{1,2}(s)))^2} = \left(1 + \frac{-x_1(s) + x_1(s - \tau_{1,2}(s))}{x_2(s) - x_1(s - \tau_{1,2}(s))}\right)^2 \frac{1}{(x_2(s) - x_1(s))^2} \tag{73}$$

і

$$\frac{1}{(x_2(s - \tau_{2,1}(s)) - x_1(s))^2} = \left(1 + \frac{x_2(s) - x_2(s - \tau_{2,1}(s))}{x_2(s - \tau_{2,1}(s)) - x_1(s)}\right)^2 \frac{1}{(x_2(s) - x_1(s))^2}. \tag{74}$$

Згідно з (9), (24) і (25)

$$x_2(s) - x_1(s - \tau_{1,2}(s)) = c\tau_{1,2}(s) \qquad \text{і} \qquad x_2(s - \tau_{2,1}(s)) - x_1(s) = c\tau_{2,1}(s).$$

Тому

$$\frac{-x_1(s) + x_1(s - \tau_{1,2}(s))}{x_2(s) - x_1(s - \tau_{1,2}(s))} = \frac{v_1^*(s)}{c} \qquad \text{і} \qquad \frac{x_2(s) - x_2(s - \tau_{2,1}(s))}{x_2(s - \tau_{2,1}(s)) - x_1(s)} = \frac{v_2^*(s)}{c}.$$

Звідси з урахуванням (73) і (74) отримуємо (71) і (72).

Лему 6 доведено.

Лема 7. *Якщо швидкості руху точок M_1 і M_2 є обмеженими на проміжку $[t_0, +\infty)$ і числа ε_1, ε_2 є такими, що*

$$\frac{m_1\varepsilon_1}{m_1 + m_2} \geq \frac{\sup_{s > t_0 - \tau_{1,2}(t_0)} \left|v_1^*(s)\right|}{c} \qquad \text{і} \qquad \frac{m_2\varepsilon_2}{m_1 + m_2} \geq \frac{\sup_{s > t_0 - \tau_{1,2}(t_0)} \left|v_2^*(s)\right|}{c}, \tag{75}$$

то

$$\sqrt{\left(1 + \frac{m_1\varepsilon_1}{m_1 + m_2}\right)^2 \frac{2Gm_1}{x_2(t_0) - x_1(t_0)} + \left(1 + \frac{m_2\varepsilon_2}{m_1 + m_2}\right)^2 \frac{2Gm_2}{x_2(t_0) - x_1(t_0)}} \in \mathcal{V}_2. \tag{76}$$

Доведення. Використаємо співвідношення (33) у випадку

$$v_2(t_0) - v_1(t_0) =$$
$$= \sqrt{\left(1 + \frac{m_1\varepsilon_1}{m_1+m_2}\right)^2 \frac{2Gm_1}{x_2(t_0)-x_1(t_0)} + \left(1 + \frac{m_2\varepsilon_2}{m_1+m_2}\right)^2 \frac{2Gm_2}{x_2(t_0)-x_1(t_0)}}. \quad (77)$$

Це співвідношення з урахуванням (12) має вигляд

$$\big(v_2(t) - v_1(t)\big)^2 = \left(1 + \frac{m_1\varepsilon_1}{m_1+m_2}\right)^2 \frac{2Gm_1}{x_2(t_0)-x_1(t_0)} + \\ + \left(1 + \frac{m_2\varepsilon_2}{m_1+m_2}\right)^2 \frac{2Gm_2}{x_2(t_0)-x_1(t_0)} - \\ - \int\limits_{t_0}^{t} \frac{2Gm_1\, d(x_2(s)-x_1(s))}{(x_2(s)-x_1(s-\tau_{1,2}(s)))^2} - \int\limits_{t_0}^{t} \frac{2Gm_2\, d(x_2(s)-x_1(s))}{(x_2(s-\tau_{2,1}(s))-x_1(s))^2}. \quad (78)$$

Покажемо правильність включення (76).

Функція $v_2(t) - v_1(t),$ для якої справджується рівність (77), є неперервною в точці $t_0.$ Тому згідно з (78) множина проміжків $[t_0, \theta),\ \theta > t_0,$ на кожному з яких $v_2(t) - v_1(t) > 0,$ є не порожньою.

Припустимо, що для деякого $T > t_0$

$$v_2(t) - v_1(t) > 0 \quad \text{для всіх} \quad t \in [t_0, T) \quad (79)$$

і

$$v_2(T) - v_1(T) = 0. \quad (80)$$

Зазначимо, що завдяки (79) $x_2(T) - x_1(T) > 0.$

На підставі (71), (72) і (75) для всіх $t \in (t_0, T]$

$$\int\limits_{t_0}^{t} \frac{2Gm_1\, d(x_2(s)-x_1(s))}{(x_2(s)-x_1(s-\tau_{1,2}(s)))^2} + \int\limits_{t_0}^{t} \frac{2Gm_2\, d(x_2(s)-x_1(s))}{(x_2(s-\tau_{2,1}(s))-x_1(s))^2} = \\ = \int\limits_{t_0}^{t} \left(2Gm_1\left(1 + \frac{v_1^*(s)}{c}\right)^2 + 2Gm_2\left(1 + \frac{v_2^*(s)}{c}\right)^2\right) \frac{d(x_2(s)-x_1(s))}{(x_2(s)-x_1(s))^2} \le \\ \le \left(1 + \frac{\sup_{s>t_0-\tau_{1,2}(t_0)} \left|v_1^*(s)\right|}{c}\right)^2 2Gm_1 \int\limits_{t_0}^{t} \frac{d(x_2(s)-x_1(s))}{(x_2(s)-x_1(s))^2} + \\ + \left(1 + \frac{\sup_{s>t_0-\tau_{2,1}(t_0)} \left|v_2^*(s)\right|}{c}\right)^2 2Gm_2 \int\limits_{t_0}^{t} \frac{d(x_2(s)-x_1(s))}{(x_2(s)-x_1(s))^2} =$$

$$= \left(1 + \frac{\sup_{s>t_0-\tau_{1,2}(t_0)} \left|v_1^*(s)\right|}{c}\right)^2 \left(\frac{2Gm_1}{x_2(t_0)-x_1(t_0)} - \frac{2Gm_1}{x_2(T)-x_1(T)}\right) +$$

$$+ \left(1 + \frac{\sup_{s>t_0-\tau_{2,1}(t_0)} \left|v_2^*(s)\right|}{c}\right)^2 \left(\frac{2Gm_2}{x_2(t_0)-x_1(t_0)} - \frac{2Gm_2}{x_2(T)-x_1(T)}\right).$$

Завдяки (75) і (78)

$$\big(v_2(t)-v_1(t)\big)^2 \geq \left(1+\frac{m_1\varepsilon_1}{m_1+m_2}\right)^2 \frac{2Gm_1}{x_2(t_0)-x_1(t_0)} +$$

$$+ \left(1+\frac{m_2\varepsilon_2}{m_1+m_2}\right)^2 \frac{2Gm_2}{x_2(t_0)-x_1(t_0)} -$$

$$- \left(1 + \frac{\sup_{s>t_0-\tau_{1,2}(t_0)} \left|v_1^*(s)\right|}{c}\right)^2 \left(\frac{2Gm_1}{x_2(t_0)-x_1(t_0)} - \frac{2Gm_1}{x_2(T)-x_1(T)}\right) -$$

$$- \left(1 + \frac{\sup_{s>t_0-\tau_{2,1}(t_0)} \left|v_2^*(s)\right|}{c}\right)^2 \left(\frac{2Gm_2}{x_2(t_0)-x_1(t_0)} - \frac{2Gm_2}{x_2(T)-x_1(T)}\right) =$$

$$= \left(\left(1+\frac{m_1\varepsilon_1}{m_1+m_2}\right)^2 - \left(1 + \frac{\sup_{s>t_0-\tau_{1,2}(t_0)} \left|v_1^*(s)\right|}{c}\right)^2\right) \frac{2Gm_1}{x_2(t_0)-x_1(t_0)} +$$

$$+ \left(\left(1+\frac{m_2\varepsilon_2}{m_1+m_2}\right)^2 - \left(1 + \frac{\sup_{s>t_0-\tau_{2,1}(t_0)} \left|v_2^*(s)\right|}{c}\right)^2\right) \frac{2Gm_2}{x_2(t_0)-x_1(t_0)} +$$

$$+ \left(1 + \frac{\sup_{s>t_0-\tau_{1,2}(t_0)} \left|v_1^*(s)\right|}{c}\right)^2 \frac{2Gm_1}{x_2(T)-x_1(T)} +$$

$$+ \left(1 + \frac{\sup_{s>t_0-\tau_{2,1}(t_0)} \left|v_2^*(s)\right|}{c}\right)^2 \frac{2Gm_2}{x_2(T)-x_1(T)} > 0,$$

що суперечить (80).

Отже, співвідношення (79) виконується і при $T=+\infty$. Тому, аналогічно з доведенням леми 3, $\lim_{t\to+\infty}(x_2(t)-x_1(t)) = +\infty$.

Отже, включення (76) виконується.

Лему 7 доведено.

Зауваження 4. Швидкості руху точок M_1 і M_2 є обмеженими на проміжку $[t_0,+\infty)$, якщо немає зіткнень цих точок, тобто $\inf_{t\geq t_0}(x_2(t)-x_2(t)) > 0$.

Зауваження 5. Згідно з лемою 7 та означенням $v_{2,c}^*$ справджується нерівність

$$v_{2,c}^* \leq v_{2,c,\varepsilon_1,\varepsilon_2}^*,$$

де

$$v^*_{2,c,\varepsilon_1,\varepsilon_2} = \sqrt{\left(1+\frac{m_1\varepsilon_1}{m_1+m_2}\right)^2 \frac{2Gm_1}{x_2(t_0)-x_1(t_0)} + \left(1+\frac{m_2\varepsilon_2}{m_1+m_2}\right)^2 \frac{2Gm_2}{x_2(t_0)-x_1(t_0)}}. \tag{81}$$

Лема 8. *Якщо додатні числа μ_1 і μ_2 є такими, що*

$$\frac{m_1\mu_1}{m_1+m_2} < \frac{\sup_{s>t_0-\tau_{1,2}(t_0)}\left|v_1^*(s)\right|}{c} \qquad i \qquad \frac{m_2\mu_2}{m_1+m_2} < \frac{\sup_{s>t_0-\tau_{1,2}(t_0)}\left|v_2^*(s)\right|}{c}, \tag{82}$$

то

$$\sqrt{\left(1+\frac{m_1\mu_1}{m_1+m_2}\right)^2 \frac{2Gm_1}{x_2(t_0)-x_1(t_0)} + \left(1+\frac{m_2\mu_2}{m_1+m_2}\right)^2 \frac{2Gm_2}{x_2(t_0)-x_1(t_0)}} \in \mathcal{V}_1. \tag{83}$$

Доведення. Використаємо співвідношення (33) у випадку

$$v_2(t_0)-v_1(t_0) = \sqrt{\left(1+\frac{m_1\mu_1}{m_1+m_2}\right)^2 \frac{2Gm_1}{x_2(t_0)-x_1(t_0)} + \left(1+\frac{m_2\mu_2}{m_1+m_2}\right)^2 \frac{2Gm_2}{x_2(t_0)-x_1(t_0)}}.$$

Це співвідношення має вигляд

$$\begin{aligned}\big(v_2(t)-v_1(t)\big)^2 = &\left(1+\frac{m_1\mu_1}{m_1+m_2}\right)^2 \frac{2Gm_1}{x_2(t_0)-x_1(t_0)} + \\ &+\left(1+\frac{m_2\mu_2}{m_1+m_2}\right)^2 \frac{2Gm_2}{x_2(t_0)-x_1(t_0)} - \\ &-\int\limits_{t_0}^{t} \frac{2Gm_1\, d(x_2(s)-x_1(s))}{(x_2(s)-x_1(s-\tau_{1,2}(s)))^2} - \int\limits_{t_0}^{t} \frac{2Gm_2\, d(x_2(s)-x_1(s))}{(x_2(s-\tau_{2,1}(s))-x_1(s))^2},\end{aligned} \tag{84}$$

Припустимо, що, як і при доведенні леми 2, включення (83) є хибним, тобто виконуються співвідношення

$$v_2(t)-v_1(t) > 0 \quad \text{для всіх} \quad t > t_0 \tag{85}$$

і

$$\lim_{t\to+\infty}(x_2(t)-x_1(t)) = +\infty. \tag{86}$$

Враховуючи рівності

$$\int\limits_{t_0}^{t} \frac{2G(m_1+m_2)}{(x_2(s)-x_1(s))^2}\, d(x_2(s)-x_1(s)) = \frac{2G(m_1+m_2)}{x_2(t_0)-x_1(t_0)} - \frac{2G(m_1+m_2)}{x_2(t)-x_1(t)}, \quad t \geq t_0,$$

які є правильними завдяки (85) і (86), подамо (84) у вигляді

$$\big(v_2(t)-v_1(t)\big)^2 = \left(\left(1+\frac{m_1\mu_1}{m_1+m_2}\right)^2 - 1\right) \frac{2Gm_1}{x_2(t_0)-x_1(t_0)} +$$

$$+\left(\left(1+\frac{m_2\mu_2}{m_1+m_2}\right)^2-1\right)\frac{2Gm_2}{x_2(t_0)-x_1(t_0)}+$$

$$+\frac{2G(m_1+m_2)}{x_2(t)-x_1(t)}-\int\limits_{t_0}^{t}\frac{2Gm_1\,d(x_2(s)-x_1(s))}{(x_2(s)-x_1(s-\tau_{1,2}(s)))^2}-$$

$$-\int\limits_{t_0}^{t}\frac{2Gm_2\,d(x_2(s)-x_1(s))}{(x_2(s-\tau_{2,1}(s))-x_1(s))^2}+\int\limits_{t_0}^{t}\frac{2G(m_1+m_2)}{(x_2(s)-x_1(s))^2}\,d(x_2(s)-x_1(s)). \tag{87}$$

Застосовуючи до (87) лему 6, отримуємо, що для всіх $t\geq t_0$

$$\big(v_2(t)-v_1(t)\big)^2=\left(\left(1+\frac{m_1\mu_1}{m_1+m_2}\right)^2-1\right)\frac{2Gm_1}{x_2(t_0)-x_1(t_0)}+$$

$$+\left(\left(1+\frac{m_2\mu_2}{m_1+m_2}\right)^2-1\right)\frac{2Gm_2}{x_2(t_0)-x_1(t_0)}+\frac{2G(m_1+m_2)}{x_2(t)-x_1(t)}-$$

$$-2Gm_1\int\limits_{t_0}^{t}\left(\left(1+\frac{v_1^*(s)}{c}\right)^2-1\right)\frac{d(x_2(s)-x_1(s))}{(x_2(s)-x_1(s))^2}-$$

$$-2Gm_2\int_{t_0}^{t}\left(\left(1+\frac{v_2^*(s)}{c}\right)^2-1\right)\frac{d(x_2(s)-x_1(s))}{(x_2(s)-x_1(s))^2}\geq$$

$$\geq\left(\left(1+\frac{m_1\mu_1}{m_1+m_2}\right)^2-1\right)\frac{2Gm_1}{x_2(t_0)-x_1(t_0)}+$$

$$+\left(\left(1+\frac{m_2\mu_2}{m_1+m_2}\right)^2-1\right)\frac{2Gm_2}{x_2(t_0)-x_1(t_0)}+\frac{2G(m_1+m_2)}{x_2(t)-x_1(t)}-$$

$$-\left(\left(1+\frac{\sup_{s>t_0-\tau_{1,2}(t_0)}\left|v_1^*(s)\right|}{c}\right)^2-1\right)\left(\frac{2Gm_1}{x_2(t_0)-x_1(t_0)}-\frac{2Gm_1}{x_2(t)-x_1(t)}\right)-$$

$$-\left(\left(1+\frac{\sup_{s>t_0-\tau_{2,1}(t_0)}\left|v_2^*(s)\right|}{c}\right)^2-1\right)\left(\frac{2Gm_2}{x_2(t_0)-x_1(t_0)}-\frac{2Gm_2}{x_2(t)-x_1(t)}\right).$$

Звідси з урахуванням рівності $\lim_{t\to+\infty}1/(x_2(t)-x_1(t))=0$ та вимог (82) до μ_1 і μ_2 випливає існування числа $t_1>t_0$, для якого $v_2(t_1)-v_1(t_1)=0$, що суперечить (85).

Отже, включення (83) у випадку виконання (82) є правильним.

Лему 8 доведено.

Зауваження 6. Справджується нерівність

$$v_{2,\infty}^*<v_{2,\infty,\mu_1,\mu_2}^*,$$

де

$$v^*_{2,\infty,\mu_1,\mu_2} = \sqrt{\left(1+\frac{m_1\mu_1}{m_1+m_2}\right)^2 \frac{2Gm_1}{x_2(t_0)-x_1(t_0)} + \left(1+\frac{m_2\mu_2}{m_1+m_2}\right)^2 \frac{2Gm_2}{x_2(t_0)-x_1(t_0)}}. \tag{88}$$

Ця нерівність — наслідок співвідношень

$$\left(1+\frac{m_1\mu_1}{m_1+m_2}\right)^2 \frac{2Gm_1}{x_2(t_0)-x_1(t_0)} + \left(1+\frac{m_2\mu_2}{m_1+m_2}\right)^2 \frac{2Gm_2}{x_2(t_0)-x_1(t_0)} >$$
$$> \frac{2Gm_1}{x_2(t_0)-x_1(t_0)} + \frac{2Gm_2}{x_2(t_0)-x_1(t_0)} = v^*_{2,\infty}.$$

Згідно з наведеними дослідженнями $0 < v^*_{2,\infty} < v^*_{2,\infty,\mu_1,\mu_2} < v^*_{2,c} \leq v^*_{2,c,\varepsilon_1,\varepsilon_2} < +\infty$ і

$$0 < v^*_{2,\infty,\mu_1,\mu_2} - v^*_{2,\infty} < v^*_{2,c} - v^*_{2,\infty} \leq v^*_{2,c,\varepsilon_1,\varepsilon_2} - v^*_{2,\infty}. \tag{89}$$

Завдяки (89) та рівностям (12), (81), (88) справджується таке твердження про оцінки для різниці $v^*_{2,c} - v^*_{2,\infty}$.

Теорема 3. *Для других космічних швидкостей $v^*_{2,c}$ і $v^*_{2,\infty}$ справджується співвідношення*

$$0 < \sqrt{\left(1+\frac{m_1\mu_1}{m_1+m_2}\right)^2 \frac{2Gm_1}{x_2(t_0)-x_1(t_0)} + \left(1+\frac{m_2\mu_2}{m_1+m_2}\right)^2 \frac{2Gm_2}{x_2(t_0)-x_1(t_0)}} -$$
$$- \sqrt{\frac{2G(m_1+m_2)}{x_2(t_0)-x_1(t_0)}} < v^*_{2,c} - v^*_{2,\infty} \leq -\sqrt{\frac{2G(m_1+m_2)}{x_2(t_0)-x_1(t_0)}} +$$
$$+ \sqrt{\left(1+\frac{m_1\varepsilon_1}{m_1+m_2}\right)^2 \frac{2Gm_1}{x_2(t_0)-x_1(t_0)} + \left(1+\frac{m_2\varepsilon_2}{m_1+m_2}\right)^2 \frac{2Gm_2}{x_2(t_0)-x_1(t_0)}} \tag{90}$$

для всіх ε_1, ε_2, μ_1 і μ_2, що задовольняють (75) і (82).

Зауваження 7. У зв'язку з тим, що різниці $\varepsilon_1 - \mu_1$ і $\varepsilon_2 - \mu_2$ можуть бути як завгодно малими, з (90) та (12) випливає, що

$$v^*_{2,c} = \sqrt{\left(1+\frac{m_1\varepsilon_1}{m_1+m_2}\right)^2 \frac{2Gm_1}{x_2(t_0)-x_1(t_0)} + \left(1+\frac{m_2\varepsilon_2}{m_1+m_2}\right)^2 \frac{2Gm_2}{x_2(t_0)-x_1(t_0)}}, \tag{91}$$

де

$$\frac{m_1\varepsilon_1}{m_1+m_2} = \frac{\sup_{s>t_0-\tau_{1,2}(t_0)} \left|v^*_1(s)\right|}{c} \qquad \text{і} \qquad \frac{m_2\varepsilon_2}{m_1+m_2} = \frac{\sup_{s>t_0-\tau_{1,2}(t_0)} \left|v^*_2(s)\right|}{c}. \tag{92}$$

Зауваження 8. Друга космічна швидкість $v^*_{2,\infty}$ у небесній механіці Ньютона отримується при $c = +\infty$ з другої космічної швидкості $v^*_{2,c}$ небесної механіки, що враховує скінченність швидкості гравітації (формула (91) є узагальненням формули (12)). Справді, на підставі (12), (91) і (92) $\lim_{c\to+\infty} v^*_{2,c} = v^*_{2,\infty}$.

5. Друга космічна швидкість на поверхні Землі. З'ясуємо величину другої космічної швидкості $v^*_{2,c}$ на поверхні Землі. Нагадаємо, що $v^*_{2,\infty} = 11{,}2$ км $\cdot$ с$^{-1}$ у випадку механіки Ньютона (див. [15, с. 28]).

Використаємо інерціальну систему координат таку, що і в п. 4 (див. рис. 1).

Розглянемо тіло з масою m, що до моменту часу t_0, включаючи і цей момент, знаходиться на поверхні Землі, маса і радіус якого відповідно дорівнюють $M_\oplus$ і R. Вважаємо, що в момент часу t_0 тіло починає рухатися зі швидкістю $v_2(t_0) > 0$ у вертикальному напрямку (у напрямку координатної осі Ox). Тоді Земля починає рухатися в протилежному напрямку зі швидкістю $v_1(t_0) < 0$. Вважаємо, що

$$v_2(t_0) - v_1(t_0) = v^*_{2,c} \tag{93}$$

і сили опору відсутні.

У припущенні, що центр Землі збігається з точкою O, рух Землі і тіла буде описуватися системою рівнянь (9), в якій $m_1 = M_\oplus,\ m_2 = m,$ і для якої $x_1(s) = 0,\ x_2(s) = R$ для $s \le t_0,\ \dot{x}_1(t_0 - 0) = \dot{x}_2(t_0 - 0) = 0,\ \dot{x}_1(t_0 + 0) = v_1(t_0)$ і $\dot{x}_2(t_0 + 0) = v_2(t_0)$. У нашому випадку $x_2(t_0) - x_1(t_0) = R$ і розглянуті початкові умови задовольняють загальні вимоги до системи (9) і початкових значень її розв'язків (див. пп. 4.2).

На підставі (93) та доведення леми 4

$$\lim_{t\to+\infty}(x_2(t) - x_1(t)) = +\infty \qquad \text{і} \qquad \lim_{t\to+\infty}\big(v_2(t) - v_1(t)\big) = 0. \tag{94}$$

Враховуючи, що завдяки рівнянням системи (9) швидкості руху тіла і Землі будуть монотонно зменшуватися і завдяки початковим значенням цих швидкостей $v_1(t) < 0$ і $v_2(t) > 0$ для $t > t_0$, на підставі (94) отримуємо $\lim_{t\to+\infty} v_i(t) = 0,\ i = \overline{1,2}$. Тому

$$\sup_{s>t_0-\tau_{1,2}(t_0)} \big|v^*_1(s)\big| = -v_1(t_0) \qquad \text{і} \qquad \sup_{s>t_0-\tau_{2,1}(t_0)} \big|v^*_2(s)\big| = v_2(t_0). \tag{95}$$

З'ясуємо зв'язок між $v^*_{2,c}$ і $v^*_{2,\infty}$. Для цього використаємо крім (93) ще одне співвідношення, що пов'язує $v_2(t_0)$ і $v_1(t_0)$. Згідно з (9) і вимогами до руху тіла та Землі для кожного достатньо малого числа $\delta > 0$ справджується співвідношення

$$\begin{aligned} &mv_2(t_0+\delta) + M_\oplus v_1(t_0+\delta) - (mv_2(t_0-0) + M_\oplus v_1(t_0-0)) = \\ &= GmM_\oplus \int\limits_{t_0-0}^{t_0+\delta} \left(\frac{x_1(t-\tau_{1,2}(t)) - x_2(t)}{|x_1(t-\tau_{1,2}(t)) - x_2(t)|^3} + \frac{x_2(t-\tau_{2,1}(t)) - x_1(t)}{|x_2(t-\tau_{2,1}(t)) - x_1(t)|^3} \right) dt. \end{aligned} \tag{96}$$

Оскільки підінтегральна функція в (96) обмежена на проміжку $[t_0, t_0+\delta]$, то згідно з тим, що $v_2(t_0-0) = v_1(t_0-0) = 0$,

$$mv_2(t_0) + M_\oplus v_1(t_0) = 0. \tag{97}$$

На підставі (93) і (97) отримуємо

$$v_1(t_0) = \frac{-mv^*_{2,c}}{M_\oplus + m}, \qquad v_2(t_0) = \frac{M_\oplus v^*_{2,c}}{M_\oplus + m}. \tag{98}$$

Тому завдяки (92), (95) і (98)

$$\frac{M_\oplus \varepsilon_1}{M_\oplus + m} = \frac{m v^*_{2,c}}{c(M_\oplus + m)} \qquad \text{і} \qquad \frac{m\varepsilon_2}{M_\oplus + m} = \frac{M_\oplus v^*_{2,c}}{c(M_\oplus + m)}.$$

Звідси й (91) з урахуванням (12) отримуємо

$$v^*_{2,c} = \sqrt{\left(1 + \frac{m v^*_{2,c}}{c(M_\oplus + m)}\right)^2 \frac{2GM_\oplus}{R} + \left(1 + \frac{M_\oplus v^*_{2,c}}{c(M_\oplus + m)}\right)^2 \frac{2Gm}{R}}. \tag{99}$$

Знайдемо $v^*_{2,c}$, використовуючи (99). Піднесемо обидві частини (99) до другого степеня і подамо отримане співвідношення після відповідних перетворень у вигляді квадратного рівняння відносно $v^*_{2,c}$:

$$\left(1 - \frac{2GmM_\oplus}{c^2(M_\oplus + m)}\right)\left(v^*_{2,c}\right)^2 + \frac{8GmM_\oplus}{c(M_\oplus + m)R}\, v^*_{2,c} - \left(v^*_{2,\infty}\right)^2 = 0.$$

Отримуємо формулу про зв'язок між $v^*_{2,c}$ і $v^*_{2,\infty}$:

$$v^*_{2,c} = \frac{-\dfrac{4GmM_\oplus}{c(M_\oplus + m)R} + \sqrt{\dfrac{16G^2m^2M_\oplus^2}{c^2(M_\oplus + m)^2R^2} + \left(1 - \dfrac{2GmM_\oplus}{c^2(M_\oplus + m)}\right)\left(v^*_{2,\infty}\right)^2}}{1 - \dfrac{2GmM_\oplus}{c^2(M_\oplus + m)}}.$$

Цю формулу після відповідних перетворень можна подати у вигляді

$$v^*_{2,c} = \left(\sqrt{1 - \frac{2GmM_\oplus}{c^2(M_\oplus + m)} + \frac{8Gm^2M_\oplus^2}{c^2(M_\oplus + m)^3R}} + \sqrt{\frac{8Gm^2M_\oplus^2}{c^2(M_\oplus + m)^3R}}\right)^{-1} v^*_{2,\infty}. \tag{100}$$

Якщо врахувати, що $G = 6{,}67408 \times 10^{-11}$ м$^3\cdot$кг$^{-1}\cdot$с$^{-2}$, $M_\oplus = 5{,}9722 \times 10^{24}\cdot$кг, $c = 2{,}99792458 \times 10^8$ м$\cdot$с$^{-1}$ і $R = 6{,}371 \times 10^6$ м, то у випадку $m \ll M_\oplus$

$$v^*_{2,c} \approx \left(1 + 7{,}4259154861063335 \times 10^{-28}\{m\}\right) v^*_{2,\infty}, \tag{101}$$

де $\{m\}$ — числове значення маси m тіла. Похибка в (101) менша $10^{-28}\{m\}v^*_{2,\infty}$.

Із (100), (101) і того, що $v^*_{2,\infty} = \sqrt{2G(M_\oplus + m)/R}$, видно, що маса m тіла суттєво впливає на величину $v^*_{2,c}$, причому

$$\lim_{m\to 0} \frac{v^*_{2,c}}{v^*_{2,\infty}} = 1 \qquad \text{і} \qquad \lim_{m\to +\infty} \frac{v^*_{2,c}}{v^*_{2,\infty}} = \left(1 - \frac{2GM_\oplus}{c^2}\right)^{-1/2} \approx 1{,}0044646.$$

6. Нестійкість руху точок M_1 і M_2. Рух точок M_1 і M_2, що описується системою рівнянь (9), є *нестійким за Ляпуновим*, якщо відповідний розв'язок $x_1(t)$ і $x_2(t)$ системи (9) нестійкий за Ляпуновим [16].

Теорема 4. *Прямолінійний рух точок M_1 і M_2, що описується системою рівнянь (9), для якого $\lim_{t\to+\infty}(x_2(t) - x_1(t)) = +\infty$, є нестійким за Ляпуновим.*

Доведення. Можливі випадки: 1) $v_2(t_0) - v_1(t_0) = v^*_{2,c}$; 2) $v_2(t_0) - v_1(t_0) > v^*_{2,c}$.

У першому випадку як завгодно малі збурення початкових значень розв'язків системи (9) та як завгодно малі збурення δ_1 і δ_2 швидкостей $v_1(t_0)$ і $v_2(t_0)$ можуть призвести до того, що різниця $(v_2(t_0) + \delta_2) - (v_1(t_0) + \delta_1)$ стане меншою $v^*_{2,c}$. У цьому випадку за теоремою 2 точки M_1 і M_2 зіткнуться, а без збурень ці точки рухатимуться так, що $\lim_{t\to+\infty}(x_2(t) - x_1(t)) = +\infty$. Тому рух точок M_1 і M_2 нестійкий за Ляпуновим.

У другому випадку зафіксуємо як завгодно мале $\delta > 0$ і використаємо розв'язки $x_1(t)$ і $x_2(t)$ та $x_{1,\delta}(t)$ і $x_{2,\delta}(t)$ системи (9), що розглядалися в доведенні леми 4.

Згідно з (68) $v_{2,\delta}(t) - v_{1,\delta}(t) \geq v_2(t) - v_1(t) + \delta$ для всіх $t \geq t_0$.

Оскільки також $v_2(t) - v_1(t) > 0$ для всіх $t \geq t_0$ і $\lim_{t\to+\infty}(x_2(t) - x_1(t)) = +\infty$, то $\lim_{t\to+\infty}((x_{2,\delta}(t) - x_{1,\delta}(t)) - (x_2(t) - x_1(t))) = +\infty$. Звідси та довільності вибору числа $\delta > 0$ випливає нестійкість за Ляпуновим розв'язку $x_1(t)$ і $x_2(t)$ системи (9).

Отже, рух точок M_1 і M_2 в другому випадку також нестійкий за Ляпуновим.

Теорему 4 доведено.

7. Додаткові зауваження та літературні вказівки.

1. Задача двох тіл у випадку класичної небесної механіки була об'єктом досліджень багатьох математиків і механіків (див., наприклад, [17 – 19]).

Фундаментальні результати були отримані Кеплером [17] і Ньютоном [9].

Кеплер побудував кінематичну картину руху двох тіл, подану за допомогою трьох його законів [17, 20]. Із цих законів Ньютон вивів закон всесвітнього тяжіння, який разом із відкритими ним ще трьома законами руху тіл дав змогу побудувати динамічну картину руху тіл. Згідно з дослідженнями Ньютона траєкторії двох тіл розміщені на кривих, що називаються конічними перерізами, або на деяких прямих [9, 10].

2. Дослідження прямолінійного руху двох тіл з урахуванням швидкості гравітації і висновком про другу космічну швидкість (у випадку двох тіл) наведено в статті вперше. Ця швидкість у небесній механіці зі скінченною швидкістю гравітації більша, ніж відповідна швидкість у класичній небесній механіці (п. 5).

3. Незбіжність других космічних швидкостей у небесних механіці Ньютона і механіці зі скінченною швидкістю гравітації вперше показана автором у [21] при вивченні динаміки трьох тіл, розміщених на прямій, коли маси зовнішніх тіл і їхні відстані до центрального тіла є однаковими. У [21] також показано, що рух цих тіл є нестійким.

4. Нестійкість за Ляпуновим зіркових систем із необмеженими траєкторіями з урахуванням скінченності швидкості гравітації в загальному випадку показано в [22 – 24]. Цей результат у випадку двох тіл вперше отримано в [5]. У [5] також обґрунтовано некеплеровість руху двох тіл.

5. Закон всесвітнього тяжіння з урахуванням скінченності швидкості гравітації отримано за допомогою закону всесвітнього тяжіння Ньютона і вперше використано в [6]. Він є узагальненням цього закону і збігається з ним у граничному випадку (при $c = +\infty$).

6. Із задачами небесної механіки з використанням теорії відносності можна ознайомитися, наприклад, в [11, 25].

Література

1. А. Эйнштейн, *О специальной и общей теории относительности*, Гос. изд-во, Москва (1922).
2. Yvonne Choquet-Bruhat, *General relativity and Einstein equations*, Oxford Univ. Press, Oxford (2009).
3. E. B. Fomalont, S. M. Kopeikin, *The measurement of the light deflection from Jupiter: experimental results*, Astrophys. J., **598**, 704 – 711 (2003); arXiv:astro-ph/0302294.

4. B. P. Abbott et al., *Gravitational waves and Gamma-rays from a binary neutron star merger: GW170817 and GRB 170817A*, Astrophys J., **848**, p. L13 (2017); doi:10.3847/2041-8213/aa920c.
5. В. Ю. Слюсарчук, *Некеплеровість та нестійкість руху двох тіл, спричинені скінченністю швидкості гравітації*, Нелін. коливання, **21**, № 3, 397 – 419 (2018); DOI 10.1007/s10958-019-04550-0.
6. В. Ю. Слюсарчук, *Математична модель Сонячної системи з урахуванням швидкості гравітації*, Нелін. коливання, **21**, № 2, 238 – 261 (2018); DOI 10.1007/s10958-019-04540-2.
7. В. Ю. Слюсарчук, *Дослідження систем диференціальних рівнянь із запізнюваннями й обмеженнями на запізнювання та похідні розв'язків*, Укр. мат. журн., **71**, № 5, 774 – 791 (2019); DOI 10.1007/s11253-019-01673-0.
8. Ю. В. Александров, *Небесная механика: Учебник*, Харьк. нац. ун-т, Харьков (2006).
9. И. Ньютон, *Математические начала натуральной философии*, Наука, Москва (1989).
10. В. И. Арнольд, В. В. Козлов, А. Н. Нейштадт, *Математические аспекты классической и небесной механики*, URSS, Москва (2002).
11. В. А. Брумберг, *Релятивистская небесная механика*, Наука, Москва (1972).
12. Г. М. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, в 3-х т., Т. 1, Наука, Москва (1966).
13. И. П. Натансон, *Теория функций вещественной переменной*, Наука, Москва (1974).
14. U. Dini, *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali*, T. Nistri, Pisa (1878).
15. О. Ф. Кабардин, *Физика: Справочные материалы*, Просвещение, Москва (1991).
16. В. Ю. Слюсарчук, *Абсолютна стійкість динамічних систем із післядією*, Вид-во Нац. ун-ту вод. госп-ва та природокористування, Рівне (2003).
17. Ю. А. Белый, *Иоганн Кеплер (1571 – 1630)*, Наука, Москва (1971).
18. Ф. Мультон, *Введение в небесную механику*, ОНТИ НКТП СССР, Москва, Ленинград (1935).
19. Д. В. Аносов, *От Ньютона к Кеплеру*, Изд-во МЦНМО, Москва (2006).
20. О. В. Голубева, *Теоретическая механика*, Высш. шк., Москва (1968).
21. В. Ю. Слюсарчук, *Динаміка трьох тіл, розміщених на прямій, з урахуванням скінченності швидкості гравітації*, Нелін. коливання, **23**, № 4, 529 – 552 (2020).
22. В. Ю. Слюсарчук, *Нестійкість необмежених розв'язків еволюційних рівнянь з операторними коефіцієнтами, переставними з операторами обертання*, Буковин. мат. журн., **7**, № 1, 99 – 113 (2019).
23. В. Ю. Слюсарчук, *Рівняння в гільбертовому просторі, множини розв'язків яких інваріантні відносно групи, ізоморфної однопараметричній групі унітарних операторів*, Укр. мат. журн., **72**, № 1, 86 – 99 (2020); DOI: https://doi.org/10.1007/s11253-020-01765-2.
24. В. Ю. Слюсарчук, *Рівняння, множини розв'язків яких інваріантні відносно групи відображень, ізоморфної однопараметричній групі поворотів*, Нелін. коливання, **23**, № 1, 112 – 123 (2020).
25. Ж. Шази, *Теория относительности и небесная механика*, Ижев. ин-т компьют. исслед., Москва-Ижевск, Т. 1 (2011); Т. 2 (2012).

Одержано 16.04.21