УДК 517.9

НЕЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛЬНО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ, НЕ РОЗВ'ЯЗАНІ ВІДНОСНО ПОХІДНОЇ

С. М. Чуйко, О. С. Чуйко, В. О. Кузьміна

Донбаськский держ. пед. ун-т, 84 112, Україна
вул. Лозановича, 14, кв. 31, Донецька обл., Слов'янськ, Україна
e-mail: chujko-slav@ukr.net

The study of differential-algebraic boundary-value problems was originated in the works of Weierstrass, Luzin, and Gantmakher. The works of Campbell, Boyarintsev, Chistyakov, Samoilenko, Perestyuk, Yakovets, Boichuk, Ilchmann, and Reis are devoted to the systematic study of differential-algebraic boundary-value problems. At the same time, the study of differential-algebraic boundary-value problems is closely related to the study of linear boundary-value problems for ordinary differential equations initiated in the works of Poincaré, Lyapunov, Krylov, Bogolyubov, Malkin, Myshkis, Grebenikov, Ryabov, Mitropolsky, Kiguradze, Samoilenko, Perestyuk, and Boichuk. The study of linear differential-algebraic boundary-value problems is connected with numerous applications of the corresponding mathematical models to the theory of nonlinear oscillations, mechanics, biology, radio engineering, and the theory of stability of motion. Thus, the actual problem is the extension of the results obtained in the works of Campbell, Samoilenko, and Boichuk to nonlinear integro-differential boundary-value problems unsolvable with respect to the derivative, in particular, finding the necessary and sufficient conditions for the existence of solutions of nonlinear integro-differential boundary-value problems unsolvable with respect to the derivative. In the present paper, we determine conditions for the existence of solutions of the nonlinear integro-differential boundary-value problem unsolvable with respect to the derivative and present a constructive scheme for their finding.

Дослідження диференціально-алгебраїчних рівнянь започатковано в роботах Вейєрштрасса, Лузіна та Гантмахера. Роботи Campbell, Бояринцева, Чистякова, Самойленка, Перестюка, Яковця, Бойчука, Ilchmann та Reis присвячено систематичному дослідженню диференціально-алгебраїчних крайових задач. У той же час дослідження диференціально-алгебраїчних крайових задач тісно пов'язане з вивченням лінійних крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь, започаткованих у роботах Пуанкаре, Ляпунова, Крилова, Боголюбова, Малкіна, Мишкіса, Гребенікова, Рябова, Митропольського, Кігурадзе, Самойленка, Перестюка та Бойчука. Дослідження лінійних диференціально-алгебраїчних рівнянь пов'язане з численними застосуваннями відповідних математичних моделей у теорії нелінійних коливань, механіці, біології, радіотехніці та теорії стійкості руху. Таким чином, актуальна проблема перенесення результатів, отриманих у роботах Campbell, Самойленка та Бойчука, на нелінійні інтегрально-диференціальні крайові задачі, не розв'язані відносно похідної, зокрема, знаходження необхідних і достатніх умов існування розв'язків нелінійних інтегро-диференціальних крайових задач, не розв'язаних відносно похідної. Одержано конструктивні умови існування розв'язків нелінійної інтегро-диференціальної крайової задачі, не розв'язаної відносно похідної.

1. Постановка задачі. Досліджуємо задачу про побудову розв'язків [1]

$$y(t) \in \mathbb{D}^2[a;b], \quad y'(t) \in \mathbb{L}^2[a;b]$$

нелінійної інтегрально-диференціальної системи, не розв'язаної відносно похідної

$$A(t)y'(t) = B(t)y(t) + \Phi(t) \int_a^b F(y(s), y'(s), s)\, ds + f(t), \tag{1}$$

що задовольняють крайову умову

$$\ell y(\cdot) = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}^{\upsilon}. \tag{2}$$

Розв'язок крайової задачі (1), (2) шукаємо в околі розв'язку

$$y_0(t) \in \mathbb{D}^2[a;b], \quad y_0'(t) \in \mathbb{L}^2[a;b]$$

породжуючої нетерової $n \neq p$ крайової задачі

$$A(t)y_0'(t) = B(t)y_0(t) + f(t), \quad \ell y_0(\cdot) = \alpha. \tag{3}$$

Тут

$$A(t), B(t) \in \mathbb{L}^2_{m\times n}[a;b] := \mathbb{L}^2[a;b] \otimes \mathbb{R}^{m\times n}, \quad \Phi(t) \in \mathbb{L}^2_{m\times q}[a;b], \quad f(t) \in \mathbb{L}^2[a;b].$$

Матрицю $A(t)$ припускаємо прямокутною або ж квадратною, але виродженою матрицею сталого рангу. Нелінійна вектор-функція $F(y(t), y'(t), t)$ двічі неперервно-диференційовна за розв'язком $y(t)$ крайової задачі (1), (2) та його похідною $y'(t)$ в околі розв'язку породжуючої крайової задачі та його похідної, а також неперервна за третім аргументом на відрізку $[a;b]$;

$$\ell y(\cdot) \colon \mathbb{D}^2[a;b] \to \mathbb{R}^{\upsilon}$$

— лінійний обмежений векторний функціонал, визначений на просторі $\mathbb{D}^2[a;b]$ n-вимірних абсолютно неперервних на відрізку $[a,b]$ функцій [1].

Поставлена задача продовжує дослідження лінійної інтегро-диференціальної крайової задачі [2, 3] на випадок нелінійної крайової задачі (1), (2) з прямокутною матрицею при похідній [4 – 6].

2. Критичний випадок. Припустимо, що для породжуючої крайової задачі (3) виконуються вимоги теореми з [6, с. 15]. За цих умов у випадку виродження порядку p для довільної фіксованої неперервної вектор-функції $\nu_p(t)$ диференціально-алгебраїчна система (3) має розв'язок вигляду

$$y_0(t, c_{\rho_{p-1}}) = X_p(t)c_{\rho_{p-1}} + K\big[f(s), \nu_p(s)\big](t), \quad c_{\rho_{p-1}} \in \mathbb{R}^{\rho_{p-1}}.$$

Породжуюча крайова задача (3) розв'язна тоді і тільки тоді, коли

$$P_{Q^*}\left\{\alpha - \ell K\big[f(s), \nu_p(s)\big](\cdot)\right\} = 0. \tag{4}$$

Тут $K[f(s), \nu_p(s)](t)$ — узагальнений оператор Гріна задачі Коші для диференціально-алгебраїчної системи (3), P_{Q^*} — матриця-ортопроектор:

$$\mathbb{R}^{\upsilon} \to \mathbb{N}\left(Q^*\right), \quad Q := \ell X_p(\cdot) \in \mathbb{R}^{\upsilon\times\rho_{p-1}}.$$

У випадку (4) породжуюча крайова задача (3) має r-параметричну сім'ю розв'язків

$$y_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f(s);\alpha](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r,$$

і зображується за допомогою узагальненого оператора Гріна [6, 7]

$$G[f(s);\alpha](t) := X_p(t)\,Q^+\big\{\alpha - \ell K[f(s),\nu_p(s)](\cdot)\big\} + K[f(s),\nu_p(s)](t)$$

та матриці $X_r(t) := X(t)P_{Q_r}$; матриця $P_{Q_r} \in \mathbb{R}^{\upsilon\times r}$, утворена з r лінійно незалежних стовпців матриці-ортопроектора P_Q. У критичному випадку $P_{Q^*} \neq 0$ для фіксованої неперервної функції $\nu_p(t) \in \mathbb{L}^2[a;b]$ розв'язок крайової задачі (1), (2) шукаємо у вигляді

$$y(t) = y_0(t,c_r) + x(t).$$

Для знаходження відхилення

$$x(t) \in \mathbb{D}^2[a;b], \quad x'(t) \in \mathbb{L}^2[a;b]$$

від породжуючого розв'язку $y_0(t,c_r)$ отримуємо крайову задачу

$$A(t)x'(t) = B(t)x(t) + \Phi(t)\int_a^b F(y(s),y'(s),s)\,ds, \quad \ell y(\cdot) = 0. \tag{5}$$

Відхилення

$$x(t,u,v) = X_p(t)u + \Psi(t)v$$

від породжуючого розв'язку $y_0(t,c_r)$ визначають невідомі сталі

$$v := \int_a^b F(y(s),y'(s),s)\,ds \in \mathbb{R}^q, \qquad u \in \mathbb{R}^n$$

та матриця

$$\Psi(t) := K\big[\Phi(s)\big](t) \in \mathbb{D}^2_{n\times q}[a;b].$$

Шуканий розв'язок $y(t)$ виродженої інтегрально-диференціальної системи (1) задовольняє крайову умову (2) у випадку

$$Q\,v + R\,u = 0, \quad R := \ell\,\Psi(\cdot) \in \mathbb{R}^{\upsilon\times q}. \tag{6}$$

Позначимо через $P_0 \in \mathbb{R}^{\rho_{p-1}\times\omega_0}$ матрицю, утворену з ω_0 лінійно незалежних стовпців ортопроектора P_Q, та через $P_1 \in \mathbb{R}^{q\times\omega_1}$ матрицю, утворену з ω_1 лінійно незалежних стовпців ортопроектора P_R :

$$P_R\colon \mathbb{R}^q \to \mathbb{N}(R).$$

Умову (6) задовольняють вектори

$$u(c_0) = P_0\,c_0, \quad v(c_1) = P_1\,c_1, \quad c_0 \in \mathbb{R}^{\omega_0}, \quad c_1 \in \mathbb{R}^{\omega_1}.$$

Для знаходження вектора

$$\check{c} := \begin{pmatrix} c_r \\ c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{r+\omega_0+\omega_1},$$

необхідного для визначення невідомих $u(c_0)$ та $v(c_1)$, отримуємо рівняння

$$\varphi(\check{c}) = 0, \tag{7}$$

де

$$\varphi(\check{c}) := u(c_0) - \int_a^b F\left(y_0(t, c_r) + x(t, u(c_0), v(c_1)), y_0'(t, c_r) + x'(t, u(c_0), v(c_1)), t\right) dt$$

— нелінійна вектор-функція:

$$\varphi(\check{c}) \colon \mathbb{R}^{r+\omega_0\omega_1} \to \mathbb{R}^n.$$

Якщо для отриманого рівняння (7) справджуються умови теореми [8], то знаходимо невідомі $u(c_0)$ та $v(c_1)$.

Таким чином, доведено таку теорему.

Теорема. *Припустимо, що для породжуючої крайової задачі (3) з прямокутною або ж квадратною, але виродженою матрицею $A(t)$ сталого рангу виконуються вимоги теореми з [6, с. 15]. За цих умов у випадку виродження порядку p у критичному випадку $P_{Q^*} \neq \neq 0$ для довільної фіксованої неперервної вектор-функції $\nu_p(t)$ породжуюча диференціально-алгебраїчна крайова задача (3) розв'язна тоді й тільки тоді, коли виконується умова (4); при цьому r-параметрична сім'я розв'язків породжуючої задачі (3) має вигляд*

$$y_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f(s); \alpha](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Шуканий розв'язок

$$y(t) = y_0(t, c_r) + x(t), \quad x(t) = X(t)v + \Psi(t)u, \quad u(c_0) = P_0\, c_0, \quad v(c_1) = P_1\, c_1$$

нелінійної інтегрально-диференціальної крайової задачі (1), (2), не розв'язаної відносно похідної, визначає вектор $\check{c}$, який задовольняє нелінійне рівняння (7). Припустимо, що для рівняння (7) виконуються такі умови:

1. Нелінійна вектор-функція $\varphi(\check{c})$, двічі неперервно диференційовна по $\check{c}$ в області $\Omega \subseteq \subseteq \mathbb{R}^n$, в околі точки $\check{c}_0$ має корінь $\check{c}$.

2. В околі нульового наближення $\check{c}_0 \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ виконуються нерівності

$$\left\| J_k^+ \right\| \leq \sigma_1(k), \quad \left\| d^2\varphi\left(\xi_k\, ; \check{c} - \check{c}_k\right) \right\| \leq \sigma_2(k) \left\| \check{c} - \check{c}_k \right\|.$$

3. Існує константа

$$\theta := \sup_{k\in\mathbb{N}} \left\{ \frac{\sigma_1(k)\sigma_2(k)}{2} \right\}.$$

Тоді за умови

$$P_{J_k^*} = 0, \quad J_k := \varphi'\left(\check{c}_k\right) \in \mathbb{R}^{n\times(r+\omega_0+\omega_1)}, \quad \theta \cdot \left\| \check{c} - \check{c}_0 \right\| < 1 \tag{8}$$

для знаходження вектора $\check{c}$ застосовна ітераційна схема

$$\check{c}_{k+1} = \check{c}_k - J_k^+\, \varphi(\check{c}_k), \quad k \in \mathbb{N}, \tag{9}$$

при цьому швидкість збіжності послідовності наближень до розв'язку рівняння (7) квадратична.

Тут $P_{J_k^*} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{N}\,(J_k^*)$ — ортопроектор матриці $J_k^*,\ J_k^+$ — псевдообернена (за Муром – Пенроузом) матриця [1]. Зазначимо, що умова (8) рівнозначна вимозі повноти рангу матриці J_k і виконується лише у випадку $n \le r+\omega_0+\omega_1$. У випадку $n = r+\omega_0+\omega_1$ для знаходження вектора $\check{c}$ застосовна теорема з [9, с. 680]. Запропонована у статті схема дослідження нелінійної інтегрально-диференціальної крайової задачі (1), (2), не розв'язаної відносно похідної, узагальнює відповідні результати [2], отримані для лінійної інтегрально-диференціальної крайової задачі, розв'язаної відносно похідної. Крім того, запропонована у статті схема дослідження нелінійної інтегрально-диференціальної крайової задачі (1), (2) аналогічно [10] може бути перенесена на нелінійні інтегрально-диференціальні крайові задачі, не розв'язані відносно похідної в абстрактних просторах.

Приклад 1. Умови доведеної теореми справджуються у випадку періодичної крайової задачі

$$A(t)y'(t) = B(t)y(t) + \Phi(t)\int_0^{2\pi} F\big(y(s), y'(s), s\big)\,ds + f(t), \quad z(0) - z(2\pi) = 0, \tag{10}$$

де, зокрема,

$$A(t) := \begin{pmatrix} \cos t & 0 & \sin t \\ -\sin t & 0 & \cos t \\ \cos t & \cos t & \sin t \\ -\sin t & -\sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad B(t) := \begin{pmatrix} -\sin t & \cos t & -\sin t \\ -\cos t & -\sin t & -\cos t \\ -\sin t & \cos t & -\sin t \\ -\cos t & -\sin t & -\cos t \end{pmatrix},$$

$$f(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Phi(t) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad F\big(y(t), y'(t), t\big) := y(t)\,\big(y'(t)\big)^*\,y(t).$$

Оскільки

$$P_{A^*(t)} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1-\cos 2t & \sin 2t & \cos 2t - 1 & -\sin 2t \\ \sin 2t & 1+\cos 2t & -\sin 2t & -1-\cos 2t \\ \cos 2t - 1 & -\sin 2t & 1-\cos 2t & \sin 2t \\ -\sin 2t & -1-\cos 2t & \sin 2t & 1+\cos 2t \end{pmatrix} \ne 0,$$

породжуюча система для нелінійного рівняння (10) вироджена, але матриця $A(t)$ сталого рангу. Для породжуючої системи для нелінійного рівняння (10) виконуються вимоги теореми з [6, с. 15], причому має місце виродження першого порядку: $p = 1$. Породжуюча система для нелінійного рівняння (10) має розв'язок

$$y(t, c_3) = X_1(t)\,c_3 + K\big[f(s)\big](t), \quad c_3 \in \mathbb{R}^3,$$

незалежний від вектор-функції $\nu_1(t)$; тут

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & 1 \\ e^{-t} - 1 & e^{-t} & 1 - e^{-t} - t \end{pmatrix},$$

а також

$$K\big[f(s)\big](t) = \begin{pmatrix} \cos t - 1 \\ 0 \\ 1 - e^{-t} \end{pmatrix}$$

— узагальнений оператор Гріна задачі Коші для породжуючої диференціально-алгебраїчної системи у разі нелінійного рівняння (10). У випадку породжуючої періодичної крайової задачі для рівняння (10) має місце критичний випадок

$$P_{Q^*} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0,$$

причому виконується умова (4); при цьому породжуюча крайова задача має розв'язок, не залежний від довільної неперервної вектор-функції $\nu_1(t)$:

$$y_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f(s); 0](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^1,$$

який зображується за допомогою узагальненого оператора Гріна

$$G[f(s); \alpha](t) = \begin{pmatrix} 2\cos t - 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

та матриці

$$X_r(t) := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2\pi \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 - e^{-2\pi} & 1 - e^{-2\pi} & e^{-2\pi} - 1 + 2\pi \end{pmatrix}, \quad R = \big(e^{-2\pi} - 1\big) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

отримуємо матриці

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Періодичний розв'язок крайової задачі (10)

$$y(t) = y_0(t, c_r) + x(t), \quad x(t) = X(t)v + \Psi(t)u, \quad u(c_0) = P_0\, c_0, \quad v(c_1) = P_1\, c_1,$$

не розв'язаної відносно похідної, визначає вектор $\check{c}$, який задовольняє нелінійне рівняння (7); тут

$$\varphi(\check{c}) = \begin{pmatrix} 2\,c_3 - c_4 \\ -c_3 + 2\,c_4 \\ -c_3 - c_4 + \pi\left(-4 - 3\,c_1 + 6\,c_1^2 - 3\,c_2 + 12\,c_1\,c_2 + 6\,c_2^2\right) \end{pmatrix}, \quad \check{c} \in \mathbb{R}^4.$$

Для знаходження константи $\check{c}$ застосовна ітераційна схема (9): дійсно, за умови

$$\check{c}_0 := -\frac{3}{5}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^*$$

на першому кроці отримуємо $P_{J_0^*} = 0$, при цьому

$$\check{c}_1 \approx \begin{pmatrix} -0{,}006\,666\,666\,666\,666\,672 \\ -0{,}606\,666\,666\,666\,667 \\ 3{,}26\,987\,671\,688\,309 \times 10^{-19} \\ -2{,}17\,991\,781\,125\,540 \times 10^{-18} \end{pmatrix}, \quad \|\varphi(\check{c}_1)\|_\infty \approx 0{,}304\,944,$$

що дозволяє на першому кроці перевірити виконання умови збіжності:

$$\theta \cdot \|\check{c}_1 - \check{c}_0\| \approx 0{,}502\,655 < 1.$$

На другому кроці отримуємо $P_{J_1^*} = 0$, при цьому

$$\check{c}_2 \approx \begin{pmatrix} -0{,}001\,981\,981\,981\,981\,969 \\ -0{,}601\,981\,981\,981\,982 \\ -4{,}430\,319\,631\,741\,398 \times 10^{-18} \\ -6{,}298\,327\,536\,169\,676 \times 10^{-18} \end{pmatrix}, \quad \|\varphi\,(\check{c}_2)\|_\infty \approx 0{,}001\,654\,710,$$

що дозволяє на другому кроці перевірити виконання умови збіжності:

$$\theta \cdot \|\check{c}_2 - \check{c}_0\| \approx 0{,}149\,438 < 1.$$

На третьому кроці отримуємо $P_{J_2^*} = 0$, при цьому

$$\check{c}_3 \approx \begin{pmatrix} -0{,}001\,956\,282\,688\,427\,426 \\ -0{,}601\,956\,282\,688\,427\,400 \\ 8{,}620\,362\,108\,791\,506 \times 10^{-20} \\ 8{,}997\,110\,504\,805\,289 \times 10^{-20} \end{pmatrix}, \quad \|\varphi\,(\check{c}_3)\|_\infty \approx 4{,}97\,970 \times 10^{-8},$$

що дозволяє на третьому кроці перевірити виконання умови збіжності:

$$\theta \cdot \|\check{c}_2 - \check{c}_0\| \approx 0{,}1475 < 1.$$

І, нарешті, на третьому кроці отримуємо $P_{J_3^*} = 0$, при цьому

$$\check{c}_3 \approx \begin{pmatrix} -0{,}001\,956\,281\,914\,983\,282 \\ -0{,}601\,956\,281\,914\,983 \\ -1{,}970\,636\,906\,103\,693 \times 10^{-25} \\ 8{,}908\,358\,608\,718\,355 \times 10^{-20} \end{pmatrix}, \quad \|\varphi(\check{c}_3)\|_\infty \approx 2{,}79\,029 \times 10^{-15}.$$

Таким чином, знаходимо наближення до періодичного розв'язку нелінійної інтегрально-диференціальної крайової задачі (10)

$$y(t) \approx \begin{pmatrix} -\dfrac{46\,845\,617}{42\,435\,985} + \cos t \\ 0 \\ -\dfrac{46\,845\,617}{42\,435\,985} \end{pmatrix}.$$

Для оцінки точності знайденого наближення до періодичного розв'язку інтегрально-диференціальної системи (10) визначимо нев'язку

$$\left\| \left\| A(t)y'(t) = B(t)y(t) + \Phi(t) \int_0^{2\pi} F(y(s), y'(s), s)ds + f(t) \right\|_{\mathbb{C}[0;2\pi]} \right\|_\infty$$
$$\approx 1{,}77\,636 \times 10^{-15}.$$

Крім того, відзначимо періодичність отриманого наближення.

У частинному випадку рівняння (7) може бути лінійним:

$$\varphi(\check{c}) := \mathcal{B}\,\check{c} + d, \quad \mathcal{B} := \varphi'(\check{c}) \in \mathbb{R}^{n \times (r+\omega_0+\omega_1)}, \quad d := \varphi(\check{c}) - \mathcal{B}\,\check{c} \in \mathbb{R}^n,$$

умова його розв'язності рівнозначна вимозі

$$P_{\mathcal{B}^*}\, d = 0. \tag{11}$$

Тут $P_{\mathcal{B}^*} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{N}(\mathcal{B}^*)$ — ортопроектор матриці $\mathcal{B}^*$. За умови (11) розв'язок лінійного рівняння (11) має вигляд

$$\check{c} = P_{\mathcal{B}_\mu}\, c_\mu - \mathcal{B}^+ d, \quad c_\mu \in \mathbb{R}^\mu,$$

де $P_{\mathcal{B}} : \mathbb{R}^{(r+\omega_0+\omega_1)} \to \mathbb{N}(\mathcal{B})$ — ортопроектор матриці $\mathcal{B}$; матриця $P_{\mathcal{B}_\mu} \in \mathbb{R}^{n\times\mu}$, утворена з μ лінійно незалежних стовпців матриці-ортопроектора $P_{\mathcal{B}}$. Позначимо матриці

$$\mathcal{P}_1 := \begin{pmatrix} I_r & O & O \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{r\times(r+\omega_0+\omega_1)},$$

$$\mathcal{P}_2 := \begin{pmatrix} O & I_{\omega_0} & O \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\omega_0\times(r+\omega_0+\omega_1)},$$

$$\mathcal{P}_3 := \begin{pmatrix} O & O & I_{\omega_1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\omega_1\times(r+\omega_0+\omega_1)}.$$

Таким чином, доведено таке твердження.

Наслідок. *Припустимо, що для породжуючої крайової задачі (3) з прямокутною або ж квадратною, але виродженою матрицею $A(t)$ сталого рангу виконуються вимоги теореми з [6, с. 15]. За цих умов у випадку виродження порядку p у критичному випадку $P_{Q^*} \neq \neq 0$ для довільної фіксованої неперервної вектор-функції $\nu_p(t)$ породжуюча диференціально-алгебраїчна крайова задача (3) розв'язна тоді й тільки тоді, коли виконується умова (4); при цьому r-параметрична сім'я розв'язків породжуючої задачі (3) має вигляд*

$$y_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f(s); \alpha](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Шуканий розв'язок

$$y(t) = y_0(t, c_r) + x(t), \quad x(t) = X(t)v + \Psi(t)u, \quad u(c_0) = P_0\, c_0, \quad v(c_1) = P_1\, c_1$$

нелінійної інтегрально-диференціальної крайової задачі (1), (2), не розв'язаної відносно похідної, визначає вектор $\check{c}$, який задовольняє рівняння (7). Якщо рівняння (7) лінійне:

$$\varphi(\check{c}) := \mathcal{B}\,\check{c} + d, \quad \mathcal{B} := \varphi'(\check{c}) \in \mathbb{R}^{n \times (r+\omega_0+\omega_1)}, \quad d := \varphi(\check{c}) - \mathcal{B}\,\check{c} \in \mathbb{R}^n,$$

то за умови (11) розв'язок нелінійної інтегрально-диференціальної крайової задачі (1), (2), не розв'язаної відносно похідної, має вигляд

$$y(t, c_\mu) = V(t)\, c_\mu + W(t), \quad V(t) := U(t)P_{\mathcal{B}_\mu}, \quad c_\mu \in \mathbb{R}^\mu,$$

де

$$U(t) := X_r(t)\mathcal{P}_1 + X_p(t)\mathcal{P}_2 + \Psi(t)\mathcal{P}_1, \quad W(t) := G\big[f(s); \alpha\big](t) - U(t)\,\mathcal{B}^+ d.$$

Приклад 2. Умови доведеного наслідку справджуються у випадку періодичної крайової задачі

$$A(t)y'(t) = B(t)y(t) + \Phi(t)\int_0^{2\pi} F(y(s), y'(s), s)ds + f(t), \quad z(0) - z(2\pi) = 0, \qquad (12)$$

де матриці $A(t),\ B(t),\ \Phi(t)$ наведено у першому прикладі, крім того

$$F(y(t), y'(t), t) := \Omega(t)\left(1 - y(t)\,(y'(t))^*\right)\, y(t), \quad \Omega(t) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2\,t & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Як встановлено у першому прикладі, породжуюча система для нелінійного рівняння (10) вироджена, але матриця $A(t)$ сталого рангу. Для породжуючої системи для нелінійного рівняння (10) виконуються вимоги теореми з [6, с. 15], причому має місце виродження першого порядку: $p = 1$. Також у першому прикладі знайдено породжуючий розв'язок $y(t, c_3) = X_1(t)\, c_3$, не залежний від вектор-функції $\nu_1(t)$. У випадку породжуючої періодичної крайової задачі для рівняння (10) має місце критичний випадок, причому виконується умова (4); при цьому породжуюча крайова задача має розв'язок, не залежний від довільної неперервної вектор-функції $\nu_1(t)$:

$$y_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f(s); 0](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^1.$$

Шуканий періодичний розв'язок крайової задачі (12)

$$y(t) = y_0(t, c_r) + x(t), \quad x(t) = X(t)v + \Psi(t)u, \quad u(c_0) = P_0\, c_0, \quad v(c_1) = P_1\, c_1$$

нелінійної інтегрально-диференціальної крайової задачі (1), (2), не розв'язаної відносно похідної, визначає вектор $\check{c}$, який задовольняє нелінійне рівняння (7); тут

$$\varphi(\check{c}) = \begin{pmatrix} 2\,c_3 - c_4 \\ -c_3 + 2\,c_4 \\ -c_3 - c_4 \end{pmatrix} := \mathcal{B}\,\check{c},$$

$$\mathcal{B} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \check{c} \in \mathbb{R}^4,$$

причому умову розв'язності (11) виконано. Таким чином, знаходимо однопараметричний періодичний розв'язок нелінійної інтегрально-диференціальної крайової задачі (12)

$$y(t, c_1) = \begin{pmatrix} c_1 - 1 + 2\cos t \\ 0 \\ 1 - c_1 \end{pmatrix}, \quad c_1 \in \mathbb{R}^1.$$

Зазначимо, що у випадку нерозв'язності нелінійної інтегрально-диференціальної крайової задачі (1), (2) її можна регуляризувати аналогічно [11, 12]. Зазначимо також, що запропоновану у статті схему дослідження нелінійної інтегрально-диференціальної крайової задачі (1), (2) можна перенести на інтегрально-диференціальні крайові задачі з запізненням [1, 13 – 16].

Література

1. A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko, *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems*, 2-th ed., De Gruyter, Berlin, Boston (2016).
2. А. М. Самойленко, О. А. Бойчук, С. А. Кривошея, *Крайові задачі для систем лінійних інтегро-диференціальних рівнянь типу Фредгольма з виродженим ядром*, Укр. мат. журн., **48**, № 11, 1576 – 1579 (1996); ***English translation:*** Ukr. Math. J., **48**, № 11, 1785 – 1789 (1996).
3. С. М. Чуйко, О. В. Чуйко, В. О. Кузьміна, *Невироджені лінійні інтегрально-диференціальні крайові задачі, не розв'язані відносно похідної*, Буковин. мат. журн., **8**, № 2, 127 – 138 (2020).
4. S. L. Campbell, *Singular systems of differential equations*, Research Notes in Mathematics, **40**, Pitman (Adv. Publ. Progr.), Boston, Mass.-London (1980).
5. В. Ф. Чистяков, *Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром*, Наука, Новосибирск (1996).
6. С. М. Чуйко, *К вопросу об обобщении матричной дифференциально-алгебраической краевой задачи*, Укр. мат. вісн., **14**, № 1, 16 – 32 (2017); ***English translation:*** J. Math. Sci., **235**, № 1, 2 – 18 (2018).
7. С. М. Чуйко, *О разрешимости дифференциально-алгебраической краевой задачи*, Мат. труды, **23**, № 1, 187 – 206 (2020).
8. S. M. Chuiko, *To the generalization of the Newton – Kantorovich theorem*, Visn. Khark. Univ. Ser. Mat. Prykl. Mat. Mekh., **85**, 62 – 68 (2017).
9. Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ*, Наука, Москва (1977).

10. С. М. Чуйко, *Про узагальнення теореми Ньютона – Канторовича у банаховозому просторі*, Доп. НАН України, № 6, 22 – 31 (2018).

11. А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин, *Методы решения некорректных задач*, Наука, Москва (1986).

12. С. М. Чуйко, *О регуляризации матричной дифференциально-алгебраической краевой задачи*, Укр. мат. вісн., **13**, № 1, 76 – 90 (2016); ***English translation:*** J. Math. Sci., **220**, № 5, 591 – 602 (2017).

13. Н. В. Азбелев, В. П. Максимов, *Уравнения с запаздывающим аргументом*, Дифференц. уравнения, **18**, № 12, 205 – 207 (1982).

14. Н. В. Азбелев, Н. П. Максимов, Л. Ф. Рахматуллина, *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений*, Наука, Москва (1991).

15. С. М. Чуйко, Д. В. Сысоев, *Матричные периодические краевые задачи с сосредоточенным запаздыванием*, Нелін. коливання, **21**, № 2, 273 – 283 (2018); ***English translation:*** J. Math. Sci., **243**, № 2, 326 – 336 (2019).

16. С. М. Чуйко, *О решении линейной нетеровой краевой задачи для дифференциально-алгебраической системы с сосредоточенным запаздыванием методом наименьших квадратов*, Укр. мат. вісн., **16**, № 4, 503 – 513 (2019); ***English translation:*** J. Math. Sci., **246**, № 3, 622 – 630 (2020).

Одержано 28.04.21,
після доопрацювання — 14.07.21