УДК 517.9

ОБМЕЖЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ З КУСКОВО-СТАЛИМИ ОПЕРАТОРНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

М. Ф. Городній, О. А. Печериця

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
вул. Володимирська, 64, Київ, 01033, Україна
e-mail: horodnii@gmail.com,
pecheritsa.aleksey@gmail.com

By passing to the corresponding difference equation, we obtain necessary and sufficient conditions for the existence of a unique solution bounded on the whole axis of a linear differential equation with piecewise constant operator coefficients.

За допомогою переходу до відповідного різницевого рівняння отримано необхідні й достатні умови для існування єдиного обмеженого на всій осі розв'язку лінійного диференціального рівняння з кусково-сталими операторними коефіцієнтами.

Нехай X — комплексний банахів простір із нормою $\|\cdot\|$ та нульовим елементом $\bar{0}$; $\mathcal{L}(\mathrm{X})$ — простір лінійних неперервних операторів, що діють із X в X; $\mathcal{I}$, $\mathcal{O}$ — відповідно одиничний і нульовий оператори в X; $C_b(\mathbb{R}, \mathrm{X})$ — банахів простір усіх неперервних і обмежених на $\mathbb{R}$ функцій $f : \mathbb{R} \to \mathrm{X}$ з нормою $\|f\|_\infty := \sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(t)\|,\ f \in C_b(\mathbb{R}, \mathrm{X})$.

Розглянемо диференціальне рівняння

$$\begin{cases} x'(t) = \mathrm{A}x(t) + y(t), & t \geq 0, \\ x'(t) = \mathrm{B}x(t) + y(t), & t < 0, \end{cases} \tag{1}$$

у якому $y \in C_b(\mathbb{R}, \mathrm{X}),\ \mathrm{A},\ \mathrm{B}$ — фіксовані оператори з $\mathcal{L}(\mathrm{X})$. Обмеженим розв'язком рівняння (1) будемо називати таку функцію $x \in C_b(\mathbb{R}, \mathrm{X})$, що для кожного $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ існує $x'(t)$ і виконується рівність (1).

Мета цієї статті — отримати необхідні й достатні умови на операторні коефіцієнти A, B, які забезпечують виконання такої умови.

Умова обмеженості. *Для довільної функції $y \in C_b(\mathbb{R}, \mathrm{X})$ диференціальне рівняння (1) має єдиний обмежений розв'язок x у просторі $C_b(\mathbb{R}, \mathrm{X})$.*

Питання про поведінку розв'язків на нескінченності є одним із основних питань якісної теорії диференціальних рівнянь. Умова обмеженості та її зв'язок з умовою експоненціальної дихотомії на $\mathbb{R}$ для відповідного однорідного диференціального рівняння досліджувалися, зокрема, в [1 – 3] у скінченновимірному просторі, в [4, 5] у довільному банаховому просторі для випадку обмежених і в [6, 7] — для випадку необмежених операторних коефіцієнтів. Про використання більш слабкої умови експоненціальної дихотомії на півосях і фредгольмовості відповідного оператора для розв'язування задач про обмежені на $\mathbb{R}$ розв'язки див. [7, 8] та наведені там посилання.

Допоміжні твердження. Далі використовуються такі леми.

Лема 1. *Диференціальне рівняння (1) задовольняє умову обмеженості тоді й тільки тоді, коли різницеве рівняння*

$$\begin{cases} u_{n+1} = e^{\mathrm{A}} u_n + v_n, & n \geq 0, \\ u_{n+1} = e^{\mathrm{B}} u_n + v_n, & n \leq -1, \end{cases} \tag{2}$$

теж задовольняє умову обмеженості, тобто має єдиний обмежений розв'язок $\{u_n, n \in \mathbb{Z}\}$ *для кожної обмеженої (на* $\mathbb{Z}$*) послідовності* $\{v_n, n \in \mathbb{Z}\}$.

Доведення. *Достатність.* Нехай рівняння (2) задовольняє умову обмеженості. Зафіксуємо функцію $y \in C_b(\mathbb{R}, \mathrm{X})$. Визначимо послідовність $\{v_n, n \in \mathbb{Z}\}$ за правилом

$$v_n = \begin{cases} \int_0^1 e^{\mathrm{A}(1-\tau)} y(n+\tau) d\tau, & n \geq 0, \\ \int_0^1 e^{\mathrm{B}(1-\tau)} y(n+\tau) d\tau, & n \leq -1. \end{cases} \tag{3}$$

Оскільки $\|v_n\| \leq \max\left\{e^{\|\mathrm{A}\|}, e^{\|\mathrm{B}\|}\right\} \|y\|_\infty$ для кожного $n \in \mathbb{Z}$, то послідовність $\{v_n, n \in \in \mathbb{Z}\}$ обмежена в X. Нехай $\{u_n, n \in \mathbb{Z}\}$ — відповідний до неї обмежений розв'язок різницевого рівняння (2). Покладемо

$$x(t) = \begin{cases} e^{\mathrm{A}t} u_0 + \int_0^t e^{\mathrm{A}(t-\tau)} y(\tau) d\tau, & t \geq 0, \\ e^{\mathrm{B}t} u_0 + \int_0^t e^{\mathrm{B}(t-\tau)} y(\tau) d\tau, & t < 0. \end{cases} \tag{4}$$

Тоді $x(0) = u_0 = \lim_{t \to 0} x(t)$, а також при $t \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ існує $x'(t)$ і виконуються рівності (1).

Доведемо, що функція x обмежена на $\mathbb{R}$. Відзначимо, що внаслідок (2) – (4)

$$x(1) = e^{\mathrm{A}} u_0 + \int_0^1 e^{\mathrm{A}(1-\tau)} y(\tau) d\tau = e^{\mathrm{A}} u_0 + v_0 = u_1,$$

$$x(2) = e^{\mathrm{A}} x(1) + \int_1^2 e^{\mathrm{A}(2-\tau)} y(\tau) d\tau = e^{\mathrm{A}} u_1 + v_1 = u_2,$$

і, за індукцією

$$\forall n \geq 0: \quad x(n) = u_n. \tag{5}$$

Також

$$x(-1) = e^{-\mathrm{B}} u_0 - e^{-\mathrm{B}} \int_{-1}^0 e^{\mathrm{B}(0-\tau)} y(\tau) d\tau = e^{-\mathrm{B}} u_0 - e^{-\mathrm{B}} v_{-1},$$

звідки $u_0 = e^{\mathrm{B}} x(-1) + v_{-1}$, а отже, з урахуванням (2) і неперервної оборотності оператора e^{B}, $x(-1) = u_{-1}$. Аналогічно з рівності

$$x(-2) = e^{-\mathrm{B}} x(-1) - e^{-\mathrm{B}} \int_{-2}^{-1} e^{\mathrm{B}(-1-\tau)} y(\tau) d\tau$$

отримаємо $x(-1) = u_{-1}$, а потім, за індукцією,

$$\forall n \leq -1: \quad x(n) = u_n. \tag{6}$$

Із (5), (6) випливає, що послідовність $\{x(n), n \in \mathbb{Z}\}$ обмежена. Також для довільних $n \geq 0$, $\tau \in [0,1]$ маємо

$$\|x(n+\tau)\| = \left\| e^{\mathrm{A}\tau} x(n) + \int_0^\tau e^{\mathrm{A}(\tau-s)} y(n+s)ds \right\| \leq e^{\|\mathrm{A}\|} \Big(\|y\|_\infty + \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|u_n\| \Big),$$

а отже, функція x обмежена на $[0, +\infty)$. Її обмеженість на $(-\infty, 0]$ перевіряється аналогічно.

Таким чином, диференціальне рівняння (1) має обмежений розв'язок x, відповідний до функції y.

Якщо, від супротивного, цей розв'язок не єдиний, то відповідне до (1) однорідне диференціальне рівняння має деякий ненульовий обмежений розв'язок u. Але тоді

$$u(t) = \begin{cases} e^{\mathrm{A}t} u(0), & t \geq 0, \\ e^{\mathrm{B}t} u(0), & t < 0, \end{cases}$$

а отже, $u(0) \neq \bar{0}$, а також послідовність $\{u(n), n \in \mathbb{Z}\}$ є ненульовим обмеженим розв'язком відповідного до (2) однорідного різницевого рівняння. Суперечність.

Необхідність. Нехай диференціальне рівняння (1) задовольняє умову обмеженості. Зафіксуємо обмежену в X послідовність $\{v_n, n \in \mathbb{Z}\}$. Розглянемо функцію y, яка визначається за таким правилом:

$$\forall n \geq 0 \quad \forall \tau \in [0,1]: \quad y(n+\tau) = e^{\mathrm{A}(\tau-1)} v_n \psi(\tau),$$

$$\forall n \leq -1 \quad \forall \tau \in [0,1]: \quad y(n+\tau) = e^{\mathrm{B}(\tau-1)} v_n \psi(\tau),$$

де $\psi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ — деяка фіксована неперервна на $[0,1]$ функція така, що $\psi(0) = \psi(1) = 0$, $\int_0^1 \psi(t)dt = 1$. Тоді y належить $C_b(\mathbb{R}, \mathrm{X})$, а також виконуються рівності (3), тому для відповідного до y єдиного обмеженого розв'язку x рівняння (1) справджуються рівності (5), (6). Отже, $\{x(n), n \in \mathbb{Z}\}$ є відповідним до $\{v_n, n \in \mathbb{Z}\}$ обмеженим розв'язком різницевого рівняння (2).

Якщо, від супротивного, цей обмежений розв'язок не єдиний, то відповідне до (2) однорідне рівняння має деякий ненульовий розв'язок $\{w_n, n \in \mathbb{Z}\}$. Але тоді

$$w_n = \begin{cases} e^{\mathrm{A}n} w_0, & n \geq 0, \\ e^{\mathrm{B}n} w_0, & n \leq -1, \end{cases}$$

а отже, функція

$$w(t) = \begin{cases} e^{\mathrm{A}t} w_0, & t \geq 0, \\ e^{\mathrm{B}t} w_0, & t < 0, \end{cases}$$

є ненульовим обмеженим розв'язком відповідного до (1) однорідного диференціального рівняння. Це суперечить умові обмеженості.

Покладемо $S = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$, $i\,\mathbb{R} = \{it \,|\, t \in \mathbb{R}\}$. Позначимо через $\sigma(\mathrm{A})$ спектр оператора A. Із теореми Данфорда про відображення спектра випливає, що справджується таке твердження.

Лема 2. *Рівність $\sigma\big(e^{\mathrm{A}}\big) \cap S = \varnothing$ справджується тоді і тільки тоді, коли $\sigma(\mathrm{A}) \cap i\,\mathbb{R} = \varnothing$.*

Нехай $\mathrm{X} = \mathrm{X}_1 \dot{+} \mathrm{X}_2$, тобто X є прямою сумою своїх підпросторів X_1, X_2, P_1, P_2 — проектори в X, що відповідають зображенню $\mathrm{X} = \mathrm{X}_1 \dot{+} \mathrm{X}_2$.

Лема 3. *Нехай $V \in \mathcal{L}(\mathrm{X})$ і підпростір X_1 інваріантний відносно оператора V. Тоді:*

1) $\forall n \geq 1 : (P_2 V P_2)^n = P_2 V^n P_2$;

2) якщо оператор V неперервно оборотний, то

$$\big(P_2 V^{-1} P_2\big)\,(P_2 V P_2) = P_2,$$

$$(P_2 V P_2)\,\big(P_2 V^{-1} P_2\big) = P_2,$$

тобто звуження оператора $P_2 V P_2$ на підпростір X_2, яке теж позначатимемо через $P_2 V P_2$, є неперервно оборотним оператором з $\mathcal{L}(\mathrm{X}_2)$;

3) якщо додатково $\mathrm{X} = \mathrm{X}_1 \dot{+} \mathrm{Y}$ і $P_1(\mathrm{Y})$, $P(\mathrm{Y})$ — проектори, що відповідають цьому зображенню, то $P_2 V P_2 = P_2 V P(\mathrm{Y})$;

4) якщо V_1 — звуження оператора V на X_1, $\sigma(V_1) \subset \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\}$, то

$$\sigma(P_2 V P_2) \supset (\sigma(V) \cap \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \geq 1\}).$$

Доведення. 1) Оскільки $P_2^2 = P_2$ і, внаслідок інваріантності X_1 відносно оператора V, $P_2 V P_1 = \mathcal{O}$, то для довільного $u \in \mathrm{X}$

$$P_2 V^2 P_2 u - (P_2 V P_2)^2 u = P_2 V\,(V P_2 u - P_2(V P_2 u)) = P_2 V (P_1 V P_2 u) = \bar{0},$$

а отже, $(P_2 V P_2)^2 = P_2 V^2 P_2$. Далі за індукцією отримаємо, що 1) виконується для кожного $n \geq 1$.

2) З урахуванням рівності $P_2 V^{-1} P_1 = \mathcal{O}$ для кожного $u \in \mathrm{X}$ матимемо

$$P_2 u - (P_2 V^{-1} P_2)(P_2 V P_2) u = P_2 V^{-1}\,(V P_2 u - P_2(V P_2 u)) = P_2 V^{-1} P_1 (V P_2 u) = \bar{0}.$$

Друга рівність перевіряється аналогічно.

3) Зафіксуємо $u \in \mathrm{X}$. Оскільки $P_1(\mathrm{Y}) u \in \mathrm{X}_1$, то

$$P_2 V P_2 u = P_2 V P_2\,(P_1(\mathrm{Y}) u + P(\mathrm{Y}) u) = P_2 V P_2 P(\mathrm{Y}) u.$$

Звідси випливає, що

$$P_2 V P(\mathrm{Y}) u - P_2 V P_2 u = P_2 V\,(P(\mathrm{Y}) u - P_2(P(\mathrm{Y}) u)) = P_2 V P_1 (P(\mathrm{Y}) u) = \bar{0}.$$

4) Доведемо спочатку, що коли λ — власне число оператора V, $|\lambda| \geq 1$ і v — власний вектор V, що відповідає λ, то λ також є власним числом оператора $P_2 V P_2$, якому відповідає власний вектор $P_2 v$. Справді,

$$\lambda P_1 v + \lambda P_2 v = \lambda v = V v = P_1 V v + P_2 V (P_1 v + P_2 v) = P_1 V v + P_2 V P_2 v.$$

Тому

$$P_1 V v = \lambda P_1 v, \tag{7}$$

$$P_2 V P_2 (P_2 v) = \lambda P_2 v. \tag{8}$$

Якщо, від супротивного, $P_2 v = \bar{0}$, то $v = P_1 v \in \mathrm{X}_1$, а отже, внаслідок (7), λ є власним числом оператора V_1. Це суперечить включенню $\sigma(V_1) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Таким чином, з урахуванням (8) λ — власне число оператора $P_2 V P_2$, якому відповідає власний вектор $P_2 v$, і для закінчення доведення твердження 4) залишилося перевірити, що коли $|\lambda| \geq 1$, $w \neq \bar{0}$, а також рівняння $(V - \lambda \mathcal{I}) v = w$ не має розв'язків у просторі X, тоді $\lambda \in \sigma(P_2 V P_2)$. Для цього зауважимо, що $(V - \lambda \mathcal{I}) v = w$ тоді і тільки тоді, коли виконуються рівності

$$(P_1 V - \lambda P_1) v = P_1 w, \tag{9}$$

$$(P_2 V - \lambda P_2) v = P_2 w. \tag{10}$$

Оскільки $(P_2 V - \lambda P_2) P_1 = \mathcal{O}$, то (10) записується в еквівалентному вигляді

$$(P_2 V P_2 - \lambda P_2) P_2 v = P_2 w. \tag{11}$$

Нехай, від супротивного, (11) має розв'язок. Врахувавши, що рівняння $(V - \lambda \mathcal{I}) v = w$ не має розв'язку, робимо висновок, що тоді (9) теж не має розв'язку. Але, з іншого боку, $\lambda \notin \sigma(V_1)$, а отже, рівняння $(V - \lambda \mathcal{I}_1) u = P_1 w$, в якому $\mathcal{I}_1$ — одиничний оператор в X_1, має єдиний розв'язок u в просторі X_1. Оскільки $u = P_1 u$, то $v = u$ є розв'язком рівняння (9). Суперечність.

Оскільки (11) не має розв'язків, то $\lambda \in \sigma(P_2 V P_2)$.

Нехай $T \in \mathcal{L}(\mathrm{X})$, $\sigma(T) \cap S = \varnothing$. Позначимо через $\sigma_-(T)$ частину спектра оператора T, що лежить всередині, а через $\sigma_+(T)$ — зовні кола S. Простір X розкладається в пряму суму інваріантних відносно T підпросторів $\mathrm{X} = \mathrm{X}_-(T) \dot{+} \mathrm{X}_+(T)$ таким чином, що звуження T_-, T_+ оператора T на $\mathrm{X}_-(T)$, $\mathrm{X}_+(T)$ мають відповідно спектри $\sigma_-(T)$, $\sigma_+(T)$ (див., наприклад, [4, с. 32 – 34]).

Нехай додатково оператор T неперервно оборотний. Покладемо

$$Q_-(T) = \left\{ u \in \mathrm{X} \,\middle|\, \sup_{n \geq 1} \|T^n u\| < \infty \right\}, \qquad Q_-^1(T) = \left\{ u \in \mathrm{X} \,\middle|\, \sum_{n=1}^{\infty} \|T^n u\| < \infty \right\},$$

$$Q_+(T) = \left\{ u \in \mathrm{X} \,\middle|\, \sup_{n \geq 1} \left\|T^{-n} u\right\| < \infty \right\}, \qquad Q_+^1(T) = \left\{ u \in \mathrm{X} \,\middle|\, \sum_{n=1}^{\infty} \left\|T^{-n} u\right\| < \infty \right\}.$$

Лема 4. *Якщо T — такий неперервно оборотний оператор з $\mathcal{L}(\mathrm{X})$, що $\sigma(T) \cap S = \varnothing$, то $\mathrm{X}_-(T) = Q_-(T) = Q_-^1(T)$, $\mathrm{X}_+(T) = Q_+(T) = Q_+^1(T)$.*

Доведення. Оскільки $\sigma(T_-) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, то для спектрального радіуса $r(T_-)$ оператора T_- виконується нерівність $r(T_-) < 1$, а отже, $\sum_{n=1}^{\infty} \left\|T_-^n\right\| < \infty$. Тому для кожного $u \in \mathrm{X}_-(T)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|T^n u\| = \sum_{n=1}^{\infty} \left\|T_-^n u\right\| < \infty,$$

а отже,

$$\mathrm{X}_-(T) \subset Q^1_-(T) \subset Q_-(T). \tag{12}$$

Нехай тепер $u \in \mathrm{X}_+(T) \cap Q_-(T)$. Тоді $\sup_{n\geq 1}\|T^n u\| < \infty$ і для кожного $n \in \mathbb{N}$

$$\|u\| = \left\|T_+^{-n}T_+^n u\right\| \leq \left\|T_+^{-n}\right\| \sup_{n\geq 1}\|T^n u\|.$$

Оскільки $r(T_+^{-1}) < 1$, то $\left\|T_+^{-n}u\right\| \to 0,\ n \to \infty$. Отже, $u = \bar{0}$.

Таким чином, $\mathrm{X}_-(T) = Q_-(T)$ і, внаслідок цієї рівності та включень (12), $\mathrm{X}_-(T) = Q^1_-(T)$.

Рівності $\mathrm{X}_+(T) = Q_+(T) = Q^1_+(T)$ перевіряються аналогічно.

Нехай $W \in \mathcal{L}(\mathrm{X})$, $\sigma(W) \cap i\,\mathbb{R} = \varnothing$. Позначимо через $\widetilde{\sigma}_-(W)$ частину спектра оператора W, що лежить у лівій півплощині, через $\widetilde{\sigma}_+(W)$ — у правій півплощині відносно уявної осі $i\,\mathbb{R}$. Тоді простір X розкладається в пряму суму $\mathrm{X} = \widetilde{\mathrm{X}}_-(W)\dot{+}\widetilde{\mathrm{X}}_+(W)$ таким чином, що, як і раніше, звуження $\widetilde{W}_-,\ \widetilde{W}_+$ оператора W на $\widetilde{\mathrm{X}}_-(W),\ \widetilde{\mathrm{X}}_+(W)$ мають відповідно спектри $\widetilde{\sigma}_-(W),\ \widetilde{\sigma}_+(W)$.

Покладемо

$$\widetilde{Q}_-(W) = \left\{u \in \mathrm{X} \,\middle|\, \sup_{t\geq 0}\left\|e^{Wt}u\right\| < \infty\right\},$$

$$\widetilde{Q}_+(W) = \left\{u \in \mathrm{X} \,\middle|\, \sup_{t\geq 0}\left\|e^{-Wt}u\right\| < \infty\right\}.$$

Лема 5. *Якщо* $W \in \mathcal{L}(\mathrm{X})$, $\sigma(W) \cap i\,\mathbb{R} = \varnothing$, *то* $\widetilde{\mathrm{X}}_-(W) = \widetilde{Q}_-(W),\ \widetilde{\mathrm{X}}_+(W) = \widetilde{Q}_+(W)$.

Доведення. Оскільки $\sigma(\widetilde{W}_-) \subset \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}\, z < 0\}$, то $\sup_{t\geq 0}\left\|e^{Wt}u\right\| = \sup_{t\geq 0}\left\|e^{\widetilde{W}_- t}u\right\| < \infty$ для кожного $u \in \widetilde{\mathrm{X}}_-(W)$, а отже, $\widetilde{\mathrm{X}}_-(W) \subset \widetilde{Q}_-(W)$. Нехай $u \in \widetilde{\mathrm{X}}_+(W) \cap \widetilde{Q}_-(W)$. Тоді $\sup_{t\geq 0}\left\|e^{Wt}u\right\| < \infty$ і для кожного $n \in \mathbb{N}$

$$\|u\| = \left\|e^{-n\widetilde{W}_+}e^{n\widetilde{W}_+}u\right\| \leq \left\|e^{-n\widetilde{W}_+}\right\| \sup_{t\geq 0}\left\|e^{Wt}u\right\|.$$

Оскільки $\sigma\big(e^{-\widetilde{W}_+}\big) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, то $\left\|e^{-n\widetilde{W}_+}\right\| \to 0,\ n \to \infty$. Отже, $u = \bar{0}$.

Таким чином, $\widetilde{\mathrm{X}}_-(W) = \widetilde{Q}_-(W)$.

Оскільки $\sigma(-W) = \big\{-z \mid z \in \sigma(W)\big\}$, то $\widetilde{\mathrm{X}}_+(W) = \widetilde{\mathrm{X}}_-(-W) = \widetilde{Q}_-(-W) = \widetilde{Q}_+(W)$.

Основні результати. Наведені вище леми дають змогу довести такі твердження.

Теорема 1. *Нехай* $\mathrm{D},\ \mathrm{E}$ — *неперервно оборотні оператори з* $\mathcal{L}(\mathrm{X})$. *Різницеве рівняння*

$$\begin{cases} u_{n+1} = \mathrm{D}u_n + v_n, & n \geq 1, \\ u_{n+1} = \mathrm{E}u_n + v_n, & n \leq 0, \end{cases} \tag{13}$$

задовольняє умову обмеженості тоді і тільки тоді, коли виконуються такі умови:

i₁) $\sigma(\mathrm{D}) \cap S = \varnothing,\ \sigma(\mathrm{E}) \cap S = \varnothing$;

i₂) $\mathrm{X} = \mathrm{X}_-(\mathrm{D})\dot{+}\mathrm{X}_+(\mathrm{E})$.

Доведення. *Достатність* випливає з теореми 1 роботи [9].

Необхідність. Покладемо

$$\ell_1(\mathbb{Z}, \mathrm{X}) = \left\{ \bar{u} = \{u_n,\, n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathrm{X} \;\middle|\; \|\bar{u}\|_1 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \|u_n\| < \infty \right\}.$$

Внаслідок теореми 2 з [9] умова обмеженості для різницевого рівняння (13) еквівалентна умові

j) різницеве рівняння має для кожної послідовності $\widetilde{w} = \{w_n,\, n \in \mathbb{Z}\} \in \ell_1(\mathbb{Z}, \mathrm{X})$ єдиний розв'язок $\widetilde{u} = \{u_n, n \in \mathbb{Z}\}$ у просторі $\ell_1(\mathbb{Z}, \mathrm{X})$.

Покладемо, як і в лемі 4,

$$Q^1_-(\mathrm{D}) = \left\{ u \in \mathrm{X} \;\middle|\; \sum_{n=1}^{\infty} \|\mathrm{D}^n u\| < \infty \right\},$$

$$Q^1_+(\mathrm{E}) = \left\{ u \in \mathrm{X} \;\middle|\; \sum_{n=1}^{\infty} \left\|\mathrm{E}^{-n} u\right\| < \infty \right\}.$$

Відзначимо, що $Q^1_-(\mathrm{D}),\ Q^1_+(\mathrm{E})$ — лінійні многовиди, інваріантні відносно операторів D і E відповідно.

I) Доведемо, що коли виконується умова j), то $Q^1_-(\mathrm{D})$ — підпростір X і для звуження D_Q оператора D на $Q^1_-(\mathrm{D})$ справджується включення $\sigma(\mathrm{D}_Q) \subset \big\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\big\}$.

Згідно з теоремою 1 із [10] для цього досить перевірити, що для кожної сумовної послідовності $\{\beta_n, n \geq 0\} \subset Q^1_-(\mathrm{D})$ $\Big($тобто такої, що $\sum_{n=0}^{\infty} \|\beta_n\| < \infty\Big)$, послідовність $\{\alpha_n,\, n \geq 0\}$, яка визначається за формулою

$$\begin{cases} \alpha_n = \mathrm{D}\alpha_{n-1} + \beta_n, \quad n \geq 1, \\ \alpha_0 = \beta_0, \end{cases} \tag{14}$$

теж є сумовною.

Якщо $\beta_0 \in Q^1_-(\mathrm{D}),\ \beta_n = \bar{0},\ n \geq 1$, то побудована згідно з (14) послідовність $\{\alpha_n, n \geq 0\}$ є сумовною за означенням множини $Q^1_-(\mathrm{D})$.

Зафіксуємо $m \in \mathbb{N}$ і таку послідовність $\{\beta_n, n \geq 0\} \subset Q^1_-(\mathrm{D})$, що $\beta_n = \bar{0}$ для кожного $n \geq m+1$. Згідно з (14) їй відповідає послідовність $\{\alpha_n, n \geq 0\}$, яка є сумою $m+1$ сумовних послідовностей

$$\begin{array}{llllllll}
\big\{\beta_0, & \mathrm{D}\beta_0, & \mathrm{D}^2\beta_0, & \ldots, & \mathrm{D}^{m-1}\beta_0, & \mathrm{D}^m\beta_0, & \mathrm{D}^{m+1}\beta_0, & \ldots\big\}, \\
\big\{\bar{0}, & \beta_1, & \mathrm{D}\beta_1, & \ldots, & \mathrm{D}^{m-2}\beta_1, & \mathrm{D}^{m-1}\beta_1, & \mathrm{D}^m\beta_1, & \ldots\big\}, \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots \\
\big\{\bar{0}, & \bar{0}, & \bar{0}, & \ldots, & \bar{0}, & \beta_m, & \mathrm{D}\beta_m, & \ldots\big\},
\end{array}$$

а отже, теж сумовна.

Відзначимо, що при цьому для кожного $0 \leq k \leq m$ єдиний сумовний розв'язок рівняння (13), що відповідає послідовності $v_k = \beta_k,\ v_n = \bar{0},\ n \neq k$, має вигляд

$$\bar{\alpha}(k) = \left\{ \ldots, \bar{0}, \underbrace{\beta_k}_{k+1}, \mathrm{D}\beta_k, \mathrm{D}^2\beta_k, \ldots \right\}, \tag{15}$$

а отже, єдиний сумовний розв'язок (13), що відповідає послідовності $v_k = \beta_k,\ 0 \leq k \leq m$, $v_k = \bar{0},\ k \notin \{0, 1, 2, \ldots, m\}$ є сумою $m+1$ послідовностей (15).

Розглянемо тепер оператор $\Lambda \in \mathcal{L}\big(\ell_1(\mathbb{Z}, \mathrm{X})\big)$, який визначається за правилом

$$\forall \bar{u} = \{u_n, n \in \mathbb{Z}\} \in \ell_1(\mathbb{Z}, \mathrm{X}) : \quad \Lambda \bar{u} = \{u_{n+1} - T_n u_n, n \in \mathbb{Z}\},$$

де $T_n = \mathrm{D},\ n \geq 1,\ T_n = \mathrm{E},\ n \leq 0$.

З умови j) і теореми Банаха про обернений оператор випливає, що оператор Λ неперервно оборотний. Зафіксуємо сумовну послідовність $\{\beta_n, n \geq 0\} \subset Q^1_-(\mathrm{D})$. Покладемо

$$\bar{\beta}(m) = \left\{ \ldots, \bar{0}, \underbrace{\beta_0}_{0}, \beta_1, \ldots, \beta_m, \bar{0}, \ldots \right\}, \quad m \geq 0.$$

Послідовність $\{\bar{\beta}(m)\},\ m \geq 0$, збігається в $\ell_1(\mathbb{Z}, \mathrm{X})$ до елемента

$$\bar{\beta} = \left\{ \ldots, \bar{0}, \underbrace{\beta_0}_{0}, \beta_1, \ldots, \beta_m, \beta_{m+1}, \ldots \right\},$$

а також $\Lambda^{-1}\bar{\beta}(m) = \sum_{k=0}^{m} \bar{\alpha}(k)$ для кожного $m \geq 0$ і $\Lambda^{-1}\bar{\beta}(m) \to \Lambda^{-1}\bar{\beta},\ m \to \infty$, в просторі $\ell_1(\mathbb{Z}, \mathrm{X})$. Оскільки з урахуванням (15) елемент $\Lambda^{-1}\bar{\beta}$ має координати

$$\big(\Lambda^{-1}\bar{\beta}\big)_n = \bar{0}, \quad n \leq 0,$$
$$\big(\Lambda^{-1}\bar{\beta}\big)_n = \mathrm{D}^{n-1}\beta_0 + \mathrm{D}^{n-2}\beta_1 + \ldots + \beta_{n-1}, \quad n \geq 1,$$

то відповідна до $\{\beta_n, n \geq 0\}$ послідовність (14) є сумовною.

II) Зауважимо, що умова j) виконується тоді й тільки тоді, коли для кожної послідовності $\bar{q} = \{q_n, n \in \mathbb{Z}\} \in \ell_1(\mathbb{Z}, \mathrm{X})$ різницеве рівняння

$$\begin{cases} p_{n+1} = \mathrm{E}^{-1} p_n + q_n, & n \geq 1, \\ p_{n+1} = \mathrm{D}^{-1} p_n + q_n, & n \leq 0, \end{cases} \tag{16}$$

має єдиний розв'язок $\bar{p} = \{p_n, n \in \mathbb{Z}\}$ у просторі $\ell_1(\mathbb{Z}, \mathrm{X})$.

Справді, (13) записується у такому еквівалентному вигляді:

$$\begin{cases} u_n = \mathrm{D}^{-1} u_{n+1} - \mathrm{D}^{-1} v_n, & n \geq 1, \\ u_n = \mathrm{E}^{-1} u_{n+1} - \mathrm{E}^{-1} v_n, & n \leq 0. \end{cases}$$

Тому досить зробити заміну $p_n = u_{-n+2},\ n \in \mathbb{Z},$ і врахувати, що внаслідок неперервної оборотності операторів $\mathrm{D},\ \mathrm{E}$

$$\ell_1(\mathbb{Z}, \mathrm{X}) = \left\{ \left(\ldots, -\mathrm{D}^{-1}v_2, \underbrace{-\mathrm{D}^{-1}v_1}_{0}, -\mathrm{E}^{-1}v_0, -\mathrm{E}^{-1}v_{-1}, \ldots \right) \,\middle|\, \{v_n, n \in \mathbb{Z}\} \in \ell_1(\mathbb{Z}, \mathrm{X}) \right\}.$$

III) Із тверджень, доведених у пп. I, II, випливає, що $Q^1_+(\mathrm{E})$ — також підпростір X, а для звуження E_Q оператора E на $Q^1_+(\mathrm{E})$ також виконується включення $\sigma(\mathrm{E}_Q) \subset \{z \in \in \mathbb{C} \,|\, |z| > 1\}$.

IV) Перевіримо, що коли справджується умова j), тоді $Q^1_-(\mathrm{D}) \cap Q^1_+(\mathrm{E}) = \{\bar{0}\}$.

Якщо, від супротивного, $u \neq \bar{0},\ u \in Q^1_-(\mathrm{D}) \cap Q^1_+(\mathrm{E}),$ то відповідне до (13) однорідне різницеве рівняння має ненульовий сумовний розв'язок

$$\left(\ldots, \mathrm{E}^{-2}u, \mathrm{E}^{-1}u, \underbrace{u}_{1}, \mathrm{D}u, \mathrm{D}^2u, \ldots \right).$$

Це суперечить умові j).

V) Доведемо, що коли виконується умова j), тоді $\mathrm{X} = Q^1_-(\mathrm{D}) \dot{+} Q^1_+(\mathrm{E})$.

Зафіксуємо $v \in \mathrm{X}$. Нехай $\{u_n, n \in \mathbb{Z}\}$ — єдиний сумовний розв'язок різницевого рівняння (13), що відповідає послідовності $v_0 = v,\ v_n = \bar{0},\ n \neq 0$. Тоді $u_0 \in Q^1_+(\mathrm{E})$, тому що $u_{-k} = \mathrm{E}^{-k}u_0,\ k \geq 1$. Також $u_{n+1} = \mathrm{D}^n u_1,\ n \geq 1$, а отже, $\mathrm{E}u_0 + v = u_1 \in Q^1_-(\mathrm{D})$. Тому

$$v = u_1 + (-\mathrm{E}u_0), \tag{17}$$

де $u_1 \in Q^1_-(\mathrm{D}),\ (-\mathrm{E}u_0) \in Q^1_+(\mathrm{E})$.

Єдиність зображення (17) випливає з твердження п. IV.

VI) Нехай $P_-,\ P_+$ — проектори, що відповідають зображенню $\mathrm{X} = Q^1_-(\mathrm{D}) \dot{+} Q^1_+(\mathrm{E})$. Доведемо, що коли виконується умова обмеженості для різницевого рівняння (13), тоді $\sigma(P_+\mathrm{D}P_+) \subset \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| > 1\}$.

Зафіксуємо $v \in Q^1_+(\mathrm{E}),\ m \in \mathbb{N}$. Скориставшись рівністю $v = \mathrm{D}^m P_- \mathrm{D}^{-m}v + \mathrm{D}^m P_+ \mathrm{D}^{-m}v$, неважко переконатися, що обмеженій послідовності

$$\bar{v}(m) = \left(\ldots, \bar{0}, \underbrace{v}_{m}, \bar{0}, \ldots \right)$$

відповідає єдиний обмежений розв'язок $\bar{u}(m)$ рівняння (13), координати якого задаються формулами

$$\begin{gathered} u_n(m) = -\mathrm{E}^{n-1}P_+\mathrm{D}^{-m}v, \quad n \leq 1, \\ u_n(m) = -\mathrm{D}^{n-1}P_+\mathrm{D}^{-m}v, \quad 2 \leq n \leq m, \\ u_n(m) = \mathrm{D}^{n-1}P_-\mathrm{D}^{-m}v, \quad n \geq m+1. \end{gathered} \tag{18}$$

Зокрема, з урахуванням рівності $v = P_+v$, робимо висновок, що $u_1(m) = -P_+\mathrm{D}^{-m}P_+v$.

Покладемо тепер

$$\ell_\infty(\mathbb{Z}, \mathrm{X}) = \left\{ \bar{u} = \{u_n, n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathrm{X} \,\middle|\, \|\bar{u}\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|u_n\| < \infty \right\}$$

і розглянемо оператор $\Phi \in \mathcal{L}(\ell_\infty(\mathbb{Z}, \mathrm{X}))$, що визначається за правилом

$$\forall \bar{u} = \{u_n, n \in \mathbb{Z}\} \in \ell_\infty(\mathbb{Z}, \mathrm{X}) : \Phi\bar{u} = \{u_n - T_n u_n, n \in \mathbb{Z}\},$$

де $T_n = \mathrm{D}$, $n \geq 1$, $T_n = \mathrm{E}$, $n \leq 0$. Внаслідок умови обмеженості для рівняння (13) і теореми Банаха про обернений оператор Φ є неперервно оборотним оператором, а також $\bar{u}(m) = \Phi^{-1}\bar{v}(m)$. Отже,

$$\left\|P_+\mathrm{D}^{-m}P_+v\right\| \leq \|\bar{u}(m)\|_\infty \leq \left\|\Phi^{-1}\right\| \|\bar{v}(m)\|_\infty = \left\|\Phi^{-1}\right\| \|v\|. \tag{19}$$

Оскільки (19) виконується для всіх $m \in \mathbb{N}$ і $v \in Q_+^1(\mathrm{E})$, то внаслідок принципу рівномірної обмеженості послідовність $\left\{\|P_+\mathrm{D}^{-m}P_+\|, m \geq 1\right\}$ є обмеженою.

Із (18) і лінійності різницевого рівняння (13) випливає, що при фіксованих $m \in \mathbb{N}$, $v \in Q_+^1(\mathrm{E})$ обмеженій послідовності

$$\bar{w}(m) = \left(\ldots, \bar{0}, \underbrace{P_+\mathrm{D}^{-m+1}P_+v}_{1}, \ldots, P_+\mathrm{D}^{-1}P_+v, \underbrace{v}_{m}, \bar{0}, \ldots\right)$$

відповідає єдиний обмежений розв'язок $\bar{u}(m)$, координата $u_1(m)$ якого з урахуванням твердження 1 леми 3 зображується у вигляді

$$u_1(m) = -P_+\mathrm{D}^{-m}P_+v - P_+\mathrm{D}^{-m+1}P_+\left(P_+\mathrm{D}^{-1}P_+v\right) - \ldots$$
$$\ldots - P_+\mathrm{D}^{-1}P_+\left(P_+\mathrm{D}^{-m+1}P_+v\right) = -mP_+\mathrm{D}^{-m}P_+v.$$

Звідси, аналогічно до (19),

$$\left\|mP_+\mathrm{D}^{-m}P_+v\right\| \leq \left\|\Phi^{-1}\right\| \|\bar{w}(m)\|_\infty \leq \left\|\Phi^{-1}\right\| \sup_{m\geq 1}\|P_+\mathrm{D}^{-1}P_+\| \|v\|,$$

а отже, за принципом рівномірної обмеженості

$$\exists C > 0 \quad \forall m \geq 1: \quad m\left\|P_+\mathrm{D}^{-m}P_+\right\| \leq C.$$

Тому внаслідок твердження 1 леми 3 для кожного $m \geq 1$ справджується оцінка

$$\left(r\left(P_+\mathrm{D}^{-1}P_+\right)\right)^m = r\left(P_+\mathrm{D}^{-m}P_+\right) \leq \frac{C}{m}.$$

Звідси випливає, що $r\left(P_+\mathrm{D}^{-1}P_+\right) < 1$, а отже, з урахуванням твердження 2 леми 3, $\sigma(P_+\mathrm{D}P_+) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$.

VII) Із тверджень пп. I, VI і твердження 4 леми 3 випливає, що $\sigma(\mathrm{D}) \cap S = \varnothing$.

VIII) Зазначимо, що внаслідок леми 4 виконується рівність $Q_-^1(\mathrm{D}) = \mathrm{X}_-(\mathrm{D})$.

IX) Застосовуючи твердження пп. VII, VIII до різницевого рівняння (16), робимо висновок, що $\sigma(\mathrm{E}) \cap S = \varnothing$, $Q_+^1(\mathrm{E}) = \mathrm{X}_+(\mathrm{E})$ і, зрештою, $\mathrm{X} = \mathrm{X}_-(\mathrm{D}) \dot{+} \mathrm{X}_+(\mathrm{E})$.

Зауваження 1. Згідно з теоремою 1 умови i_1), i_2) необхідні й достатні для того, щоб відповідне до (13) однорідне різницеве рівняння було експоненціально дихотомічним. В іншому вигляді такі умови отримано в [11].

Теорема 2. *Для того щоб для диференціального рівняння (1) виконувалась умова обмеженості, необхідно й достатньо, щоб справджувалися такі умови:*

a₁) $\sigma(\mathrm{A}) \cap i\,\mathbb{R} = \varnothing,\ \sigma(\mathrm{B}) \cap i\,\mathbb{R} = \varnothing$;
a₂) $\mathrm{X} = \widetilde{\mathrm{X}}_-(\mathrm{A}) \dot{+} \widetilde{\mathrm{X}}_+(\mathrm{B})$.

Доведення. Внаслідок леми 1 і теореми 1 достатньо встановити, що умови a_1), a_2) виконуються тоді та тільки тоді, коли виконуються умови

b_1) $\sigma(e^{\mathrm{A}}) \cap S = \varnothing,\ \sigma(e^{\mathrm{B}}) \cap S = \varnothing$;
b_2) $\mathrm{X} = \mathrm{X}_-(e^{\mathrm{A}}) \dot{+} \mathrm{X}_+(e^{\mathrm{B}})$.

Із леми 2 випливає, що умови a_1) і b_1) рівносильні. Доведемо, що коли $\sigma(\mathrm{A}) \cap i\,\mathbb{R} = \varnothing$, тоді $\widetilde{\mathrm{X}}_-(\mathrm{A}) = \mathrm{X}_-(e^{\mathrm{A}})$. З урахуванням леми 5 для цього досить перевірити, що $\mathrm{X}_-(e^{\mathrm{A}}) = \widetilde{Q}_-(\mathrm{A})$.

Внаслідок леми 4 $\mathrm{X}_-(e^{\mathrm{A}}) = \left\{u \in \mathrm{X} \mid \sup_{n\ge 1} \left\|e^{n\mathrm{A}}u\right\| < \infty\right\}$. Також $e^{(n+\tau)\mathrm{A}} = e^{n\mathrm{A}}\, e^{\tau\mathrm{A}}$ для довільних $n \in \mathbb{Z},\ \tau \in [n, n+1]$, а отже

$$\mathrm{X}_-(e^{\mathrm{A}}) = \left\{u \in \mathrm{X} \,\middle|\, \sup_{t\ge 0} \left\|e^{t\mathrm{A}}u\right\| < \infty\right\} = \widetilde{Q}_-(\mathrm{A}).$$

Аналогічно перевіряється, що коли $\sigma(\mathrm{B}) \cap i\,\mathbb{R} = \varnothing$, то $\mathrm{X}_+(e^{\mathrm{B}}) = \widetilde{\mathrm{X}}_+(\mathrm{B})$.

Зауваження 2. Теорема 2 стверджує, що умови a_1), a_2) необхідні й достатні для того, щоб відповідне до (1) однорідне диференціальне рівняння було експоненціально дихотомічним на $\mathbb{R}$. Про означення й властивості експоненціально дихотомічних диференціальних рівнянь із обмеженими операторними коефіцієнтами див., наприклад, [4] (розд. 4, § 3).

Література

1. W. A. Coppel, *Dichotomies and reducibility*, J. Differ. Equ., **3**, 500 – 521 (1967).
2. R. Sacker, G. Sell, *Existence of dichotomies and invariant splittings for linear differential systems*, J. Differ. Equ., **22**, 478 – 496 (1976).
3. Ю. А. Митропольский, А. М. Самойленко, В. Л. Кулик, *Исследования дихотомии систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова*, Наук. думка, Киев (1990).
4. Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн, *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве*, Наука, Москва (1970).
5. Х. Массера, Х. Шеффер, Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства, Мир, Москва (1970).
6. Д. Хенри, *Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений*, Мир, Москва (1985).
7. А. Г. Баскаков, *Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений*, Успехи мат. наук, **68**, вып. 1(409), 77 – 128 (2013).
8. О. А. Бойчук, В. П. Журавльов, О. О. Покутний, *Обмежені розв'язки еволюційних рівнянь*, Укр. мат. журн., **70**, № 1, 7 – 28 (2018).
9. І. В. Гончар, *Про обмежені і сумовні розв'язки різницевого рівняння зі стрибком операторного коефіцієнта*, Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Серія: фіз.-мат. науки, № 2, 25 – 28 (2016).
10. О. В. Вятчанінов, *Сумовні зі степенем p рекурентні послідовності в банаховому просторі*, Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Серія: фіз.-мат. науки, № 2, 40 – 44 (2010).
11. В. Ю. Слюсарчук, *Експоненціально дихотомічні різницеві рівняння з кусково-сталими операторними коефіцієнтами*, Укр. мат. журн., **72**, № 6, 822 – 841 (2020).

Одержано 31.03.21