УДК 517.13

СИНГУЛЯРНІ СКІНЧЕННОГО РАНГУ НЕСИМЕТРИЧНІ ЗБУРЕННЯ САМОСПРЯЖЕНОГО ОПЕРАТОРА

М. Є. Дудкін, О. Ю. Дюженкова

Нац. техн. ун-т України "Київ. політех. ін-т ім. І. Сікорського"
просп. Перемоги, 37, Київ, 03056, Україна
e-mail: dudkin@imath.kiev.ua
oduzen@ukr.net

We generalize rank one singular nonsymmetric $\mathcal{H}_{-1}$ perturbations of the class of a self-adjoint operator to the case of a finite rank. Definition and the description of the resolvent are presented. The main propositions of the paper are illustrated for a specific example.

Для випадку скінченного рангу узагальнено сингулярні рангу один несиметричні збурення класу $\mathcal{H}_{-1}$ самоспряженого оператора. Наведено означення та дано опис резольвенти. Основні твердження роботи проілюстровано на конкретному прикладі.

1. Вступ. В роботах [1, 2] вперше розглянуто сингулярні несиметричні рангу один збурення самоспряженого оператора та описано відмінності точкового спектра, який виникає при такому збуренні. Складність розгляду полягає у тому, що збурений оператор не є самоспряженим, а лише лінійним і замкненим.

Взагалі симетричним збуренням самоспряжених операторів присвячено велику кількість робіт (див. бібліографію в [3 – 7]). У цій роботі пропонуються узагальнення результатів робіт [1 – 7] на випадок несиметричних класу $\mathcal{H}_{-1}$ збурень скінченного рангу. Тобто розглядається формальний вираз вигляду

$$\tilde{A} = A + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \langle \cdot, \omega_j \rangle \delta_j, \tag{1}$$

де A — незбурений самоспряжений оператор у сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$, $\alpha_j \in \mathbb{C}$, ω_j, δ_j, $j = 1, 2, \ldots, n < \infty$, — вектори із негативного простору $\mathcal{H}_{-1}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — дуальний скалярний добуток між позитивним і негативним просторами. Такі оператори, наприклад, узагальнюють моделі з нелокальними взаємодіями [8, 9], збурення гармонічного осцилятора δ-потенціалами [10].

2. Попередні відомості. Нехай у сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ зі скалярним добутком $(\cdot, \cdot)$ і нормою $\| \cdot \| = \sqrt{(\cdot, \cdot)}$ задано необмежений самоспряжений оператор A з областю визначення $\mathfrak{D}(A)$. Позначимо через $\rho(A)$ множину регулярних точок оператора A.

Розглянемо ланцюг просторів

$$\mathcal{H}_{-2} \supset \mathcal{H}_{-1} \supset \mathcal{H} \equiv \mathcal{H}_0 \supset \mathcal{H}_{+1} \supset \mathcal{H}_{+2}, \tag{2}$$

де $\mathcal{H}_{+k} = \mathfrak{D}(|A|^{k/2})$ — позитивний простір з нормою $\|\varphi\|_{+k} = \|(|A| + I)^{k/2}\varphi\|$, $\varphi \in \mathfrak{D}(|A|^{k/2})$, $\mathcal{H}_{-k}$ — поповнення $\mathcal{H}$ за нормою $\|f\|_{-k} = \|(|A| + I)^{-k/2} f\|$, $f \in \mathcal{H}$, $k = 1, 2,$

I — одиничний оператор. Очевидно, що $\mathcal{H}_{+2} = \mathfrak{D}(A)$. Через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ позначимо дуальний скалярний добуток для пари просторів $\mathcal{H}_{+1}$ і $\mathcal{H}_{-1}$.

Розширення оператора A за неперервністю на весь простір $\mathcal{H}_{-1}$ можна вважати обмеженим оператором, що діє з $\mathcal{H}_{+1}$ в $\mathcal{H}_{-1}$, а також необмеженим оператором в $\mathcal{H}_{-1}$, але з областю визначення $\mathcal{H}_{+1}$. Таке розширення позначено через $\mathbf{A}$.

У ланцюгу (2) розглянемо лінійний оператор

$$V = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \langle \cdot, \omega_j \rangle \delta_j, \quad n < \infty, \quad \omega_j, \delta_j \in \mathcal{H}_{-1},$$

з областю визначення $\mathfrak{D}(V) \subset \mathcal{H}_{+1}$ і областю значень $\mathfrak{R}(V) \subset \mathcal{H}_{-1}$, $\alpha_j \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Сума $\mathbf{A} + V$ є обмеженим оператором в $\mathcal{H}_{-1}$.

Тепер формальний вираз (1) розуміємо як оператор $\mathbf{A} + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \langle \cdot, \omega_j \rangle \delta_j$ з простору $\mathcal{H}_{+1}$ в $\mathcal{H}_{-1}$, звужений на $\mathcal{H}$, тобто

$$\tilde{A} := \tilde{A}_V = \left(\mathbf{A} + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \langle \cdot, \omega_j \rangle \delta_j \right) \restriction_{\mathcal{H}} . \tag{3}$$

Під звуженням розуміємо, що беремо лише ті вектори з $\mathcal{H}$, для яких дія суми операторів належить також $\mathcal{H}$. Такий оператор можна називати (за аналогією зі самоспряженим випадком) сингулярно несиметрично рангу $n < \infty$ збуреним класу $\mathcal{H}_{-1}$ відносно оператора A.

Вихід із простору $\mathcal{H}$ і процедура звуження не є зручним інструментом у застосуваннях. Отже, при додаткових припущеннях наведемо означення несиметрично сингулярно скінченного рангу збуреного самоспряженого оператора. Опис $\tilde{A}$ має відмінності залежно від того, де розташовані множини $\Omega := \mathrm{span}\,\{\omega_j\}_{j=1}^{n}$, $\Delta := \mathrm{span}\,\{\delta_j\}_{j=1}^{n}$. Для цієї роботи вважатимемо: по-перше $\Omega \subset \mathcal{H}_{-1}$, $\Delta \subset \mathcal{H}_{-1}$, тобто збурений оператор класу $\mathcal{H}_{-1}$, а по-друге $\Omega \cap \mathcal{H} = \{0\}$, $\Delta \cap \mathcal{H} = \{0\}$, тобто збурений оператор є чисто сингулярно збуреним (не має регулярної компоненти — збурений і незбурений оператор збігаються на щільній множині). Зокрема, якби серед $\{\omega_i\}$ або $\{\delta_i\}$ існував $\varpi \in \mathcal{H}_{-2}$, то збурений оператор належав би класу $\mathcal{H}_{-2}$. Через різноманіття варіантів такий випадок вимагає окремого дослідження, що буде зроблено у подальших публікаціях.

Далі у роботі будемо позначати A замість $\mathbf{A}$, якщо це не буде призводити до суперечності.

3. Означення збуреного оператора.

Означення 1. *Нехай A — необмежений самоспряжений оператор у сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$. Для наборів лінійно незалежних векторів $\{\omega_j\}_{j=1}^{n} \subset \mathcal{H}_{-1}$ і $\{\delta_j\}_{j=1}^{n} \subset \subset \mathcal{H}_{-1}$, $n < \infty$, таких, що $\Omega \cap \mathcal{H} = \{0\}$, $\Delta \cap \mathcal{H} = \{0\}$, де $\Omega := \mathrm{span}\,\{\omega_j\}_{j=1}^{n}$, $\Delta := := \mathrm{span}\,\{\delta_j\}_{j=1}^{n}$, побудуємо оператор $V = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \langle \cdot, \omega_j \rangle \delta_j$.*

Оператор $\tilde{A}$ називається сингулярно рангу n збуреним $\mathcal{H}_{-1}$-класу відносно A, якщо при деякому фіксованому $z \in \rho(A)$ його область визначення

$$\mathfrak{D}(\tilde{A}) = \left\{ \vartheta = \phi - \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i b_{i,j}(z) \langle \phi, \omega_i \rangle (A - z)^{-1} \delta_j \mid \phi \in \mathfrak{D}(A) \right\}, \tag{4}$$

де $b_{i,j}(z)$ *— елементи матриці, оберненої до*

$$G(z) = \begin{bmatrix} 1+\alpha_1\langle\delta_1,(A-\bar{z})^{-1}\omega_1\rangle & \alpha_2\langle\delta_1,(A-\bar{z})^{-1}\omega_2\rangle & \ldots & \alpha_n\langle\delta_1,(A-\bar{z})^{-1}\omega_n\rangle \\ \alpha_1\langle\delta_2,(A-\bar{z})^{-1}\omega_1\rangle & 1+\alpha_2\langle\delta_2,(A-\bar{z})^{-1}\omega_2\rangle & \ldots & \alpha_n\langle\delta_2,(A-\bar{z})^{-1}\omega_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1\langle\delta_n,(A-\bar{z})^{-1}\omega_1\rangle & \alpha_2\langle\delta_n,(A-\bar{z})^{-1}\omega_2\rangle & \ldots & 1+\alpha_n\langle\delta_n,(A-\bar{z})^{-1}\omega_n\rangle \end{bmatrix}, \tag{5}$$

за умови $\det G(z) \neq 0$, *та*

$$\begin{gathered} \mathfrak{D}(\tilde{A}) = \mathfrak{D}_{\mathcal{H}_1} \dot{+} \operatorname{span}\left\{(A-z)^{-1}\delta_j\right\}_{j=1}^{n}, \\ \mathfrak{D}_{\mathcal{H}_1} = \left\{\phi \in \mathfrak{D}(A) \mid ((A-z)\phi, (A-\bar{z})^{-1}\omega_j) = 0,\ j = 1,2,\ldots,n\right\}, \end{gathered} \tag{6}$$

за умови $\det G(z) = 0$, *і дія на векторах з* $\mathfrak{D}\big(\tilde{A}\big)$ *задається правилом*

$$\big(\tilde{A} - z\big)\vartheta = (A-z)\phi. \tag{7}$$

(Такий оператор позначаємо $\tilde{A} \in \mathcal{P}^n_{-1}(A)$*).*

Зауваження 1. Два варіанти області визначення $\mathfrak{D}(\tilde{A})$ обумовлені тим, що у випадку (6) довільним чином вибрана точка z може бути точкою точкового спектра оператора $\tilde{A}$, тобто $z \in \sigma_p(\tilde{A})$, і отже, $\det G(z) = 0$. У іншому разі, тобто (4), маємо $z \notin \sigma_p(\tilde{A})$, і отже, $\det G(z) \neq 0$.

Зауваження 2. Далі буде показано, що область визначення, наведена в означенні, не залежить від $z \in \rho(A)$. Також буде зрозуміло, що число z, відповідне випадку (4), завжди існує, оскільки скінченновимірні збурення самоспряженого оператора не міняють його неперервного спектра.

Зауваження 3. Якщо в означенні 1 для самоспряженого оператора A покласти $\omega_j = \delta_j$ і $\alpha_j \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $j = 1,2,\ldots,n$, то отримуємо відоме визначення сингулярно збуреного рангу n самоспряженого оператора класу $\mathcal{H}_{-1}$ [4].

Зауваження 4. У роботі розглядається збурення у вигляді (1), а не

$$\tilde{A} = A + \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{i,j}\langle\cdot,\omega_i\rangle\delta_j, \quad \alpha_{i,j} \in \mathbb{C},$$

тому що останній вираз можна завжди записати у вигляді одного рядка доданків (а не матриці). Зрозуміло, що ранг такого збурення може бути відмінний від n і при цьому можливі повтори елементів. Такі повтори не передбачаються у цій публікації заради простоти викладення, але вони неважко включаються у загальну схему.

Запишемо (3) у вигляді

$$\tilde{A} - z = A - z + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\langle\cdot,\omega_i\rangle\delta_i, \quad z \in \rho(A), \tag{8}$$

і припустимо, що $z \in \rho(\tilde{A})$. Тоді

$$\big(\tilde{A} - z\big)^{-1} = (A - z)^{-1} - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle \cdot, (A - \bar{z})^{-1}\omega_i \rangle \big(\tilde{A} - z\big)^{-1}\delta_i. \tag{9}$$

Для кожного $\delta_j,\ j = 1, 2, \ldots, n,$ маємо

$$\big(\tilde{A} - z\big)^{-1}\delta_j = (A - z)^{-1}\delta_j - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left\langle \delta_j, (A - \bar{z})^{-1}\omega_i \right\rangle \big(\tilde{A} - z\big)^{-1}\delta_i, \tag{10}$$

або

$$\begin{cases}
[1 + \alpha_1\langle \delta_1, (A - \bar{z})^{-1}\omega_1\rangle]\big(\tilde{A} - z\big)^{-1}\delta_1 & +\alpha_2\langle \delta_1, (A - \bar{z})^{-1}\omega_2\rangle\big(\tilde{A} - z\big)^{-1}\delta_2 + \ldots \\
 & \ldots + \alpha_n\langle \delta_1, (A - \bar{z})^{-1}\omega_n\rangle\big(\tilde{A} - z\big)^{-1}\delta_n = \\
 & = (A - z)^{-1}\delta_1 \\
\alpha_1\langle \delta_2, (A - \bar{z})^{-1}\omega_1\rangle\big(\tilde{A} - z\big)^{-1}\delta_1 & +[1 + \alpha_2\langle \delta_2, (A - \bar{z})^{-1}\omega_2\rangle]\big(\tilde{A} - z\big)^{-1}\delta_2 + \ldots \\
 & \ldots + \alpha_n\langle \delta_2, (A - \bar{z})^{-1}\omega_n\rangle\big(\tilde{A} - z\big)^{-1}\delta_n = \\
 & = (A - z)^{-1}\delta_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\alpha_1\langle \delta_n, (A - \bar{z})^{-1}\omega_1\rangle\big(\tilde{A} - z\big)^{-1}\delta_1 & +\alpha_2\langle \delta_n, (A - \bar{z})^{-1}\omega_2\rangle\big(\tilde{A} - z\big)^{-1}\delta_2 \ldots + \\
 & +[1 + \alpha_n\langle \delta_n, (A - \bar{z})^{-1}\omega_n\rangle]\big(\tilde{A} - z\big)^{-1}\delta_n = \\
 & = (A - z)^{-1}\delta_n,
\end{cases}$$

або у формі матриць

$$G(z)\begin{bmatrix} \big(\tilde{A} - z\big)^{-1}\delta_1 \\ \big(\tilde{A} - z\big)^{-1}\delta_2 \\ \ldots \\ \big(\tilde{A} - z\big)^{-1}\delta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A - z)^{-1}\delta_1 \\ (A - z)^{-1}\delta_2 \\ \ldots \\ (A - z)^{-1}\delta_n \end{bmatrix}.$$

Припускаючи, що $\det G(z) \neq 0,$ тобто матриця $G(z)$ має обернену, отримуємо

$$\begin{bmatrix} \big(\tilde{A} - z\big)^{-1}\delta_1 \\ \big(\tilde{A} - z\big)^{-1}\delta_2 \\ \ldots \\ \big(\tilde{A} - z\big)^{-1}\delta_n \end{bmatrix} = G(z)^{-1}\begin{bmatrix} (A - z)^{-1}\delta_1 \\ (A - z)^{-1}\delta_2 \\ \ldots \\ (A - z)^{-1}\delta_n \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Тепер (9) запишемо у вигляді

$$\big(\tilde{A} - z\big)^{-1} = (A - z)^{-1} - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_{i,j}(z) \left\langle \cdot, (A - \bar{z})^{-1}\omega_i \right\rangle (A - z)^{-1}\delta_i. \tag{12}$$

Якщо покласти для довільного $f \in \mathcal{H}$, $\phi = (A-z)^{-1}f$ і підставити в останній вираз $f = (A-z)\phi$, то отримаємо вектор з області визначення $\mathfrak{D}(\tilde{A})$:

$$\vartheta = \phi - \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i b_{i,j}(z)\langle\phi,\omega_i\rangle(A-z)^{-1}\delta_j.$$

Тепер є можливість довести твердження про дію збуреного оператора.

Твердження. *Дія сингулярно несиметрично рангу n збуреного самоспряженого оператора вигляду (3) на векторах з області визначення $\mathfrak{D}(\tilde{A})$ (4) (та зокрема (6)) задовольняє (7).*

Доведення. Запишемо (3) у вигляді

$$\big(\tilde{A}-z\big) = (A-z) + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\langle\cdot,\omega_j\rangle\delta_j, \quad z \in \rho(A)\cap\rho(\tilde{A}),$$

та його дію на вектор (4):

$$\big(\tilde{A}-z\big)\vartheta = \big(\tilde{A}-z\big)\left[\phi - \sum_{i,j=1}^{n}\alpha_i b_{i,j}(z)\langle\phi,\omega_i\rangle(A-z)^{-1}\delta_j\right] =$$

$$= \left[(A-z) + \sum_{j=1}^{n}\alpha_j\langle\cdot,\omega_j\rangle\delta_j\right]\left[\phi - \sum_{i,j=1}^{n}\alpha_i b_{i,j}(z)\langle\phi,\omega_i\rangle(A-z)^{-1}\delta_j\right] =$$

$$= (A-z)\phi + \sum_{j=1}^{n}\alpha_j\langle\phi,\omega_j\rangle\delta_j - \big(\tilde{A}-z\big)\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_i b_{i,j}(z)\langle\phi,\omega_i\rangle(A-z)^{-1}\delta_j =$$

$$= (A-z)\phi + \sum_{j=1}^{n}\alpha_j\langle\phi,\omega_j\rangle\delta_j - \big(\tilde{A}-z\big)\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\langle\phi,\omega_i\rangle\big(\tilde{A}-z\big)^{-1}\delta_i =$$

$$= (A-z)\phi + \sum_{j=1}^{n}\alpha_j\langle\phi,\omega_j\rangle\delta_j - \sum_{j=1}^{n}\alpha_j\langle\phi,\omega_j\rangle\delta_j = (A-z)\phi,$$

де у передостанній рівності використано (11).

Оскільки вигляд дії (3) на вектори з (6), очевидно, задовольняє (7), то твердження доведено.

Зауваження 5. Оскільки оператор $\tilde{A}$ не є самоспряженим, то його спряжений $\tilde{A}^*$ є відмінним від $\tilde{A}$, але має опис, подібний до $\tilde{A}$ в означенні 1. Зокрема $\tilde{A}$ не є самоспряженим, коли V не є симетричним.

Нехай A — необмежений самоспряжений оператор у сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$. Для наборів лінійно незалежних векторів $\{\omega_j\}_{j=1}^{n}$ і $\{\delta_j\}_{j=1}^{n}$, $n < \infty$, заданих на початку роботи, побудуємо оператор $V^* = \sum_{j=1}^{n}\bar{\alpha}_j\langle\cdot,\delta_j\rangle\omega_j$, очевидно, спряжений до V.

Оператор $\tilde{A}^* \in \mathcal{P}_{-1}^{n}(A)$ є спряженим до сингулярно рангу n збуреного $\mathcal{H}_{-1}$-класу відносно A, якщо при деякому фіксованому $\bar{z} \in \rho(A)$ його область визначення

$$\mathfrak{D}\big(\tilde{A}^*\big) = \left\{\vartheta = \phi - \sum_{i,j=1}^{n}\alpha_i b_{i,j}^*(\bar{z})\langle\phi,\delta_i\rangle(A-\bar{z})^{-1}\omega_j \;\middle|\; \phi \in \mathfrak{D}(A)\right\},$$

де $b^*_{i,j}(\bar z)$ — елементи матриці, оберненої до

$$G^*(z)=\begin{bmatrix} 1+\bar\alpha_1\langle\omega_1,(A-z)^{-1}\delta_1\rangle & \bar\alpha_2\langle\omega_2,(A-z)^{-1}\delta_1\rangle & \dots & \bar\alpha_n\langle\omega_n,(A-z)^{-1}\delta_1\rangle \\ \bar\alpha_1\langle\omega_1,(A-z)^{-1}\delta_2\rangle & 1+\bar\alpha_2\langle\omega_2,(A-z)^{-1}\delta_2\rangle & \dots & \bar\alpha_n\langle\omega_n,(A-z)^{-1}\delta_2\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar\alpha_1\langle\omega_1,(A-z)^{-1}\delta_n\rangle & \bar\alpha_2\langle\omega_2,(A-z)^{-1}\delta_n\rangle & \dots & 1+\bar\alpha_n\langle\omega_n,(A-z)^{-1}\delta_n\rangle \end{bmatrix},$$

за умови $\det G^*(z)\neq 0$, та

$$\mathfrak{D}\big(\tilde A^*\big)=\mathfrak{D}_{\mathcal{H}_1}\dot{+}\mathrm{span}\,\big\{(A-\bar z)^{-1}\omega_j\big\}_{j=1}^n,$$

$$\mathfrak{D}_{\mathcal{H}_1}=\Big\{\phi\in\mathfrak{D}(A)\;\Big|\;\big((A-\bar z)\phi,(A-z)^{-1}\delta_j\big)=0,\ j=1,2,\dots,n\Big\},$$

за умови $\det G^*(z)=0$, і дія задається правилом

$$\big(\tilde A^*-\bar z\big)\vartheta=(A-\bar z)\phi.$$

Зауваження 6. Використання спряженого сингулярно збуреного оператора визначає додатковий опис обох операторів як єдиний об'єкт. А саме, лінійний замкнений оператор $\tilde A\neq A$, щільно визначений у $\mathcal{H}$, є сингулярно збуреним класу $\mathcal{H}_{-1}$ відносно самоспряженого оператора A (з умовою $0\in\rho(A)\cap\rho(\tilde A)$), якщо обидві множини

$$\mathfrak{D}=\Big\{f\in\mathfrak{D}(A)\cap\mathfrak{D}\big(\tilde A\big)\;\big|\;Af=\tilde Af\Big\},\qquad \mathfrak{D}_*=\Big\{f\in\mathfrak{D}(A)\cap\mathfrak{D}\left(\big(\tilde A\big)^*\right)\;\big|\;Af=\tilde A^*f\Big\}$$

є щільними в $\mathcal{H}$, при цьому $\mathfrak{D}\subset\mathcal{H}_{+1}$, $\mathfrak{D}_*\subset\mathcal{H}_{+1}$.

Зрозуміло, що для кожної пари A і $\tilde A$ та A і $\tilde A^*$ існує спільне (зокрема, симетричне) звуження, тобто оператори $\dot A:=A\restriction\mathfrak{D}$ і $\dot A_*:=A\restriction\mathfrak{D}_*$ з нетривіальними індексами дефекту кожний:

$$\mathbf{n}^\pm(\dot A)=\dim\ker(\dot A\mp z)^*\neq 0,\qquad \mathbf{n}^\pm(\dot A_*)=\dim\ker\big(\dot A_*\mp z\big)^*\neq 0,\quad z\in\rho(A).$$

У цій роботі $\mathbf{n}^\pm(\dot A)=\mathbf{n}^\pm(\dot A_*)=n<\infty$. Останній опис близький до розв'язних розширень із роботи Вішика [11] та нормальних розширень формально нормального оператора [12, 13]. Якщо $\mathfrak{D}=\mathfrak{D}_*$ і $\tilde A=\tilde A^*$, то отримуємо звичайний опис сингулярно збуреного самоспряженого оператора [4; 7, с. 114]. Для сингулярно збурених несиметричних операторів такий опис не зручний і не придатний.

4. Резольвента сингулярно несиметрично рангу n збуреного оператора. Позначимо резольвенту $R_z=(A-z)^{-1}$, $z\in\rho(A)$ незбуреного самоспряженого оператора A і запишемо загальний вигляд резольвенти сингулярно несиметрично рангу n збуреного оператора $\tilde R_z=\big(\tilde A-z\big)^{-1}$, $z\in\rho\big(\tilde A\big)$ в $\mathcal{H}$.

Теорема 1. *Нехай A — необмежений самоспряжений оператор у сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ і $\tilde A\in\mathcal{P}^n_{-1}(A)$ — сингулярно несиметрично рангу n збурений відносно A оператор, визначений в означенні 1.*

Тоді резольвенти R_z і $\tilde R_z$, пов'язані формулою типу М. Крейна, для $z,\xi\in\rho(A)\cap\rho(\tilde A)$:

$$\tilde R_z=R_z+\sum_{i,j=1}^n\alpha_i b_{i,j}(z)\,(\cdot,n_i(\bar z))\,m_j(z) \tag{13}$$

із векторнозначними функціями

$$n_j(z) = (A-\xi)(A-z)^{-1}n_j(\xi), \quad m_j(z) = (A-\xi)(A-z)^{-1}m_j(\xi), \quad j = 1,2,\ldots,n, \quad (14)$$

де $n_j(z), m_j(z) \in \mathcal{H}_{+1} \setminus \mathcal{H}_{+2}$, *і матричнозначною функцією* $G(z)^{-1} = \{\alpha_i b_{i,j}(z)\}_{i,j=1}^n$ *такою що*

$$G(z) - G(\xi) = (z-\xi)\Gamma(n_i(\xi), \bar{\alpha}_j m_j(\bar{z})), \quad (15)$$

де $\Gamma(\,\cdot\,\cdot\,)$ *— матриця Грама векторів* $n_i(z) = R_z\delta_i,\ m_j(z) = R_z\omega_j$ *і коефіцієнти* $0 < |\alpha_i| < < \infty,\ i,j = 1,2,\ldots,n.$

Доведення. Вираз (13) випливає з викладеного в (8)–(12). Покажемо справедливість (14). Дійсно, якщо $n_j(z) = (A-z)^{-1}\delta_i,\ n_j(\xi) = (A-\xi)^{-1}\delta_i$, то

$$(A-z)n_j(z) = (A-\xi)n_j(\xi), \quad n_j(z) = (A-\xi)(A-z)^{-1}n_j(\xi), \quad i = 1,2,\ldots,n.$$

Аналогічно, якщо $m_j(z) = (A-z)^{-1}\omega_i,\ m_j(\xi) = (A-\xi)^{-1}\omega_i$, то

$$(A-z)m_j(z) = (A-\xi)m_j(\xi), \quad m_j(z) = (A-\xi)(A-z)^{-1}m_j(\xi), \quad i = 1,2,\ldots,n.$$

Зауважимо для подальшого, що оскільки $\{\delta_j\},\ j = 1,2,\ldots,n$ і $\{\omega_j\},\ j = 1,2,\ldots,n,$ — множини лінійно незалежних векторів, то відповідно і $\{n_j\},\ j = 1,2,\ldots,n,$ і $\{m_j\},\ j = = 1,2,\ldots,n,$ — також множини лінійно незалежних векторів (завдяки лінійності оператора $\mathbf{A}$).

Покажемо справедливість (15). Запишемо ліву сторону (15), використовуючи (5):

$$G(z) - G(\xi) =$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_1 \left\langle \delta_1, \left[(A-\bar{z})^{-1}\omega_1 - (A-\bar{\xi})^{-1}\omega_1\right]\right\rangle \ldots \alpha_n \left\langle \delta_1, \left[(A-\bar{z})^{-1}\omega_n - (A-\bar{\xi})^{-1}\omega_n\right]\right\rangle \\ \alpha_1 \left\langle \delta_2, \left[(A-\bar{z})^{-1}\omega_1 - (A-\bar{\xi})^{-1}\omega_1\right]\right\rangle \ldots \alpha_n \left\langle \delta_2, \left[(A-\bar{z})^{-1}\omega_n - (A-\bar{\xi})^{-1}\omega_n\right]\right\rangle \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \ddots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \alpha_1 \left\langle \delta_n, \left[(A-\bar{z})^{-1}\omega_1 - (A-\bar{\xi})^{-1}\omega_1\right]\right\rangle \ldots \alpha_n \left\langle \delta_n, \left[(A-\bar{z})^{-1}\omega_n - (A-\bar{\xi})^{-1}\omega_n\right]\right\rangle \end{bmatrix},$$

тобто (зі скороченою формою запису матриць)

$$\begin{aligned} G(z) - G(\xi) &= \left\{\alpha_j \left\langle \delta_i, \left[(A-\bar{z})^{-1}\omega_j - (A-\bar{\xi})^{-1}\omega_j\right]\right\rangle\right\}_{i,j=1}^n = \\ &= \left\{\alpha_j \left\langle \delta_i, \left[(A-\bar{z})^{-1} - (A-\bar{\xi})^{-1}\right]\omega_j\right\rangle\right\}_{i,j=1}^n = \\ &= \left\{\alpha_j \left\langle \delta_i, \left(\bar{z}-\bar{\xi}\right)(A-\bar{z})^{-1}(A-\bar{\xi})^{-1}\omega_j\right\rangle\right\}_{i,j=1}^n = \\ &= \left\{\alpha_j (z-\xi) \left\langle (A-\bar{z})^{-1}\delta_i, (A-\bar{\xi})^{-1}\omega_j\right\rangle\right\}_{i,j=1}^n = \\ &= \left\{\alpha_j (z-\xi) \left\langle \left(n_i(z), m_j(\bar{\xi})\right)\right\rangle\right\}_{i,j=1}^n = \\ &= (z-\xi)\Gamma\left(n_i(\xi), \bar{\alpha}_j m_j(\bar{z})\right), \end{aligned}$$

де використано тотожність Гільберта $(A-\bar{z})^{-1} - (A-\bar{\xi})^{-1} = (\bar{z}-\bar{\xi})(A-\bar{z})^{-1}(A-\bar{\xi})^{-1}$.

Зауваження 7. Взагалі у теоремі можна покладати деякі або навіть усі $\alpha_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$, рівними нулю. При цьому маємо, що збурення рангу менше n або $\tilde{R}_z = R_z$. Також можна покласти, що деякі або всі $\alpha_i = \infty,\ i = 1, 2, \ldots, n$. Тоді вираз (5) з урахуванням V слід переписати у вигляді

$$\hat{G}(z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha_1} + \langle \delta_1, (A-\bar{z})^{-1}\omega_1 \rangle & \langle \delta_1, (A-\bar{z})^{-1}\omega_2 \rangle & \ldots & \langle \delta_1, (A-\bar{z})^{-1}\omega_n \rangle \\ \langle \delta_2, (A-\bar{z})^{-1}\omega_1 \rangle & \frac{1}{\alpha_2} + \langle \delta_2, (A-\bar{z})^{-1}\omega_2 \rangle & \ldots & \langle \delta_2, (A-\bar{z})^{-1}\omega_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \delta_n, (A-\bar{z})^{-1}\omega_1 \rangle & \langle \delta_n, (A-\bar{z})^{-1}\omega_2 \rangle & \ldots & \frac{1}{\alpha_n} + \langle \delta_n, (A-\bar{z})^{-1}\omega_n \rangle \end{bmatrix},$$

і на місці відповідних $\dfrac{1}{\alpha_i}$, не порушуючи загальності, покласти нулі. Саме така матриця буде використовуватися надалі.

Зауваження 8. Також справедливі теорема, аналогічна до теореми 1, та зауваження, аналогічне до зауваження 8 для спряженого оператора $\tilde{A}^*$.

5. Обернена задача. Для $\tilde{A} \in \mathcal{P}^n_{-1}(A)$ також є розв'язною й обернена задача, як це властиво для сингулярно збурених самоспряжених операторів.

Теорема 2. *Нехай у сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ задано самоспряжений оператор A, тоді операторнозначна функція*

$$\tilde{R}_z := (A-z)^{-1} + \sum_{i,j=1}^{n} \hat{b}_{i,j}(z)\big(\cdot, n_i(\bar{z})\big) m_j(z), \quad z \in \rho(A), \tag{16}$$

є резольвентою сингулярно збуреного класу $\mathcal{H}_{-1}$ оператора, якщо для $n_i(\bar{z}),\ m_i(z),\ j = 1, 2, \ldots, n$, та $\hat{G}(z)^{-1} = \big\{\hat{b}_{i,j}(z)\big\}_{i,j=1}^{n}$ виконуються співвідношення

$$n_j(\bar{z}) = (A-\bar{\xi})(A-\bar{z})^{-1} n_j(\bar{\xi}), \quad m_j(z) = (A-\xi)(A-z)^{-1} m_j(\xi), \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{17}$$

$$\hat{G}(z) - \hat{G}(\xi) = (z-\xi)\Gamma\left(n_i(\xi), m_j(\bar{z})\right) \tag{18}$$

і $\operatorname{span}\{n_i(z)\}_{i=1}^{n},\ \operatorname{span}\{m_i(z)\}_{i=1}^{n} \subset \mathcal{H}_{+1} \setminus \mathcal{H}_{+2}$.

Доведення. Використовуємо теореми 1 і 2 з [14] (розд. VIII, § 1). А саме, операторнозначна функція (17) $\tilde{R}_z$ є резольвентою деякого замкненого оператора, якщо:

а) $\tilde{R}_z$ задовольняє тотожність Гільберта з деякими $z, \xi \in \mathbb{C} :\ \tilde{R}_z - \tilde{R}_\xi = (z-\xi)\tilde{R}_z\tilde{R}_\xi$, тобто (в термінах [14]) є псевдорезольвентою;

б) $\tilde{R}_z$ має лише тривіальне ядро, тобто $\ker\big(\tilde{R}_z\big) = \{0\}$.

Підставимо (16) у вигляді

$$\tilde{R}_z := R_z - \sum_{i,j=1}^{n} \hat{b}_{i,j}(z)\left(\cdot, n_i(\bar{z})\right) m_j(z)$$

у тотожність Гільберта $\tilde{R}_z - \tilde{R}_\xi = (z-\xi)\tilde{R}_z\tilde{R}_\xi$:

$$\left[R_z - \sum_{i,j=1}^{n} \hat{b}_{i,j}(z)\left(\cdot, n_i(\bar{z})\right) m_j(z)\right] - \left[R_\xi - \sum_{i,j=1}^{n} \hat{b}_{i,j}(\xi)\big(\cdot, n_i(\bar{\xi})\big) m_j(\xi)\right] =$$

$$= (z-\xi)\left[R_z - \sum_{i,j=1}^{n} \hat{b}_{i,j}(z)\,(\cdot, n_i(\bar{z}))\, m_j(z)\right]\left[R_\xi - \sum_{i,j=1}^{n} \hat{b}_{i,j}(\xi)\,\big(\cdot, n_i(\bar{\xi})\big)\, m_j(\xi)\right] =$$

$$= R_z - \sum_{i,j=1}^{n} \hat{b}_{i,j}(z)\,(\cdot, n_i(\bar{z}))\, m_j(z) - R_\xi + \sum_{i,j=1}^{n} \hat{b}_{i,j}(\xi)\big(\cdot, n_i(\bar{\xi})\big) m_j(\xi) =$$

$$= (z-\xi) R_z R_\xi - (z-\xi) \sum_{i,j=1}^{n} \hat{b}_{i,j}(\xi)\big(\cdot, n_i(\bar{\xi})\big) R_z m_j(\xi) -$$

$$- (z-\xi) \sum_{i,j=1}^{n} \hat{b}_{i,j}(z)\,\big(\cdot, R_{\bar{\xi}} n_i(\bar{z})\big)\, m_j(z) +$$

$$+ (z-\xi) \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{p,q=1}^{n} \hat{b}_{i,j}(z) \hat{b}_{p,q}(\xi) \big(m_q(\xi), n_i(\bar{z})\big)\big(\cdot, n_p(\bar{z})\big) m_j(z).$$

Використовуючи тотожність Гільберта для R_z та рівності

$$(z-\xi) R_z m_j(\xi) = m_j(z) - m_j(\xi), \qquad \left(\bar{z} - \bar{\xi}\right) R_{\bar{\xi}} n_i(\bar{z}) = n_i(\bar{z}) - n_i(\bar{\xi}),$$

які випливають з (17), отримуємо

$$\sum_{i,j=1}^{n} \hat{b}_{i,j}(\xi)\big(\cdot, n_i(\bar{\xi})\big) m_j(\xi) - \sum_{i,j=1}^{n} \hat{b}_{i,j}(z)\,(\cdot, n_i(\bar{z}))\, m_j(z) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \hat{b}_{i,j}(\xi)\big(\cdot, n_i(\bar{\xi})\big)\big[m_j(z) - m_j(\xi)\big] - \sum_{i,j=1}^{n} \hat{b}_{i,j}(z)\,\big(\cdot, \big[n_i(\bar{z}) - n_i(\bar{\xi})\big]\big)\, m_j(z) +$$

$$+ (z-\xi) \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{p,q=1}^{n} \hat{b}_{i,j}(z) \hat{b}_{p,q}(\xi) \big(m_q(\xi), n_i(\bar{z})\big)\big(\cdot, n_p(\bar{z})\big) m_j(z).$$

Розкриваємо квадратні дужки та зводимо подібні:

$$0 = \sum_{i,j=1}^{n} \hat{b}_{i,j}(\xi)\big(\cdot, n_i(\bar{\xi})\big) m_j(z) - \sum_{i,j=1}^{n} \hat{b}_{i,j}(z)\big(\cdot, n_i(\bar{\xi})\big) m_j(z) +$$

$$+ (z-\xi) \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{p,q=1}^{n} \hat{b}_{i,j}(z) \hat{b}_{p,q}(z) \big(m_q(\xi), n_i(\bar{z})\big)\big(\cdot, n_p(\bar{z})\big) m_j(z).$$

Оскільки в останній рівності в усіх доданках є однаковий компонент $\sum_{i,j=1}^{n} (\cdot, n_i(\bar{\xi})) m_j(z)$, то

$$0 = \hat{G}^{-1}(\xi) - \hat{G}^{-1}(z) + (z-\xi) \hat{G}^{-1}(\xi) \Gamma\big(m_q(\xi), n_j(\bar{z})\big) \hat{G}^{-1}(z),$$

де, нагадаємо, $\hat{G}^{-1}(z) = \{\hat{b}_{i,j}(z)\}_{i,j=1}^{n}$. І після переходу до $G(\xi)$ і $G(z)$ отримуємо (18).

Покажемо другу з умов існування резольвенти. Для вектора $f \in \mathcal{H}$ такого, що $f \perp n_j(\bar{z})$, $j = 1, 2, \ldots, n$, очевидно, маємо $\tilde{R}_z f = R_z f$.

Нагадаємо, що оскільки всі $\delta_j,\ j = 1, 2, \ldots, n,$ вважаємо лінійно незалежними, то й при $z \in \rho(A)$ вектори $n_j(z) = (A - z)^{-1}\delta_j$ також є лінійно незалежними. Тому знайдеться вектор $f \in \mathcal{H}$ такий, що $f \not\perp n_i(\bar{z})$ і $f \perp n_j(\bar{z}),\ j = 1, 2, \ldots, n,\ j \neq i,$ при кожному фіксованому $i = 1, 2, \ldots, n.$ Для такого вектора $\tilde{R}_z f = R_z f + \sum_{j=1}^{n} \hat{b}_{i,j}\big(f, n_i(\bar{z})\big) m_j(z) \neq 0.$ Якби $R_z f = -\sum_{j=1}^{n} \hat{b}_{i,j}\big(f, n_i(\bar{z})\big) m_j(z),$ то це означало б, що, з одного боку, $\operatorname{span}\{m_j(z)\} \in \in \mathcal{H}_{+2},$ а за умови теореми $\operatorname{span}\{m_j(z)\} \in \mathcal{H}_{+1} \setminus \mathcal{H}_{+2}.$

Отже, $\tilde{R}_z$ є резольвентою деякого замкненого оператора, який можна позначити через $\tilde{A}.$ Той факт, що A і $\tilde{A}$ збігаються на деякій щільній множині, випливає з умови $\operatorname{span}\{m_j(z)\} \in \mathcal{H}_{+1} \setminus \mathcal{H}_{+2}$ [7]. Аналогічно, той факт, що A і $\tilde{A}^*$ збігаються на деякій щільній множині, випливає з умови $\operatorname{span}\{n_j(z)\} \in \mathcal{H}_{+1} \setminus \mathcal{H}_{+2}$ [7].

Зауваження 9. Насправді, теорема 2 дає більше, ніж твердження, обернене до теореми 1. З цієї теореми випливає зокрема й той факт, що область визначення сингулярно збуреного оператора в означенні 1 не залежить від фіксованого $z \in \rho(A).$

Зауваження 10. Теорема, аналогічна до теореми 2 для спряженого оператора $\tilde{A}^*$, також справедлива.

6. Приклад. Наведемо наочний, легко обчислювальний приклад, який ілюструє твердження роботи.

Нехай у гільбертовому просторі $\mathcal{H} = L_2 := L_2([1, \infty], dx)$ заданий оператор A — множення на незалежну змінну "x", тобто

$$Af(x) = xf(x), \quad f \in \mathfrak{D}(A) := \big\{ f(x) \in L_2 \mid xf(x) \in L_2 \big\}.$$

Тоді

$$\mathcal{H}_{+1} = L_2([1, \infty], xdx), \qquad \mathcal{H}_{-1} = L_2\left([1, \infty], \frac{1}{x}\, dx\right),$$

$$\mathcal{H}_{+2} = L_2\left([1, \infty], x^2 dx\right), \qquad \mathcal{H}_{-2} = L_2\left([1, \infty], \frac{1}{x^2}\, dx\right).$$

Розглянемо сингулярне рангу два несиметричне збурення

$$\tilde{A} = A + \alpha_1 \langle \cdot, \omega_1 \rangle \delta_1 + \alpha_2 \langle \cdot, \omega_2 \rangle \delta_2,$$

де $\omega_1 = x^{-1/2},\ \delta_1 = x^{-1/3},\ \omega_2 = x^{-1/4},\ \delta_2 = x^{-1/6}.$ Легко перевірити, що $\omega_i \in \mathcal{H}_{-1} \setminus \mathcal{H},$ $\delta_i \in \mathcal{H}_{-1} \setminus \mathcal{H},\ i = 1, 2.$ Тобто маємо збурений оператор

$$\tilde{A}f(x) = xf(x) + \alpha_1 x^{-1/3} \int_1^\infty f(x) x^{-1/2}\, dx + \alpha_2 x^{-1/6} \int_1^\infty f(x) x^{-1/4}\, dx.$$

Запишемо вектори його області визначення при $z = 0$:

Запишемо його область визначення. Для цього виберемо $z = 0,$ та обчислимо величини

$$\big\langle \delta_1, A^{-1}\omega_1 \big\rangle = \int_1^\infty x^{-11/6}\, dx = \frac{6}{5}, \qquad \big\langle \delta_1, A^{-1}\omega_2 \big\rangle = \int_1^\infty x^{-15/12}\, dx = \frac{12}{7},$$

$$\left\langle\delta_2, A^{-1}\omega_1\right\rangle = \int\limits_1^\infty x^{-5/3}\,dx = \frac{3}{2}, \qquad \left\langle\delta_2, A^{-1}\omega_2\right\rangle = \int\limits_1^\infty x^{-17/12}\,dx = \frac{12}{5};$$

$$\Delta = \det\begin{vmatrix} 1+\alpha_1\left\langle\delta_1, A^{-1}\omega_1\right\rangle & \alpha_2\left\langle\delta_1, A^{-1}\omega_2\right\rangle \\ \alpha_1\left\langle\delta_2, A^{-1}\omega_1\right\rangle & 1+\alpha_2\left\langle\delta_2, A^{-1}\omega_2\right\rangle \end{vmatrix} =$$

$$= \det\begin{vmatrix} 1+\alpha_1\,\dfrac{6}{5} & \alpha_2\,\dfrac{12}{7} \\ \alpha_1\,\dfrac{3}{2} & 1+\alpha_2\,\dfrac{12}{5} \end{vmatrix} = \alpha_1\,\frac{6}{5} + \alpha_2\,\frac{12}{5} + \frac{209}{175}\,\alpha_1\alpha_2,$$

$$\tilde{A}^{-1}\delta_1 = \frac{1+\alpha_2\,\dfrac{12}{5}}{\Delta}\,A^{-1}\delta_1 - \frac{\alpha_1\,\dfrac{3}{2}}{\Delta}\,A^{-1}\delta_2 = \frac{1+\alpha_2\,\dfrac{12}{5}}{\Delta}\,x^{-4/3} - \frac{\alpha_1\,\dfrac{3}{2}}{\Delta}\,x^{-7/6},$$

$$\tilde{A}^{-1}\delta_2 = -\frac{\alpha_2\,\dfrac{12}{7}}{\Delta}\,A^{-1}\delta_1 + \frac{1+\alpha_1\,\dfrac{6}{5}}{\Delta}\,A^{-1}\delta_2 = -\frac{\alpha_1\,\dfrac{12}{7}}{\Delta}\,x^{-4/3} + \frac{1+\alpha_1\,\dfrac{6}{5}}{\Delta}\,x^{-7/6}.$$

Отже, область визначення $\mathfrak{D}\big(\tilde{A}\big)$ складається з векторів вигляду

$$\vartheta(x) = \phi(x) - \alpha_1\,\frac{1+\alpha_2\,\dfrac{12}{5}}{\Delta}\,x^{-4/3}\int\limits_1^\infty \phi(x)x^{-1/2}\,dx + \alpha_1^2\,\frac{\dfrac{3}{2}}{\Delta}\,x^{-7/6}\int\limits_1^\infty \phi(x)x^{-1/2}\,dx +$$

$$+\,\alpha_2^2\,\frac{\dfrac{12}{7}}{\Delta}\,x^{-4/3}\int\limits_1^\infty \phi(x)x^{-1/4}\,dx - \alpha_2\,\frac{1+\alpha_1\,\dfrac{6}{5}}{\Delta}\,x^{-7/6}\int\limits_1^\infty \phi(x)x^{-1/4}\,dx, \quad \phi\in\mathfrak{D}(A).$$

А обернений до заданого оператор має вигляд

$$\tilde{A}^{-1}f(x) = \frac{1}{x}\,f(x) - \alpha_1\,\frac{1+\alpha_2\,\dfrac{12}{5}}{\Delta}\,x^{-4/3}\int\limits_1^\infty f(x)x^{-3/2}\,dx + \alpha_1^2\,\frac{\dfrac{3}{2}}{\Delta}\,x^{-7/6}\int\limits_1^\infty f(x)x^{-3/2}\,dx +$$

$$+\,\alpha_2^2\,\frac{\dfrac{12}{7}}{\Delta}\,x^{-4/3}\int\limits_1^\infty f(x)x^{-5/4}\,dx - \alpha_2\,\frac{1+\alpha_1\,\dfrac{6}{5}}{\Delta}\,x^{-7/6}\int\limits_1^\infty f(x)x^{-5/4}\,dx, \quad f\in L_2.$$

Література

1. M. E. Dudkin, T. I. Vdovenko, *Dual pair of eigenvalues in rank one singular perturbations*, Mat. Stud., **48**, № 2, 156 – 164 (2017).
2. M. E. Dudkin, T. I. Vdovenko, *On extensions of linear functionals with applications to non-symmetrically singular perturbations*, Methods Funct. Anal. Topology, **24**, № 3, 193 – 206 (2018).
3. С. Альбеверио, Ф. Гестези, Р. Хеэг-Крон, Х. Хольден, *Решаемые модели в квантовой механике*, Мир, Москва (1991).
4. S. Albeverio, P. Kurasov, *Singular perturbations of differential operators; solvable Schrödinger type operators*, Univ. Press, Cambridge (2000).

5. В. Д. Кошманенко, *Сингулярные билинейные формы в теории возмущений самосопряженных операторов*, Наук. думка, Киев (1993).
6. V. D. Koshmanenko, *Singular quadratic forms in perturbation theory*, Mathematics and Its Applications, **474**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (1999).
7. V. Koshmanenko, M. Dudkin, *The method of rigged spaces in singular perturbation theory of self-adjoint operators. Operator theory: advances and applications*, **253**, Birkhäuser/Springer (2016).
8. S. Albeverio, L. Nizhnik, *Schrödinger operators with nonlocal point interactions*, J. Math. Anal. Appl., **332**, 884 – 895 (2007).
9. S. Albeverio, R. Hryniv, L. Nizhnik, *Inverse spectral problems for nonlocal Sturm – Liouville operators*, Inverse Problems, **23**, 523 – 535 (2007).
10. B. S. Mityagin, *The spectrum of a harmonic oscillator operator perturbed δ-interactions*, Integral Equations Operator Theory, **85**, 451 – 495 (2016).
11. М. И. Вишик, *Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений*, Тр. Моск. мат. о-ва, **1**, 187 – 246 (1952).
12. М. Є. Дудкін, *Сингулярно збурені нормальні оператори*, Укр. мат. журн., **51**, № 8, 1045 – 1053 (1999).
13. M. E. Dudkin, L. P. Nizhnik, *Singularly perturbed normal operators*, Methods Funct. Anal. Topology, **16**, № 4, 298 – 303 (2010).
14. Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, Москва (1972).

Одержано 14.02.21,
після доопрацювання — 27.04.21