УДК 517.983

СЛАБКО НЕЛІНІЙНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ОПЕРАТОРНИХ РІВНЯНЬ У БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ

В. П. Журавльов

Поліс. нац. ун-т,
Старий б-р, 7, Житомир, 10008, Україна,
email: vfz2008@ukr.net

Weakly nonlinear boundary-value problems for operator equations with a generalized invertible operator in the linear part of the boundary-value problem in the critical case are considered. We obtain necessary and sufficient conditions for the existence of at least one and unique solution of this boundary-value problem and propose convergent iteration procedures for its construction.

Розглянуто слабконелінійні крайові задачі для операторних рівнянь із узагальнено оборотним оператором у лінійній частині крайової задачі у критичному випадку. Отримано необхідні та достатні умови існування принаймні одного та єдиного розв'язку, запропоновано збіжні ітераційні процедури для його побудови.

Дослідження слабко нелінійних крайових задач

$$
\begin{aligned}
(Lz)(t) &= f(t) + \varepsilon Z(z, t, \varepsilon), \\
\ell z(\cdot, \varepsilon) &= \alpha + \varepsilon J(z, \varepsilon)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

для операторних рівнянь із узагальнено оборотними операторами у лінійній частині у банахових просторах продовжує розвиток методів теорії збурень та методу малого параметра Ляпунова – Пуанкаре [1], розвинутий київською школою нелінійної механіки.

Такі крайові задачі для систем звичайних диференціальних рівнянь розглядалися в періодичному випадку в [2], для систем звичайних диференціальних рівнянь і систем функціонально-диференціальних рівнянь із імпульсним впливом у загальному нетеровому випадку — в [3 – 5].

Узагальненням цих задач став їх розгляд у банахових просторах, коли скінченновимірний евклідовий простір значень функції замінювався на банаховий простір. Слабко нелінійні крайові задачі (1) для випадку, коли L — звичайний диференціальний оператор, який діє у банаховому просторі, досліджено в [6]. Важливою особливістю цих задач є та, що рівняння $Lz = f$ лінійної породжуючої крайової задачі має розв'язок при будь-якій правій частині, тобто оператор L є всюди розв'язним [7].

Крайову задачу (1) у випадку, коли L — інтегральний не всюди розв'язний оператор Фредгольма з виродженим ядром, розглянуто в [8].

Загального підходу до дослідження слабко нелінійних крайових задач (1), у лінійній частині яких — не всюди розв'язний оператор, на сьогодні не запропоновано. Дослідження таких задач у банахових просторах пов'язане з труднощами по узагальненому оберненню операторів та операторних матриць у банахових просторах.

Постановка задачі. Нехай $\mathrm{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ — банаховий простір обмежених вектор-функцій $z(t)$, визначених на скінченному проміжку $\mathcal{I}$ зі значеннями у банаховому просторі $\mathbf{B}_1$, $z(\cdot):$

$\mathcal{I} \to \mathbf{B}_1$ з нормою $|||z||| = \sup_{t\in\mathcal{I}} \|z(t)\|_{\mathbf{B}_1}$, $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ — банаховий простір обмежених вектор-функцій $f(t)$, визначених на тому ж проміжку $\mathcal{I}$ зі значеннями у банаховому просторі $\mathbf{B}_2$ з нормою $|||f||| = \sup_{t\in\mathcal{I}} \|f(t)\|_{\mathbf{B}_2}$, $\mathbf{B}$ — банаховий простір векторів зі сталими компонентами, $\mathbf{C}[\varepsilon]$ — простір неперервних по ε функцій.

Розглянемо слабко нелінійну крайову задачу з малим невід'ємним параметром ε, $\varepsilon \in \in \mathcal{I}_{\varepsilon_0}$, $\mathcal{I}_{\varepsilon_0} =: 0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0$:

$$Lz(\cdot, \varepsilon)(t) = f(t) + \varepsilon Z(z(t,\varepsilon), t, \varepsilon), \tag{2}$$

$$\ell z(\cdot,\varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon). \tag{3}$$

Разом із крайовою задачею (2), (3) розглянемо лінійну крайову задачу

$$Lz_0(t) = f(t), \tag{4}$$

$$\ell z_0(\cdot) = \alpha, \tag{5}$$

яку отримано з крайової задачі (2), (3) при $\varepsilon = 0$.

За аналогією з подібними задачами для систем звичайних диференціальних рівнянь [2–4, 6], крайову задачу (4), (5) будемо називати породжуючою крайовою задачею для крайової задачі (2), (3), розв'язки крайової задачі (4), (5) будемо називати породжуючими.

Крайову задачу (2), (3) будемо розглядати при умовах:

(a$_1$) $L\colon \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \times \mathcal{I}_{\varepsilon_0} \to \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2) \times \mathcal{I}_{\varepsilon_0}$ — обмежений узагальнено оборотний оператор;

(a$_2$) $Z\colon \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \times \mathcal{I} \times \mathcal{I}_{\varepsilon_0} \to \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2) \times \mathcal{I}_{\varepsilon_0}$ — нелінійний по z обмежений оператор, який в околі породжуючого розв'язку $\|z - z_0\| \le q$ має похідну Фреше по z і неперервний по ε, q — достатньо мала величина;

(a$_3$) $Z(0,t,0) = 0$, $Z'_z(0,t,0) = 0$;

(a$_4$) $f(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$; (6)

(a$_5$) $\ell\colon \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \to \mathbf{B}$ — лінійний обмежений вектор-функціонал;

(a$_6$) $J\colon \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \times \mathcal{I}_{\varepsilon_0} \to \mathbf{B} \times \mathcal{I}_{\varepsilon_0}$ — нелінійний по z обмежений вектор-функціонал, який в околі породжуючого розв'язку $\|z - z_0\| \le q$ має похідну Фреше по z і неперервний по ε;

(a$_7$) $J(0,0) = 0$, $J'_z(0,0) = 0$;

(a$_8$) $\alpha \in \mathbf{B}$.

Мета цієї роботи: із застосуванням загальної теорії дослідження лінійних крайових задач для не всюди розв'язних операторних рівнянь, теорії узагальненого обернення операторів у банахових просторах [9], а також узагальненого обернення операторних матриць [10] знайти умови існування та зображення загального розв'язку $z(t,\varepsilon)$ крайової задачі (2), (3), який належить простору $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ по t, простору $\mathbf{C}[\varepsilon]$ по ε і обертається при $\varepsilon = 0$ в один із породжуючих розв'язків крайової задачі (4), (5).

Задача буде розв'язуватися шляхом переходу за допомогою методів типу Ляпунова–Шмідта від крайової задачі (2), (3) до операторної системи, для якої можна застосувати збіжні ітераційні процедури, засновані на принципі нерухомої точки [2–4]. Інтервал збіжності ітераційних процедур може бути встановлений за допомогою мажорант Ляпунова [1, 11], які успішно були застосовані для періодичних крайових задач [2] і загальних нетерових крайових задач [3, 4].

Попередні відомості. Знайдемо необхідні та достатні умови розв'язності, а також структуру множини розв'язків $z(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ лінійної неоднорідної породжуючої крайової задачі (4), (5) у припущенні, що виконується умова (a$_1$) з (6), тобто оператор L узагальнено оборотний.

Клас обмежених узагальнено оборотних операторів, які діють із банахового простору $\mathbf{X}$ у банаховий простір $\mathbf{Y}$, надалі будемо позначати через $\mathbf{GI}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ *(generalized inverse)*.

З узагальненої оборотності оператора L випливає [12] його нормальна розв'язність і доповнювальність нуль-простору $N(L)$ і ядра $R(L)$ у банахових просторах $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ і $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ відповідно. При цьому існують [13] обмежені проектори $\mathcal{P}_{N(L)} \colon \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \to \to N(L)$, $\mathcal{P}_{Y_L} \colon \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2) \to Y_L$, де $Y_L = \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2) \ominus R(L)$ та обмежений узагальнено обернений оператор L^- до оператора L.

Відомо [9, с. 115], що операторне рівняння (4) розв'язне для тих і лише тих $f(t) \in \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$, які задовольняють умову

$$(\mathcal{P}_{Y_L} f)(t) = 0.$$

При виконанні цієї умови операторне рівняння (4) має загальний розв'язок

$$z_0(t) = (\mathcal{P}_{N(L)} \hat{z})(t) + (L^- f)(t), \quad t \in \mathcal{I}, \tag{7}$$

де $\hat{z}(t)$ — довільний елемент простору $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$.

Підставивши розв'язок (7) у крайову умову (5), отримаємо операторне рівняння

$$\ell(\mathcal{P}_{N(L)} \hat{z})(\cdot) + \ell\left(L^- f\right)(\cdot) = \alpha$$

відносно довільного елемента $\hat{z}(t)$.

Позначимо через $\mathcal{L} = \ell \mathcal{P}_{N(L)}$ оператор, який діє з банахового простору $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ у банаховий простір $\mathbf{B}$. Оператор $\mathcal{L} \colon \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \to \mathbf{B}$ є обмеженим як суперпозиція обмеженого функціонала ℓ та обмеженого оператора $\mathcal{P}_{N(L)}$.

Нехай оператор $\mathcal{L}$ належить $\mathbf{GI}(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1), \mathbf{B})$. Тоді його ядро $N(\mathcal{L})$ та образ $R(\mathcal{L})$ доповнювальні в банахових просторах $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ та $\mathbf{B}$ відповідно. Позначимо $\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})} \colon \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \to N(\mathcal{L})$ обмежений проектор банахового простору $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ на нуль-простір оператора $\mathcal{L}$, $\mathcal{P}_{Y_\mathcal{L}} \colon \mathbf{B} \to Y_\mathcal{L}$ — обмежений проектор банахового простору $\mathbf{B}$ на підпростір $Y_\mathcal{L} \subset \mathbf{B}$, $Y_\mathcal{L} = I_\mathbf{B} \ominus R(\mathbf{B})$, $\mathcal{L}^-$ — узагальнено обернений оператор до оператора $\mathcal{L}$.

Оскільки оператор $\mathcal{L}$ узагальнено оборотний, а отже, нормально розв'язний, то рівняння

$$\left(\mathcal{L} \hat{z}\right)(\cdot) = \alpha - \ell\left(L^- f\right)(\cdot) \tag{8}$$

розв'язне тоді й лише тоді, коли виконується умова

$$\mathcal{P}_{Y_\mathcal{L}}\left[\alpha - \ell\left(L^- f\right)(\cdot)\right] = 0,$$

при виконанні якої воно має сім'ю розв'язків

$$\hat{z}(t) = \left(\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})} \hat{z}_0\right)(t) + \left(\mathcal{L}^-\left[\alpha - \ell\left(L^- f\right)(\cdot)\right]\right)(t), \tag{9}$$

де $\hat{z}_0(t)$ — довільний елемент банахового простору $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$, $\mathcal{L}^-$ — узагальнено обернений оператор до оператора $\mathcal{L}$.

Підставляючи (9) у (7), отримуємо загальний розв'язок крайової задачі (4), (5):

$$z_0(t) = \left(\mathcal{P}_{N(L)}\left\{(\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})} \hat{z}_0)(t) + \mathcal{L}^-\left[\alpha - \ell(L^- f)(\cdot)\right]\right\}\right)(t) + \left(L^- f\right)(t) =$$

$$= \left(\mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}\hat{z}_0\right)(t) + (Gf)(t) + \left(\mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{L}^-\alpha\right)(t),$$

де G — лінійний обмежений оператор, який називається узагальненим оператором Гріна напіводнорідної $(\alpha = 0)$ крайової задачі (4), (5),

$$(Gf)(t) = \left(L^- f\right)(t) - \left(\mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{L}^-\ell\left(L^- f\right)(\cdot)\right)(t). \tag{10}$$

Суперпозиція операторів $\mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}$ є проектором банахового простору $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ на нуль-простір $N(\varLambda)$ оператора $\varLambda = \operatorname{col}[L, \ell]$. Іншими словами, оператор $\mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}$ є оператором розв'язку [14] відповідної (4), (5) однорідної крайової задачі.

Теорема 1 [9, с. 151]. *Нехай оператори* $L \in \mathbf{GI}(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1), \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2))$ *та* $\mathcal{L} \in \in \mathbf{GI}(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1), \mathbf{B})$. *Тоді відповідна (4), (5) однорідна крайова задача має загальний розв'язок*

$$z_0(t) = (\mathcal{P}_{N(\varLambda)}\hat{z}_0)(t),$$

де $(\mathcal{P}_{N(\varLambda)}\ *)(t) = (\mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}\ *)(t)$ *— оператор розв'язку відповідної (4), (5) однорідної крайової задачі,* $\hat{z}_0(t)$ *— довільний елемент банахового простору* $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$.

Неоднорідна породжуюча крайова задача (4), (5) розв'язна для тих і лише тих $f(t) \in \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ *і* $\alpha \in \mathbf{B}$, *які задовольняють систему умов*

$$\begin{cases} (\mathcal{P}_{Y_L} f)(t) = 0, \\ \mathcal{P}_{Y_\mathcal{L}}\left[\alpha - \ell\left(L^- f\right)(\cdot)\right] = 0, \end{cases} \tag{11}$$

і при цьому вона має загальний розв'язок

$$z_0(t, \hat{z}_0) = \left(\mathcal{P}_{N(\varLambda)}\hat{z}_0\right)(t) + (Gf)(t) + \left(\mathcal{P}_{N(L)}\left(\mathcal{L}^-\alpha\right)\right)(t), \tag{12}$$

де $(Gf)(t)$ *— узагальнений оператор Гріна (10).*

Основний результат. Слабко нелінійні крайові задачі. Розглянемо крайову задачу (2), (3) у випадку, коли породжуюча крайова задача (4), (5) неоднозначно розв'язна.

З теореми 1 маємо, що породжуюча крайова задача (4), (5) має розв'язки тоді й лише тоді, коли $f(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ і $\alpha \in \mathbf{B}$ задовольняють систему умов (11), при виконанні яких вона має сім'ю розв'язків (12).

Необхідна умова існування розв'язків. Припустимо, що $f(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ і $\alpha \in \mathbf{B}$ такі, що умови (11) виконано.

Теорема 2. *Нехай крайова задача (2), (3) задовольняє умови (6) і має розв'язок* $z(t, \varepsilon)$, *неперервний по* $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, *який обертається при* $\varepsilon = 0$ *у деякий породжуючий розв'язок* $z_0(t, \hat{z}_0)$ *вигляду (12), отриманий при* $\hat{z}_0 = \hat{z}_0^\sharp$. *Тоді елемент* $\hat{z}_0^\sharp \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ *задовольняє систему рівнянь*

$$\begin{cases} \mathcal{P}_{Y_L} Z\left(z_0\left(\cdot, \hat{z}_0^\sharp\right), \cdot, \varepsilon\right) = 0, \\ \mathcal{P}_{Y_\mathcal{L}}\left\{J\left(z_0\left(\cdot, \hat{z}_0^\sharp\right), \varepsilon\right) - \ell L^- Z\left(z_0\left(\cdot, \hat{z}_0^\sharp\right), \cdot, \varepsilon\right)\right\} = 0. \end{cases}$$

Доведення. Нехай виконані умови теореми. Тоді при всіх $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0$ справедливі тотожності

$$Lz(\cdot, \varepsilon)(t) \equiv f(t) + \varepsilon Z(z(t, \varepsilon), t, \varepsilon),$$

$$(\ell z)(\cdot) \equiv \alpha + \varepsilon J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon).$$

Використовуючи теорему 1 та з огляду на справедливість умов (11), для цієї крайової задачі отримаємо, що при всіх $\varepsilon \in \mathcal{I}_{\varepsilon_0},\ \varepsilon \neq 0$, нелінійні оператор $Z(z(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ і функціонал $J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ задовольняють систему умов

$$\begin{cases} \mathcal{P}_{Y_L} Z(z(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon) = 0, \\ \mathcal{P}_{Y_{\mathcal{L}}} \left\{ J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \ell L^- Z(z(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon) \right\} = 0. \end{cases} \tag{13}$$

Тоді, оскільки нелінійні оператор $Z(z,t,\varepsilon)$ і функціонал $J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ задовольняють умови (a_2), (a_3) та (a_6), (a_7) з (6) в околі $(\varepsilon = 0)$ породжуючого розв'язку $z_0(t,\hat{z}_0)$, то, переходячи до границі при $\varepsilon \to 0,\ z(t,\varepsilon) \to z_0\Big(t,\hat{z}_0^\sharp\Big)$, отримаємо систему рівностей

$$F\left(\hat{z}_0\right) = \begin{cases} \mathcal{P}_{Y_L} Z\left(z_0\Big(t,\hat{z}_0^\sharp\Big),\cdot,\varepsilon\right) = 0, \\ \mathcal{P}_{Y_{\mathcal{L}}} \left\{ J\left(z_0\Big(\cdot,\hat{z}_0^\sharp\Big),\varepsilon\right) - \ell L^- Z\left(z_0\Big(\cdot,\hat{z}_0^\sharp\Big),\cdot,\varepsilon\right) \right\} = 0. \end{cases} \tag{14}$$

які доводять теорему.

Якщо система (14) має деякий розв'язок $\hat{z}_0 = \hat{z}_0^\sharp \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)$, то елемент $\hat{z}_0^\sharp$ визначає породжуючий розв'язок $z_0\big(t,\hat{z}_0^\sharp\big)$, якому може відповідати розв'язок $z(t,\varepsilon)$ вихідної крайової задачі (2), (3), який обертається у $z_0\big(t,\hat{z}_0^\sharp\big)$ при $\varepsilon = 0$.

Система операторних рівнянь (14) аналогічна відомому в теорії періодичних нелінійних коливань [3, 4] рівнянню для породжуючих амплітуд. Тому далі будемо називати її системою рівнянь для породжуючих елементів крайової задачі (2), (3).

Якщо система рівнянь (14) не має розв'язків, то й крайова задача (2), (3) не має розв'язків. Таким чином, виконання необхідної умови (14) неоднозначно розв'язної крайової задачі може бути забезпечене вибором елемента $\hat{z}_0 = \hat{z}_0^\sharp$ у сім'ї породжуючих розв'язків (12).

Достатня умова існування розв'язків. Знайдемо достатні умови існування розв'язку крайової задачі (2), (3).

Виконуючи у крайовій задачі (2), (3) заміну змінної

$$z(t,\varepsilon) = z_0\Big(t,\hat{z}_0^\sharp\Big) + x(t,\varepsilon),$$

в якій елемент $\hat{z}_0^\sharp \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)$ задовольняє систему рівнянь для породжуючих елементів (14), приходимо до такої задачі: знайти умови існування й алгоритм побудови неперервного по ε розв'язку $x(t,\varepsilon) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)\mathbf{C}[\varepsilon]$, який обертається в нуль при $\varepsilon = 0$ крайової задачі

$$\begin{gathered} Lx(\cdot,\varepsilon)(t) = \varepsilon Z\left(z_0\Big(t,\hat{z}_0^\sharp\Big) + x(t,\varepsilon),t,\varepsilon\right), \\ \ell x(\cdot,\varepsilon) = \varepsilon J\left(z_0\left(\cdot,\hat{z}_0^\sharp\right) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\right). \end{gathered} \tag{15}$$

Використовуючи умови (6) на нелінійні оператор $Z(z,t,\varepsilon)$ і функціонал $J(z,\varepsilon)$, виділимо в них лінійні частини по x і члени нульового порядку по ε. В результаті отримаємо розвинення

$$\begin{gathered} Z\left(z_0\Big(t,\hat{z}_0^\sharp\Big) + x(t,\varepsilon),t,\varepsilon\right) = Z_0\Big(t,\hat{z}_0^\sharp\Big) + L_0x(\cdot,\varepsilon)(t) + R(x(t,\varepsilon),t,\varepsilon), \\ J\left(z_0\Big(\cdot,\hat{z}_0^\sharp\Big) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\right) = J_0\left(\cdot,\hat{z}_0^\sharp\right) + \ell_0x(\cdot,\varepsilon) + \ell_1(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon), \end{gathered} \tag{16}$$

де:

$Z_0\Big(t, \hat{z}_0^\sharp\Big) = Z\left(z_0\Big(t, \hat{z}_0^\sharp(t)\Big), t, 0\right) : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \times \mathcal{I} \to \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$;

$J_0\Big(\cdot, \hat{z}_0^\sharp\Big) = J_0\Big(z_0\Big(\cdot, \hat{z}_0^\sharp(\cdot)\Big), 0\Big) : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \to \mathbf{B}$;

$L_0 : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \times \mathcal{I}_{\varepsilon_0} \to \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2) \times \mathcal{I}_{\varepsilon_0}$ — лінійний обмежений оператор, який є похідною Фреше від нелінійного оператора $Z(z, t, \varepsilon)$ по z при $z = z_0\Big(t, \hat{z}_0^\sharp\Big)$;

$\ell_0 : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \times \mathcal{I}_{\varepsilon_0} \to \mathbf{B} \times \mathcal{I}_{\varepsilon_0}$ — лінійний обмежений вектор-функціонал, який є похідною Фреше від нелінійного функціонала $J(z, \varepsilon)$ по z при $z = z_0\Big(t, \hat{z}_0^\sharp\Big)$;

$R : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \times \mathcal{I} \times \mathcal{I}_{\varepsilon_0} \to \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2) \times \mathcal{I}_{\varepsilon_0}$ — нелінійний оператор, який задовольняє умови (a_2) і (a_3) з (6);

$\ell_1 : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \times \mathcal{I} \times \mathcal{I}_{\varepsilon_0} \to \mathbf{B} \times \mathcal{I}_{\varepsilon_0}$ — нелінійний вектор-функціонал, який задовольняє умови (a_6) і (a_7) з (6).

Застосувавши до крайової задачі (15) теорему 1, отримаємо її загальний розв'язок

$$x(t, \varepsilon) = \left(\mathcal{P}_{N(\Lambda)}\hat{x}\right)(t) + \bar{x}(t, \varepsilon),$$

де елемент $\hat{x}$ визначається з системи умов розв'язності (13)

$$\begin{cases} \mathcal{P}_{Y_L}\Big\{Z_0\Big(\cdot, \hat{z}_0^\sharp\Big) + L_0 x(\cdot, \varepsilon) + R(x(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon)\Big\} = 0, \\ \mathcal{P}_{Y_{\mathcal{L}}}\Big\{J_0\left(\cdot, \hat{z}_0^\sharp\right) + \ell_0 x(\cdot, \varepsilon) + \ell_1\left(x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon\right) - \\ \qquad -\ell L^-\Big[Z_0\Big(\cdot, \hat{z}_0^\sharp\Big) + L_0 x(\cdot, \varepsilon) + R(x(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon)\Big]\Big\} = 0, \end{cases}$$

а вектор-функція $\bar{x}(t, \varepsilon)$ — частинний розв'язок неоднорідної крайової задачі (15), який знаходиться за формулою

$$\bar{x}(t, \varepsilon) = \varepsilon\Bigg[\left(GZ\left(z_0\Big(\cdot, \hat{z}_0^\sharp\Big) + x(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon\right)\right)(t) + \\ + \left(\mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{L}^- J\left(z_0\left(\cdot, \hat{z}_0^\sharp\right) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon\right)\right)(t)\Bigg].$$

де G — узагальнений оператор Гріна (10).

Використовуючи розвинення (16) і той факт, що елемент $\hat{z}_0^\sharp$ необхідно задовольняє систему рівнянь для породжуючих елементів (14), для знаходження розв'язку $x(t, \varepsilon)$ слабко нелінійної крайової задачі (2), (3) приходимо до еквівалентної операторної системи

$$x(t, \varepsilon) = \left(\mathcal{P}_{N(\Lambda)}\hat{x}\right)(t) + \bar{x}(t, \varepsilon),$$

$$\left(\mathcal{B}_0\hat{x}\right)(t) = -\begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_L}\left\{L_0\bar{x}(\cdot, \varepsilon) + R(x(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon)\right\} \\ \mathcal{P}_{Y_{\mathcal{L}}}\Big\{\ell_0\bar{x}(\cdot, \varepsilon) + \ell_1(x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) - \\ \qquad -\ell L^-\left[L_0\bar{x}(\cdot, \varepsilon) + R(x(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon)\right]\Big\} \end{bmatrix}, \tag{17}$$

$$\bar{x}(t,\varepsilon)=\varepsilon\Big[\Big(G\Big\{Z\left(\cdot,\hat{z}_0^\sharp\right)+L_0\left[(\mathcal{P}_{N(\Lambda)}\hat{x})(t)+\bar{x}(\cdot,\varepsilon)\right]+$$

$$+R\left(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon\right)\Big\}\Big)(t)+\Big(\mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{L}^-\Big\{J(\cdot,\hat{z}_0^\sharp)+$$

$$+\ell_0\left[\left(\mathcal{P}_{N(\Lambda)}\hat{x}\right)(\cdot)+\bar{x}(\cdot,\varepsilon)\right]+\ell_1(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big\}\Big)(t)\Big],$$

де $\mathcal{B}_0=\begin{bmatrix}\mathcal{B}_1\\ \mathcal{B}_2\end{bmatrix}$ — операторна матриця, $\mathcal{B}_1=\mathcal{P}_{Y_L}L_0\mathcal{P}_{N(\Lambda)},\ \mathcal{B}_1:\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)\to\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2)$, $\mathcal{B}_2=\mathcal{P}_{Y_\mathcal{L}}\left[\ell_0-\ell L^-L_0\right]\mathcal{P}_{N(\Lambda)},\ \mathcal{B}_2:\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)\to\mathbf{B}$ — лінійні обмежені оператори.

Існування розв'язку слабко нелінійної крайової задачі (15) і, як наслідок, крайової задачі (2), (3) залежить від існування розв'язку другого рівняння операторної системи (17).

Розглянемо питання про умови розв'язності та вигляду загального розв'язку другого рівняння операторної системи (17) з операторною матрицею $\mathcal{B}_0=\begin{bmatrix}\mathcal{B}_1\\ \mathcal{B}_2\end{bmatrix}$.

Якщо у скінченновимірних просторах узагальнене обернення операторної матриці $\mathcal{B}_0$, яка як правило є сталою, не є проблемою, то у банахових просторах узагальнене обернення операторної матриці викликає певні труднощі. Для розв'язання цієї задачі скористаємося роботою [10].

Відомо [10, с. 538], що операторна матриця $\mathcal{B}_0$ — узагальнено оборотна тоді й лише тоді, коли узагальнено оборотні оператори $\mathcal{B}_1$ та $\widehat{\mathcal{B}}_2=\mathcal{B}_2\mathcal{P}_{N(\mathcal{B}_1)}$.

Нехай $\mathcal{B}_1\in\mathbf{GI}(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1),\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2)$ та $\widehat{\mathcal{B}}_2\in\mathbf{GI}(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1),\mathbf{B})$. Внаслідок узагальненої оборотності операторів $\mathcal{B}_1$ та $\widehat{\mathcal{B}}_2$ існують [12, 13] обмежені проектори $\mathcal{P}_{N(\mathcal{B}_1)}:\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)\to N(\mathcal{B}_1)$ на нуль-простір $N(\mathcal{B}_1)$ і $\mathcal{P}_{Y_{\mathcal{B}_1}}:\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2)\to Y_{\mathcal{B}_1}$ — на підпростір $Y_{\mathcal{B}_1}=$ $=\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2)\ominus R(\mathcal{B}_1)$ оператора $\mathcal{B}_1$ та обмежені проектори $\mathcal{P}_{N(\widehat{\mathcal{B}}_2)}:\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)\to N(\widehat{\mathcal{B}}_2)$ — на нуль-простір і $\mathcal{P}_{Y_{\widehat{\mathcal{B}}_2}}:\mathbf{B}\to Y_{\widehat{\mathcal{B}}_2}$ — на підпростір $Y_{\widehat{\mathcal{B}}_2}=I_\mathbf{B}\ominus R\left(\widehat{\mathcal{B}}_2\right)$ оператора $\widehat{\mathcal{B}}_2$, а також обмежені узагальнено обернені оператори $\mathcal{B}_1^-,\ \widehat{\mathcal{B}}_2^-$.

Наслідком узагальненої оборотності оператора $\mathcal{B}_0$ є його нормальна розв'язність [12]. За класифікацією С. Г. Крейна [7] друге рівняння операторної системи (17) може бути: однозначно розв'язним ($\mathcal{P}_{N(\mathcal{B}_0)}\equiv 0$), всюди розв'язним ($\mathcal{P}_{Y_{\mathcal{B}_0}}\equiv 0$), неоднозначно і не всюди розв'язним ($\mathcal{P}_{N(\mathcal{B}_0)}\neq 0,\mathcal{P}_{Y_{\mathcal{B}_0}}\neq 0$).

Побудова принаймні одного розв'язку. Розглянемо загальний випадок, коли друге рівняння операторної системи (17) неоднозначно і не всюди розв'язне, тобто $\mathcal{P}_{N(\mathcal{B}_0)}\neq 0$, $\mathcal{P}_{Y_{\mathcal{B}_0}}\neq 0$.

Оскільки оператор $\mathcal{B}_0$ нормально розв'язний, то, використовуючи теорему 1 з [10, с. 538] про розв'язність рівняння з операторною матрицею, маємо, що друге рівняння операторної системи (17) має розв'язок тоді й лише тоді, коли виконується умова

$$\mathcal{P}_{Y_{\mathcal{B}_0}}\begin{bmatrix}\mathcal{P}_{Y_L}\left\{L_0\bar{x}(\cdot,\varepsilon)+R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\right\}\\ \mathcal{P}_{Y_\mathcal{L}}\left\{\ell_0\bar{x}(\cdot,\varepsilon)+\ell_1(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-\ell L^-\left[L_0\bar{x}(\cdot,\varepsilon)+R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\right]\right\}\end{bmatrix}=0_{2\times 1}, \tag{18}$$

при виконанні якої воно має сім'ю розв'язків

$$\hat{x}(t,\varepsilon)=\left(\mathcal{P}_{N(\mathcal{B}_0)}\tilde{x}\right)(\cdot,\varepsilon)-$$

$$-\mathcal{B}_0^-\begin{bmatrix}\mathcal{P}_{Y_L}\left\{L_0\bar{x}(\cdot,\varepsilon)+R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\right\}\\ \mathcal{P}_{Y_\mathcal{L}}\left\{\ell_0\bar{x}(\cdot,\varepsilon)+\ell_1(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-\ell L^-\left[L_0\bar{x}(\cdot,\varepsilon)+R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\right]\right\}\end{bmatrix}, \tag{19}$$

де $0_{2\times 1}$ — (2×1)-вимірна нульова матриця, $\mathcal{P}_{N(\mathcal{B}_0)} = \mathcal{P}_{N(\mathcal{B}_1)}\mathcal{P}_{N(\widehat{\mathcal{B}}_2)}$ — обмежений проектор на нуль-простір оператора $\mathcal{B}_0$, $\tilde{x}(\cdot,\varepsilon)$ — довільний елемент банахового простору $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)$,

$$\mathcal{B}_0^- = \Big[\mathcal{B}_1^- - \mathcal{P}_{N(\mathcal{B}_1)}\widehat{\mathcal{B}}_2^-\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1^-, \quad \mathcal{P}_{N(\mathcal{B}_1)}\widehat{\mathcal{B}}_2^-\Big] \tag{20}$$

— обмежена узагальнено обернена операторна матриця до операторної матриці $\mathcal{B}_0$,

$$\mathcal{P}_{Y_{\mathcal{B}_0}} = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_{\mathcal{B}_1}} & 0 \\ -\mathcal{P}_{Y_{\widehat{\mathcal{B}}_2}}\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1^- & \mathcal{P}_{Y_{\widehat{\mathcal{B}}_2}} \end{bmatrix} \tag{21}$$

— обмежений проектор на підпростір $Y_{\mathcal{B}_0} = I_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2)\times\mathbf{B}} \ominus R(\mathcal{B}_0)$.

Для скорочення записів позначимо

$$\widetilde{\mathcal{P}} = -\mathcal{P}_{Y_{\widehat{\mathcal{B}}_2}}\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1^-, \qquad \widetilde{\mathcal{B}}_1^- = \mathcal{B}_1^- - \mathcal{P}_{N(\mathcal{B}_1)}\widehat{\mathcal{B}}_2^-\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1^-, \qquad \widetilde{\mathcal{B}}_2^- = \mathcal{P}_{N(\mathcal{B}_1)}\widehat{\mathcal{B}}_2^-. \tag{22}$$

Фіксуючи елемент $\tilde{x}(t,\varepsilon) = \tilde{x}_0(t,\varepsilon)$, отримаємо один із сім'ї розв'язків другого рівняння операторної системи (17) $\tilde{x}_*(t,\varepsilon) = \big(\mathcal{P}_{N(B_0)}\tilde{x}_0(\cdot,\varepsilon)\big)(t) \in N(B_0)$.

Тоді з урахуванням (21) і позначень (22) маємо, що друге рівняння операторної системи (17) буде розв'язне тоді й лише тоді, коли виконується умова

$$\mathcal{P}_{Y_{\mathcal{B}_0}}\begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_L} \\ \mathcal{P}_{Y_\mathcal{L}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_{\mathcal{B}_1}} & 0 \\ \widetilde{\mathcal{P}} & \mathcal{P}_{Y_{\widehat{\mathcal{B}}_2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_L} \\ \mathcal{P}_{Y_\mathcal{L}} \end{bmatrix} = 0_{2\times 1}. \tag{23}$$

При виконанні умови (23) операторна система (17) буде мати вигляд

$$\begin{gathered} x(t,\varepsilon) = \left(\mathcal{P}_{N(\Lambda)}\hat{x}\right)(t) + \bar{x}(t,\varepsilon), \\ \hat{x}(t,\varepsilon) = \tilde{x}_*(t,\varepsilon) - \widetilde{\mathcal{B}}_1^-\mathcal{P}_{Y_L}\left[L_0\bar{x}(\cdot,\varepsilon) + R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\right] - \\ - \widetilde{\mathcal{B}}_2^-\mathcal{P}_{Y_\mathcal{L}}\left[\ell_0\bar{x}(\cdot,\varepsilon) + \ell_1(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \ell L^-\left[L_0\bar{x}(\cdot,\varepsilon) + R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\right]\right], \\ \bar{x}(t,\varepsilon) = \varepsilon\Big[\big(G\big\{Z(\cdot,\hat{z}_0^\sharp) + L_0[(\mathcal{P}_{N(\Lambda)}\hat{x})(\cdot) + \bar{x}(\cdot,\varepsilon)] + R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\big\}\big)(t) + \\ + \Big(\mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{L}^-\Big\{J(\cdot,\hat{z}_0^\sharp) + \ell_0\left[(\mathcal{P}_{N(\Lambda)}\hat{x})(\cdot) + \bar{x}(\cdot,\varepsilon)\right] + \ell_1(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big\}\Big)(t)\Big]. \end{gathered} \tag{24}$$

Покажемо, що операторну систему (24) можна привести до системи, для розв'язання якої можна застосувати метод простих ітерацій.

Позначимо:

$y(\cdot,\varepsilon) = \operatorname{col}\big(x(\cdot,\varepsilon),\hat{x}(\cdot,\varepsilon),\bar{x}(\cdot,\varepsilon)\big)$ — вектор-стовпець із банахового простору $\mathfrak{B} = \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)\times\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)\times\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)$;

клітково-матричний оператор верхньотрикутникового вигляду

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{P}_{N(\Lambda)} & I_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)} \\ 0 & 0 & \mathcal{K} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{25}$$

де $\mathcal{K}$ — обмежений оператор, дія якого на вектор-функцію $\begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{bmatrix}$ здійснюється за правилом

$$\left(\mathcal{K}\begin{bmatrix} g_1(\cdot) \\ g_2(\cdot) \end{bmatrix}\right)(t) = -\begin{bmatrix}\widetilde{\mathcal{B}}_1^-, & \widetilde{\mathcal{B}}_2^-\end{bmatrix}\begin{bmatrix} (\mathcal{P}_{Y_L} L_0 g_1)(t) \\ (\mathcal{P}_{Y_\mathcal{L}}\left(\ell_0 - \ell L^- L_0\right)) g_2(\cdot) \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{U}(y(t,\varepsilon),t,\varepsilon) =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{x}_*(t,\varepsilon) - \begin{bmatrix}\widetilde{\mathcal{B}}_1^-, & \widetilde{\mathcal{B}}_2^-\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_L} R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon) \\ \mathcal{P}_{Y_\mathcal{L}}\left\{\ell_1(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \ell L^- R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\right\} \end{bmatrix} \\ \varepsilon\Big\{\left(G\left[Z\left(\cdot,\hat{z}_0^\sharp\right) + L_0[\left(\mathcal{P}_{N(\Lambda)}\hat{x}\right)(\cdot) + \bar{x}(\cdot,\varepsilon)] + R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\right]\right)(t) + \\ + \left(\mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{L}^-\left[J(\cdot,\hat{z}_0^\sharp) + \ell_0\left[\left(\mathcal{P}_{N(\Lambda)}\hat{x}\right)(\cdot) + \bar{x}(\cdot,\varepsilon)\right] + \ell_1(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\right]\right)(t)\Big\} \end{bmatrix}$$

— векторна оператор-функція, яка задовольняє умови (a_2), (a_3) з (6).

Оператори, які складають клітинно-матричний оператор (25), лінійні обмежені за означенням або як суперпозиції лінійних обмежених операторів.

Використовуючи введені позначення, операторну систему (24) запишемо у вигляді

$$y(t,\varepsilon) = \left(\mathcal{W}y(\cdot,\varepsilon)\right)(t) + \left(\mathcal{U}(y(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\right)(t) \tag{26}$$

або

$$(\mathcal{V}y(\cdot,\varepsilon))(t) = \mathcal{U}(y(t,\varepsilon),t,\varepsilon),$$

де

$$\mathcal{V} = I_\mathfrak{B} - \mathcal{W} = \begin{bmatrix} I_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)} & -\mathcal{P}_{N(\Lambda)} & -I_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)} \\ 0 & I_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)} & -\mathcal{K} \\ 0 & 0 & I_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)} \end{bmatrix}. \tag{27}$$

Оскільки клітинно-матричний оператор $\mathcal{V}$ має верхньотрикутниковий вигляд із тотожними операторами на головній діагоналі, то безпосередньою перевіркою можна переконатися, що він має обернений оператор

$$\mathcal{V}^{-1} = \begin{bmatrix} I_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)} & \mathcal{P}_{N(L)} & \mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{K} + I_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)} \\ 0 & I_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)} & \mathcal{K} \\ 0 & 0 & I_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)} \end{bmatrix}.$$

Оператор $\mathcal{V}^{-1}$ діє на вектор-стовпець $y = \operatorname{col}(x,\hat{x},\bar{x})$ за правилом

$$\mathcal{V}^{-1}y = \begin{bmatrix} x + \mathcal{P}_{N(L)}\hat{x} + \mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{K}\bar{x} + I_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)}\bar{x} \\ \hat{x} + \mathcal{K}\bar{x} \\ \bar{x} \end{bmatrix}.$$

Для доведення обмеженості оператора $\mathcal{V}^{-1}$ покажемо, що існує константа $c > 0$ така, що для всіх $y \in \mathfrak{B}$ виконується нерівність

$$\left|\left|\left|\mathcal{V}^{-1}y\right|\right|\right|_{\mathfrak{B}} \leq c\left\{|||x|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)} + |||\hat{x}|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)} + |||\bar{x}|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)}\right\}.$$

Для цього доведемо обмеженість кожної компоненти вектора $\mathcal{V}^{-1}y$ у банаховому просторі $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)$.

Оператори, які входять до клітинно-матричного оператора $\mathcal{V}^{-1}$, лінійні обмежені за визначенням. Оператор $\mathcal{K}$ обмежений як суперпозиція лінійних обмежених операторів. Позначимо норми операторів

$$\left|\left|\left|\mathcal{P}_{N(L)}\right|\right|\right|_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)} = p, \qquad |||\mathcal{K}|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)} = k.$$

Враховуючи введені позначення, отримуємо

$$\begin{aligned}
&\left|\left|\left|x + \mathcal{P}_{N(L)}\hat{x} + \mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{K}\bar{x} + I\bar{x}\right|\right|\right|_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)} \leq \\
&\quad\leq |||x|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)} + \left|\left|\left|\mathcal{P}_{N(L)}\hat{x}\right|\right|\right|_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)} + \left|\left|\left|\mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{K}\bar{x}\right|\right|\right|_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)} + \\
&\qquad + |||I\bar{x}|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)} \leq |||x|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)} + p\,|||\hat{x}|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)} + (pk+1)\,|||\bar{x}|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)}, \\
&|||\hat{x} + \mathcal{K}\bar{x}|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)} \leq |||\hat{x}|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)} + |||\mathcal{K}\bar{x}|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)} \leq \\
&\quad\leq |||\hat{x}|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)} + k\,|||\bar{x}|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)}.
\end{aligned}$$

Таким чином,

$$\begin{aligned}
&\left|\left|\left|V^{-1}y\right|\right|\right|_{\mathfrak{B}} \leq |||x|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)} + (p+1)\,|||\hat{x}|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)} + (pk+k+2)\,|||\bar{x}|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)} \leq \\
&\qquad \leq c\left\{|||x|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)} + |||\hat{x}|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)} + |||\bar{x}|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)}\right\},
\end{aligned}$$

де $c = \max\{1, p+1, pk+k+2\}$. Тим самим обмеженість оператора $\mathcal{V}_1^{-1}$ доведено.

Оскільки нелінійний оператор $\mathcal{U}$ залежить від ε, а оператор $\mathcal{V}^{-1}$ обмежений, то, варіюючи параметром ε, можна зробити так, щоб суперпозиція операторів $\mathcal{V}^{-1}\mathcal{U}$ була оператором стиску. Тоді, використовуючи принцип стискаючих відображень, отримаємо, що система (24) має принаймні один розв'язок.

Для побудови розв'язків крайової задачі (2), (3) збудуємо такий ітераційний процес.

Наближення $\bar{x}_{k+1}(t,\varepsilon)$ до $\bar{x}(t,\varepsilon)$ будемо шукати як частинні розв'язки крайових задач

$$\begin{gathered}
L\bar{x}_{k+1}(\cdot,\varepsilon)(t) = \varepsilon\left\{Z_0\left(t, \hat{z}_0^\sharp\right) + \left(L_0\left[(\mathcal{P}_{N(\Lambda)}\hat{x}_k)(\cdot) + \bar{x}_k(\cdot,\varepsilon)\right]\right)(t) + R(x_k(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\right\}, \\
\ell\bar{x}_{k+1}(\cdot,\varepsilon) = \varepsilon\left\{J_0\left(\cdot, \hat{z}_0^\sharp\right) + \ell_0\left[\left(\mathcal{P}_{N(\Lambda)}\hat{x}_k\right)(\cdot) + \bar{x}_k(\cdot,\varepsilon)\right] + \ell_1(x_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\right\}, \quad k = 0,1,2,\ldots.
\end{gathered} \tag{28}$$

Оскільки $\hat{z}_0^\sharp \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)$ є розв'язком системи рівнянь для породжуючих елементів (14), то з необхідної та достатньої умови існування розв'язків крайових задач (28) одержимо операторні рівняння

$$(\mathcal{B}_0\hat{x}_k)(t) = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_L}\left\{L_0\bar{x}_k(\cdot,\varepsilon) + R(x_k(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\right\} \\ \mathcal{P}_{Y_\mathcal{L}}\big\{\ell_0\bar{x}_k(\cdot,\varepsilon) + \ell_1(x_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \\ -\ell L^-\big[L_0\bar{x}_k(\cdot,\varepsilon) + R(x_k(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\big]\big\} \end{bmatrix}, \qquad (29)$$

з яких знаходяться k-ті наближення $\hat{x}_k(t,\varepsilon)$ до $\hat{x}(t,\varepsilon)$.

За теоремою 1 з урахуванням розвинень (16) частинні розв'язки крайових задач (28) набувають вигляду

$$\begin{aligned}\bar{x}_{k+1}(t,\varepsilon) = \varepsilon\Big[\Big(G\Big\{Z\left(\cdot,\hat{z}_0^\sharp\right) + L_0\left[\left(\mathcal{P}_{N(\varLambda)}\hat{x}_k\right)(\cdot) + x_k^{(1)}(\cdot,\varepsilon)\right] + R\left(x_k(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon\right)\Big\}\Big)(t) + \\ + \Big(\mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{L}^-\Big\{J\Big(z_0\Big(\cdot,\hat{z}_0^\sharp\Big) + \ell_0\left[\left(\mathcal{P}_{N(\varLambda)}\hat{x}_k\right)(\cdot) + x_k^{(1)}(\cdot,\varepsilon)\right]\Big) + \\ + \ell_1\left(x_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\right)\Big\}\Big)(t)\Big].\end{aligned}$$

Розв'язність операторних рівнянь (29) відносно $\hat{x}_k(t)$ для кожного k забезпечується виконанням умови (23).

Тоді $(k+1)$-ше наближення $x_{k+1}(t,\varepsilon)$ до $x(t,\varepsilon)$ буде мати вигляд

$$x_{k+1}(t,\varepsilon) = \left(\mathcal{P}_{N(\varLambda)}\hat{x}_k\right)(t) + \bar{x}_{k+1}(t,\varepsilon), \quad k = 0,1,2,\ldots,$$

де $x_0(t,\varepsilon) = \bar{x}_0(t,\varepsilon) = 0$, $x_1(t,\varepsilon) = \bar{x}_1(t,\varepsilon)$.

Таким чином, для крайової задачі (2), (3) справедлива така теорема.

Теорема 3. *Нехай крайова задача (2), (3) задовольняє умови (6), а відповідна породжуюча крайова задача (4), (5) при виконанні умов (11) має сім'ю породжуючих розв'язків (12).*

Тоді, якщо $\mathcal{B}_1 \in \mathbf{GI}(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1),\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2))$ *та* $\widehat{\mathcal{B}}_2 \in \mathbf{GI}(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1),\mathbf{B})$ *і виконуються умови*

$$\mathcal{P}_{N(\mathcal{B}_0)} = \mathcal{P}_{N(\mathcal{B}_1)}\mathcal{P}_{N(\widehat{\mathcal{B}}_2)} \neq 0,$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_{\mathcal{B}_1}} & 0 \\ \widetilde{\mathcal{P}} & \mathcal{P}_{Y_{\widehat{\mathcal{B}}_2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_L} \\ \mathcal{P}_{Y_\mathcal{L}} \end{bmatrix} = 0_{2\times 1},$$

то для кожного елемента $\hat{z}_0^\sharp \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)$, *який задовольняє систему рівнянь для породжуючих елементів (14), крайова задача (2), (3) має принаймні один розв'язок* $z(t,\varepsilon)$, *неперервний по* ε, *який обертається у породжуючий розв'язок* $z\left(t,\hat{z}_0^\sharp\right)$ *при* $\varepsilon = 0$.

Цей розв'язок можна знайти за допомогою збіжного на $[0,\varepsilon_*] \subset [0,\varepsilon_0]$ *ітераційного процесу*

$$z_{k+1}(t,\varepsilon) = z_0\left(t,c_0^\sharp\right) + x_{k+1}(t,\varepsilon),$$

$$x_{k+1}(t,\varepsilon) = (\mathcal{P}_{N(\varLambda)}\hat{x}_k)(t) + \bar{x}_{k+1}(t,\varepsilon),$$

$$\begin{aligned}\hat{x}_k(t,\varepsilon) = \tilde{x}_*(t,\varepsilon) - \widetilde{\mathcal{B}}_1^-\mathcal{P}_{Y_L}\left\{L_0\bar{x}_k(\cdot,\varepsilon) + R(x_k(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\right\} - \\ - \widetilde{\mathcal{B}}_2^-\mathcal{P}_{Y_\mathcal{L}}\left\{\ell_0\bar{x}_k(\cdot,\varepsilon) + \ell_1(x_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \ell L^-\left[L_0\bar{x}_k(\cdot,\varepsilon) + R(x_k(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\right]\right\},\end{aligned} \qquad (30)$$

$$\bar{x}_{k+1}(t,\varepsilon) = \varepsilon\Big[\Big(G\Big\{Z\left(\cdot, \hat{z}_0^{\sharp}\right) + L_0\left[\left(\mathcal{P}_{N(\varLambda)}\hat{x}_k\right)(\cdot) + \bar{x}_k(\cdot,\varepsilon)\right] + R\left(x_k(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon\right)\Big\}\Big)(t) +$$
$$+ \left(\mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{L}^{-}\Big\{J\left(z_0\left(\cdot, \hat{z}_0^{\sharp}\right) + \ell_0\left[\left(\mathcal{P}_{N(\varLambda)}\hat{x}_k\right)(\cdot) + \bar{x}_k(\cdot,\varepsilon)\right]\right) + \ell_1\left(x_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\right)\Big\}\right)(t)\Big],$$
$$x_0(t,\varepsilon) = \bar{x}_0(t,\varepsilon) = 0, \quad x_1(t,\varepsilon) = \bar{x}_1(t,\varepsilon), \quad k = 0,1,2,\ldots.$$

Зауваження 1. Якщо $\mathcal{P}_{N(B_0)} \neq 0$, а $\mathcal{P}_{Y_{B_0}} = 0_{2\times 2}$, то умова розв'язності другого рівняння системи (17) буде завжди виконуватися. Тоді з (21) маємо, що $\mathcal{P}_{Y_{\mathcal{B}_1}} = 0$ і $\mathcal{P}_{Y_{\widehat{\mathcal{B}}_2}} = 0$ одночасно.

Це означає, що оператори $\mathcal{B}_1$ та $\widehat{\mathcal{B}}_2$ будуть d-нормальні $(\dim Y_{\mathcal{B}_1} = 0)$, $\left(\dim Y_{\widehat{\mathcal{B}}_2} = 0\right)$ і для них існують праві обернені оператори $(\mathcal{B}_1)_r^{-1}$ $\left(\widehat{\mathcal{B}}_2\right)_r^{-1}$ [15].

Тоді з (20) маємо

$$\mathcal{B}_0^{-} = (\mathcal{B}_0)_r^{-1} = \left[(\mathcal{B}_1)_r^{-1} - \mathcal{P}_{N(\mathcal{B}_1)}\left(\widehat{\mathcal{B}}_2\right)_r^{-1}\mathcal{B}_2(\mathcal{B}_1)_r^{-1}, \quad \mathcal{P}_{N(\mathcal{B}_1)}\left(\widehat{\mathcal{B}}_2\right)_r^{-1}\right]$$

і в ітераційній процедурі (30)

$$\widetilde{\mathcal{B}}_1^{-} = (\mathcal{B}_1)_r^{-1} - \mathcal{P}_{N(\mathcal{B}_1)}\left(\widehat{\mathcal{B}}_2\right)_r^{-1}\mathcal{B}_2(\mathcal{B}_1)_r^{-1}, \qquad \widetilde{\mathcal{B}}_2^{-} = \mathcal{P}_{N(\mathcal{B}_1)}\left(\widehat{\mathcal{B}}_2\right)_r^{-1}.$$

Побудова єдиного розв'язку. Нехай $\mathcal{P}_{\mathcal{B}_0} = \mathcal{P}_{N(\mathcal{B}_1)}\mathcal{P}_{N(\widehat{\mathcal{B}}_2)} = 0$.

Тоді друге рівняння системи (17)

$$(\mathcal{B}_0\hat{x})(t) = -\begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_L}\{L_0\bar{x}(\cdot,\varepsilon) + R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\} \\ \mathcal{P}_{Y_{\mathcal{L}}}\{\ell_0\bar{x}(\cdot,\varepsilon) + \ell_1(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \\ -\ell L^{-}\left[L_0\bar{x}(\cdot,\varepsilon) + R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\right]\} \end{bmatrix}$$

при виконанні умови $\mathcal{P}_{Y_{B_0}}\begin{bmatrix}\mathcal{P}_{Y_L} \\ \mathcal{P}_{Y_{\mathcal{L}}}\end{bmatrix} = 0_{2\times 1}$ буде мати єдиний розв'язок

$$\hat{x}(t) = -\mathcal{B}_0^{-}\begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_L}\{L_0\bar{x}(\cdot,\varepsilon) + R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\} \\ \mathcal{P}_{Y_{\mathcal{L}}}\{\ell_0\bar{x}(\cdot,\varepsilon) + \ell_1(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \\ -\ell L^{-}\left[L_0\bar{x}(\cdot,\varepsilon) + R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\right]\} \end{bmatrix}, \tag{31}$$

оскільки $x_*(t,\varepsilon) = \mathcal{P}_{\mathcal{B}_0}\tilde{x}_0(t,\varepsilon) \equiv 0$.

При цьому операторна система (24) набуде вигляду

$$x(t,\varepsilon) = \left(\mathcal{P}_{N(\varLambda)}\hat{x}\right)(t) + \bar{x}(t,\varepsilon),$$
$$\hat{x}(t) = -\widetilde{\mathcal{B}}_1^{-}\mathcal{P}_{Y_L}\left[L_0\bar{x}(\cdot,\varepsilon) + R\left(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon\right)\right] -$$
$$-\widetilde{\mathcal{B}}_2^{-}\mathcal{P}_{Y_{\mathcal{L}}}\left[\ell_0\bar{x}(\cdot,\varepsilon) + \ell_1\left(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\right) - \ell L^{-}\left[L_0\bar{x}(\cdot,\varepsilon) + R\left(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon\right)\right]\right], \tag{32}$$
$$\bar{x}(t,\varepsilon) = \varepsilon\Big[\Big(G\Big\{Z\left(\cdot,\hat{z}_0^{\sharp}\right) + L_0\left[\left(\mathcal{P}_{N(\varLambda)}\hat{x}\right)(\cdot) + \bar{x}(\cdot,\varepsilon)\right]\Big) + R\left(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon\right)\Big\}(t) +$$
$$+ \Big(\mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{L}^{-}\Big\{J\left(\cdot,\hat{z}_0^{\sharp}\right) + \ell_0\left[\left(\mathcal{P}_{N(\varLambda)}\hat{x}\right)(t) + \bar{x}(\cdot,\varepsilon)\right]\Big) + \ell_1\left(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\right)\Big\}(t)\Big].$$

Операторна система (32) схожа на операторну систему (24), проте вони мають принципову відмінність. На відміну від системи (24), де $\hat{x}(t,\varepsilon)$ — один із частинних розв'язків другого рівняння, взятий при деякому фіксованому $x_*(t,\varepsilon) = \mathcal{P}_{\mathcal{B}_0}\tilde{x}_0(t,\varepsilon),$ у операторній системі (32) $\hat{x}(t,\varepsilon)$ — єдиний розв'язок другого рівняння.

Використовуючи введені вище позначення для $y(t,\varepsilon)$ та оператора $\mathcal{W}$ (25), систему (32) можна подати у вигляді рівняння

$$y(t,\varepsilon) = (Wy(\cdot,\varepsilon))\,(t) + \mathcal{U}_1(y(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)(t), \tag{33}$$

де

$$\mathcal{U}_1(y(t,\varepsilon),t,\varepsilon) =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ -\Big[\widetilde{\mathcal{B}}_1^-, \quad \widetilde{\mathcal{B}}_2^-\Big]\begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_L}R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon) \\ \mathcal{P}_{Y_\mathcal{L}}\big\{\ell_1(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \ell L^- R(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\big\}\end{bmatrix} \\ \varepsilon\Big\{\Big(G\Big[Z\left(\cdot,\hat{z}_0^\sharp\right) + L_0\left[\left(\mathcal{P}_{N(\Lambda)}\hat{x}\right)(\cdot) + \bar{x}(\cdot,\varepsilon)\right] + R\left(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon\right)\Big]\Big)(t) + \\ \quad + \Big(\mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{L}^-\Big[J\left(\cdot,\hat{z}_0^\sharp\right) + \ell_0\left[\left(\mathcal{P}_{N(\Lambda)}\hat{x}\right)(\cdot) + \bar{x}(\cdot,\varepsilon)\right] + \ell_1\left(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\right)\Big]\Big)(t)\Big\} \end{bmatrix}$$

— нелінійна обмежена вектор-функція.

Операторне рівняння (33) еквівалентне рівнянню

$$\mathcal{V}y(t,\varepsilon) = \mathcal{U}_1(y(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)(t),$$

де оператор $\mathcal{V}$ має вигляд (27). Внаслідок обмеженості проміжку $\mathcal{I}$, операторів $\mathcal{V}^{-1}$ та $\mathcal{U}_1(\varepsilon) = U_1(y(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)(t)$ існує $\varepsilon_* \le \varepsilon_0$ таке, що для всіх $\varepsilon \le \varepsilon_*$ оператор $\mathcal{V}^{-1}\mathcal{U}_1(\varepsilon)$ буде оператором стиску, а рівняння

$$y(t,\varepsilon) = V^{-1}U_1(y(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)(t)$$

має єдину нерухому точку, яка буде розв'язком операторної системи (32).

Теорема 4. *Нехай крайова задача (2), (3) задовольняє умови (6), а відповідна породжуюча крайова задача (4), (5) при виконанні умов (11) має сім'ю породжуючих розв'язків (12).*

Тоді, якщо $\mathcal{B}_1 \in \mathbf{GI}(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1),\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2)),$ $\widehat{\mathcal{B}}_2 \in \mathbf{GI}(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1),\mathbf{B})$ *і виконуються умови*

$$\mathcal{P}_{N(\mathcal{B}_0)} = \mathcal{P}_{N(\mathcal{B}_1)}\mathcal{P}_{N(\widehat{\mathcal{B}}_2)} = 0,$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_{\mathcal{B}_1}} & 0 \\ \widetilde{\mathcal{P}} & \mathcal{P}_{Y_{\widehat{\mathcal{B}}_2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_L} \\ \mathcal{P}_{Y_\mathcal{L}} \end{bmatrix} = 0_{2\times 1},$$

то для кожного елемента $\hat{z}_0^\sharp \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)$, *який задовольняє систему рівнянь для породжуючих елементів (14), крайова задача (2), (3) має єдиний розв'язок* $z(t,\varepsilon)$, *неперервний по* ε, *який обертається у породжуючий розв'язок* $z(t,\hat{z}_0^\sharp)$ *при* $\varepsilon = 0$.

Цей розв'язок можна знайти за допомогою збіжного на $[0,\varepsilon_*] \subset [0,\varepsilon_0]$ *ітераційного процесу*

$$z_{k+1}(t,\varepsilon) = z_0\left(t,c_0^\sharp\right) + x_{k+1}(t,\varepsilon),$$

$$x_{k+1}(t,\varepsilon) = \left(\mathcal{P}_{N(\Lambda)}\hat{x}_k\right)(t) + \bar{x}_{k+1}(t,\varepsilon),$$

$$\hat{x}_k(t,\varepsilon) = -\widetilde{\mathcal{B}}_1^{-}\mathcal{P}_{Y_L}\Big\{L_0\bar{x}_k(\cdot,\varepsilon) + R\left(x_k(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon\right)\Big\} -$$

$$- \widetilde{\mathcal{B}}_2^{-}\mathcal{P}_{Y_{\mathcal{L}}}\Big\{\ell_0\bar{x}_k(\cdot,\varepsilon) + \ell_1\left(x_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\right) - \ell L^{-}\left[L_0 x_k^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + R\left(x_k(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon\right)\right]\Big\}, \quad (34)$$

$$\bar{x}_{k+1}(t,\varepsilon) = \varepsilon\Big[\Big(G\Big\{Z\left(\cdot,\hat{z}_0^{\sharp}\right) + L_0\left[\left(\mathcal{P}_{N(\Lambda)}\hat{x}_k\right)(\cdot) + \bar{x}_k(\cdot,\varepsilon)\right] + R\left(x_k(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon\right)\Big\}\Big)(t) +$$

$$+ \Big(\mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{L}^{-}\Big\{J\left(\cdot,\hat{z}_0^{\sharp}\right) + \ell_0\left[\left(\mathcal{P}_{N(\Lambda)}\hat{x}_k\right)(t) + \bar{x}_k(\cdot,\varepsilon)\right] + \ell_1\left(x_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\right)\Big\}\Big)(t)\Big].$$

$$x_0(t,\varepsilon) = \bar{x}_0(t,\varepsilon) = 0, \quad x_1(t,\varepsilon) = \bar{x}_1(t,\varepsilon), \quad k = 0,1,2,\ldots.$$

Зауваження 2. Умову $\mathcal{P}_{\mathcal{B}_0} = \mathcal{P}_{N(\mathcal{B}_1)}\mathcal{P}_{N(\widehat{\mathcal{B}}_2)} = 0$ буде виконано, якщо або $\mathcal{P}_{N(\mathcal{B}_1)} = 0$, або $\mathcal{P}_{N(\widehat{\mathcal{B}}_2)} = 0$. Одночасно рівними нулю ці проектори бути не можуть.

Дійсно, якщо $\mathcal{P}_{N(\mathcal{B}_1)} = 0,\ \mathcal{P}_{Y_{\mathcal{B}_1}} \neq 0$, то оператор $\mathcal{B}_1$ буде n-нормальним із нульовим ядром $\left(\mathcal{P}_{N(\mathcal{B}_1)} = 0\right)$. Тоді $\widehat{\mathcal{B}}_2 = \mathcal{B}_2\mathcal{P}_{N(\mathcal{B}_1)} = 0$, а $\mathcal{P}_{N(\widehat{\mathcal{B}}_2)} = I_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)}$ і з (20) маємо

$$\mathcal{B}_0^{-} = \left[(\mathcal{B}_1)_l^{-1}, \quad 0\right],$$

де $(\mathcal{B}_1)_l^{-1}$ — лівий обернений оператор до оператора $\mathcal{B}_1^{-}$ [15].

Якщо $\mathcal{P}_{N(\mathcal{B}_1)} = 0,\ \mathcal{P}_{Y_{\mathcal{B}_1}} = 0$, то оператор $\mathcal{B}_1$ буде оборотним, а $\widehat{\mathcal{B}}_2 = \mathcal{B}_2\mathcal{P}_{N(\mathcal{B}_1)} = 0$. Тоді $\mathcal{P}_{N(\widehat{\mathcal{B}}_2)} = I_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)}$ і з (20) маємо

$$\mathcal{B}_0^{-} = \left[\mathcal{B}_1^{-1}, \quad 0\right],$$

де $\mathcal{B}_1^{-1}$ — обернений оператор до оператора $\mathcal{B}_1$.

Якщо $\mathcal{P}_{N(\widehat{\mathcal{B}}_2)} = 0$ і $\mathcal{P}_{Y_{\widehat{\mathcal{B}}_2}} \neq 0$, то оператор $\widehat{\mathcal{B}}_2$ буде n-нормальним із нульовим ядром. У цьому випадку проектор $\mathcal{P}_{N(\mathcal{B}_1)}$ не може бути нульовим, оскільки тоді проектор $\mathcal{P}_{N(\widehat{\mathcal{B}}_2)}$ був би тотожним оператором. У цьому випадку з (20) маємо

$$\mathcal{B}_0^{-} = \left[\mathcal{B}_1^{-} - \mathcal{P}_{N(\mathcal{B}_1)}\left(\widehat{\mathcal{B}}_2\right)_l^{-1}\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1^{-}, \quad \mathcal{P}_{N(\mathcal{B}_1)}\left(\widehat{\mathcal{B}}_2\right)_l^{-1}\right],$$

де $\left(\widehat{\mathcal{B}}_2\right)_l^{-1}$ — лівий обернений оператор до оператора $\widehat{\mathcal{B}}_2$.

А якщо $\mathcal{P}_{N(\widehat{\mathcal{B}}_2)} = 0$ і $\mathcal{P}_{Y_{\widehat{\mathcal{B}}_2}} = 0$, то оператор $\widehat{\mathcal{B}}_2$ буде оборотним.

Тоді з (20) маємо

$$\mathcal{B}_0^{-} = \left[\mathcal{B}_1^{-} - \mathcal{P}_{N(\mathcal{B}_1)}\widehat{\mathcal{B}}_2^{-1}\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1^{-}, \quad \mathcal{P}_{N(\mathcal{B}_1)}\widehat{\mathcal{B}}_2^{-1}\right],$$

де $\widehat{\mathcal{B}}_2^{-1}$ — обернений оператор до оператора $\widehat{\mathcal{B}}_2$.

Зауваження 3. Якщо $\mathcal{B}_1$ — обмежений, а $\mathcal{B}_2$ — оборотний оператори, то, як показано в [10, с. 477],

$$\mathcal{B}_0^{-} = \left[0, \quad \mathcal{B}_2^{-1}\right], \qquad \mathcal{P}_{Y_{\mathcal{B}_0}} = \begin{bmatrix} I_{\mathbf{B}_2} & \mathcal{B}_1\mathcal{B}_2^{-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Література

1. А. М. Ляпунов, *Общая задача об устойчивости движения*, Гостехиздат, Москва (1950).
2. Е. А. Гребенников, Ю. А. Рябов, *Конструктивные методы анализа нелинейных систем*, Наука, Москва (1979).
3. А. А. Бойчук, *Конструктивные методы анализа краевых задач*, Наук. думка, Киев (1990).
4. А. А. Бойчук, В. Ф. Журавлев, А. М. Самойленко, *Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи*, Ин-т математики НАН Украины, Киев (1995).
5. А. А. Бойчук, В. Ф. Журавлев, А. М. Самойленко, *Линейные нетеровы краевые задачи для импульсных дифференциальных систем с запаздыванием*, Дифференц. уравнения, **30**, № 10, 1677 – 1682 (1994).
6. О. А. Бойчук, Є. В. Панасенко, *Слабконелінійні крайові задачі для диференціальних рівнянь у критичному випадку у банаховому просторі*, Нелін. коливання, **13**, № 4, 483 – 496 (2010).
7. С. Г. Крейн, *Функциональный анализ*, Наука, Москва (1972).
8. V. F. Zhuravlev, *Weakly nonlinear boundary-value problems for the Fredholm integral equations with degenerate kernels in Banach spaces*, J. Math. Sci., **243**, № 3, 409 – 419 (2019).
9. А. А. Бойчук, В. Ф. Журавлев, А. М. Самойленко, *Нормально разрешимые краевые задачи*, Наук. думка, Киев (2019).
10. В. Ф. Журавлев, П. Н. Забродский, Н. П. Фомин, *Условия разрешимости и представление решений уравнений с операторными матрицами*, Укр. мат. журн., **71**, № 4, 471 – 485 (2019).
11. Л. В. Канторович, *Некоторые дальнейшие приложения принципа мажорант Ляпунова*, Докл. АН СССР, **80**, № 6, 848 – 851 (1951).
12. И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник, *Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов*, Штиинца, Кишинев (1973).
13. М. М. Попов, *Доповнювальні простори і деякі задачі сучасної геометрії просторів Банаха*, Математика сьогодні'07, вип. 13, 78 – 116 (2007).
14. Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн, *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве*, Наука, Москва (1970).
15. В. Ф. Журавлев, *Критерий разрешимости и представление решений линейных n- (d)-нормальных операторных уравнений в банаховом пространстве*, Укр. мат. журн., **62**, № 2, 167 – 182 (2010).

Одержано 01.06.21